

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Thierry Gallay (cours) & Julien Vovelle (TD)

Transcrit par Idriss Mazari.

Cours de M1-ENS de Lyon
Année scolaire 2014-2015

Ces notes ont été rédigées par Idriss Mazari. Les erreurs qui s'y trouvent ne sont donc aucunement du fait de M. Gallay (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~gallay/>). Les Td ont été rédigés par Julien Vovelle (<http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/vovelle/>).

On adoptera dans tout ce polycopié les notations suivantes :

- On travaillera toujours implicitement avec la mesure de Lebesgue (que l'on notera $\mu^{(n)}$ et que l'on abrèvera par dx en dimension 1) sur la tribu borélienne de \mathbb{R}^n .

- On désignera par $\mathcal{F}f$ ou par \hat{f} la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1$. On prendra la convention

$$\mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} d\mu^{(n)}(x)$$

- On désignera par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la classe de Schwarz dans \mathbb{R}^n .
- On désignera par $\mathcal{D}(\Omega)$ ou par $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω .
- On désignera par $\mathcal{D}'(\Omega)$ les distributions sur Ω et par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ les distributions tempérées sur \mathbb{R}^n .
- Le crochet de dualité sera noté \langle, \rangle .
- \mathbb{R}^n sera toujours implicitement supposé muni de sa structure euclidienne canonique, et l'on notera le produit scalaire $x \cdot y$, $\langle x|y \rangle$, (x, y) ou $(x|y)$, x et y désignant deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

Table des matières

I	Introduction générale	4
1	Mise en jambes	4
2	Quelques EDP emblématiques	4
3	Bibliographie	6
4	Exercices	8
	4.1 Stabilité de la solution d'une EDP	8
	4.2 Equation de transport	9
	4.3 Étude d'un problème elliptique en dimension 1	9
	4.4 Equation des ondes et cordes de guitare	11
	4.5 Minimisation et EDP	13
	4.6 Probas et EDP	14
	4.7 Transport Optimal et équation de Monge-Ampère	15
II	EDP linéaires du second ordre à coefficients constants	16
1	Solutions fondamentales de l'équation de Laplace	16
2	Mesure de surface et formule de Gauss	17
3	Propriétés des fonctions harmoniques	19
4	Problème de Dirichlet et fonctions de Green	21
5	L'équation de la chaleur	24
6	L'équation des ondes	30
7	Exercices	34
	7.1 L'équation de Poisson dans \mathbb{R}^3	34
	7.2 Fonction de Green sur le demi-espace - I	34
	7.3 Principe du maximum	35
	7.4 La formule de la moyenne et applications	35
	7.5 Fonction de Green sur le demi-espace - II	36
	7.6 L'équation de la chaleur sur le Tore	37
	7.7 L'équation de la chaleur avec terme source - Résolution	37
	7.8 L'équation de la chaleur avec terme source - Effet régularisant	38
	7.9 Inégalité de Varopoulos-Carne	39
	7.10 Propagation	40
	7.11 Limite Hydrodynamique	40
III	Opérateurs différentiels-Régularité elliptique-Propagation des singularités	42
1	Définitions générales	42
2	EDP elliptiques d'ordre 2-Existence de solutions faibles	43
3	Équations elliptiques d'ordre 2-Résultats de régularité	46
	3.1 Rappels sur les quotients différentiels	46
	3.2 Régularité intérieure	47
	3.3 Principes du maximum	49
4	Opérateurs linéaires hyperboliques et propagation	50
	4.1 Définitions et exemples	50
	4.2 Exemples de solution : propagation	52
5	Exercices	56
	5.1 Un exemple de régularité intérieure	56
	5.2 Un contre-exemple de régularité intérieure	59
	5.3 Principe du maximum faible pour les solutions faibles	63
	5.4 Une équation elliptique semi-linéaire	64

	5.5	Variété caractéristique de l'équation des ondes	65
	5.6	Variété caractéristique - Ensemble caractéristique	66
	5.7	Direction hyperbolique	67
	5.8	Système strictement hyperbolique en dimension 1	67
	5.9	Système hyperbolique symétrisable en dimension $d \geq 1$	67
	5.10	Équation de Hamilton-Jacobi et propagation	68
	5.11	Propagation et équation de Hamilton-Jacobi	69
IV		Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés	70
	1	Premières notions	70
	2	Deux exemples	73
	2.1	Semi-groupe des translations	73
	2.2	Semi-groupe de la chaleur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$	74
	3	Le théorème de Hille-Yosida	75
	3.1	Ensemble résolvant et spectre	75
	3.2	Théorèmes de représentation	77
	4	Exercices	85
	4.1	Fermeture d'un opérateur non borné	85
	4.2	Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert	85
	4.3	Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert (suite)	86
	4.4	Semi-groupe et inégalité d'interpolation	86
	4.5	Ensembles spectraux d'opérateurs non bornés	86
V		Introduction aux équations d'évolution semi-linéaires	87
	1	Solutions classiques et intégrales d'équations d'évolution	87
	2	Recollement, explosion et dépendance en la condition initiale	90
	3	L'équation de la chaleur non linéaire	91
	4	L'équation des ondes non-linéaire	94
	5	Exercices	97
	5.1	Equations de la chaleur non-linéaires	97
	5.2	Equation de la chaleur non-linéaire - Exposant critique de Fujita	98
VI		Examens et partiels	99
	1	Examen partiel du 13 mars 2015	99
	2	Corrigé de l'examen partiel du 13 mars 2015	100
	3	Examen final du 19 mai 2015	104

I. Introduction générale

I-1. Mise en jambes

On abrègera dans toute la suite "équation aux dérivées partielles" en "EDP". Une EDP est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui relie la fonction à ses dérivées partielles. Typiquement, la fonction u cherchée est définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n et est à valeurs dans \mathbb{R}^m , Ω étant supposé non vide et $n \geq 2$; le cas $n = 1$ est traité par la théorie des équations différentielles ordinaires. Une EDP est donc de la forme

$$\forall x \in \Omega, F(x, u(x), \nabla u(x), \dots, \nabla^k u(x)) = 0 \quad (\text{I.1})$$

F étant à valeurs dans \mathbb{R}^m (on demande généralement autant d'équations que d'inconnues). Si $m = 1$, on parle d'**équation scalaire**. Si $m \geq 2$, on parle de **système d'EDP**. L'entier k qui intervient dans (1) est appelé **ordre de l'EDP** (k est l'ordre maximal intervenant dans l'équation de manière non triviale). La forme (I.1) est beaucoup trop générale : on ne sait strictement rien en dire.

On dit que (I.1) est **linéaire** si F dépend linéairement de chacun des $\nabla^i u(x)$, $i \in \{0, \dots, k\}$. L'équation s'écrit alors

$$\sum_{|\alpha| \leq k} v_\alpha D^\alpha u = f \quad (\text{I.2})$$

où les $v_\alpha : \Omega \rightarrow M(m, \mathbb{R})$ sont les **coefficients de l'équation**. La fonction f est appelé **second membre de l'équation**.

I-2. Quelques EDP emblématiques

Faisons d'abord quelques rappels historiques : les équations différentielles ordinaires sont apparues au dix-septième siècle, et accompagnent la naissance du calcul différentiel dans les travaux de Newton et Leibniz (dans la lignée des oeuvres de Fermat sur la recherche d'extrema), auquel elles se couplent pour modéliser la mécanique céleste. Ces équations ont également pu servir à modéliser la mécanique des solides indéformables.

Les problèmes commencent à apparaître lorsqu'on l'on cherche à modéliser des solides déformables (souvent supposés idéaux, au moins le temps de la modélisation, la notion d'idéalité d'un objet dépendant évidemment de la situation). Historiquement, les équations sont apparues avec l'équation des **cordes vibrantes**, introduite par d'Alembert en 1749 dans un texte intitulé *Recherches sur la courbe que forme une courbe tendue mise en vibration*. Cette équation a une histoire riche en rebondissements qui mériterait une étude approfondie sur le plan historique, et nous nous contenterons ici de donner quelques éléments sur la controverse qui opposa Euler, d'Alembert et Daniel Bernoulli ; en effet, d'Alembert ayant trouvé la forme générale des solutions classiques de l'équation, Bernoulli s'empare de ses travaux et introduit, à sa manière, un développement en série de Fourier des solutions (ce qui imposerait une certaine régularité), tandis



FIGURE 2 – d'Alembert

qu'Euler réussit à déterminer la solution générale en fonction du profil initial, qui peut présenter des défauts de régularité ; sa solution a pourtant toujours un sens. **développer**. Les travaux de Bernoulli se retrouveront plus tard dans le célèbre *Théorie analytique de la chaleur* de Joseph Fourier. On réalisera au vingtième siècle qu'Euler, au cours de cette controverse, aura en fait été le premier à introduire la notion de **solution faible**, réapparue dans les années 30 avec les travaux de Leray (1906-1998). Étudions cette équation : nous aurons simplement besoin, pour cela, du principe fondamental de la mécanique de Newton.. On considère une corde astreinte à ne se déplacer que verticalement :

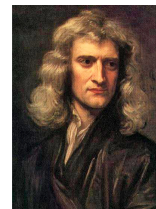
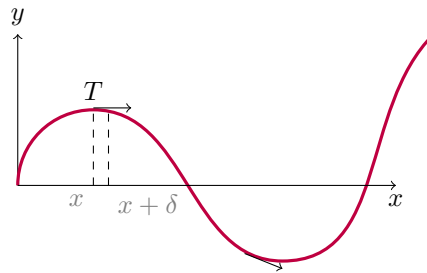


FIGURE 1 – Newton



Soit μ la masse linéique de la corde, T la tension de la corde (supposée constante). On considère une portion de la corde entre x et $x + \delta$. La masse de ce bout de corde est

$$m = \mu \int_x^{x+\delta} \sqrt{1 + (\partial_x u)^2(y)} dy$$

Par hypothèse, l'accélération est uniquement verticale et vaut donc

$$a = \partial_{tt}^2 u(x, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En négligeant la gravitation, la somme des forces se réduit à la tension exercée de part et d'autre du fil. La souplesse supposée de la corde signifie que la tension est toujours dirigée par la tangente au fil. Ainsi, en notant F la résultante des forces, on a :

$$F = T \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x u(x + \delta) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2(x + \delta)}} - T \begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x u(x) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2(x)}}$$

Sous l'hypothèse de petits déplacements, ces deux quantités deviennent

$$m = \mu\delta, F = T\delta \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{xx}^2 u(x) \end{pmatrix}$$

et on obtient finalement l'équation des cordes vibrantes, en posant $c := \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la vitesse de propagation :

$$\boxed{\partial_{tt}^2 u(x, t) = c^2 \partial_{xx}^2 u(x, t)} \quad (\text{I.3})$$

On peut généraliser cette formule à n'importe quelle dimension, et on l'appelle toujours **équation des ondes** : Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , si f est une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$, on peut considérer l'équation suivante, d'inconnue $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\boxed{\partial_{tt}^2 u = c^2 \Delta_x u + f} \quad (\text{I.4})$$

On peut également utiliser l'**équation d'élasticité**, qui fait intervenir plusieurs vitesses de propagation.

La deuxième équation aux dérivées partielles fondamentale est l'**équation de la chaleur**, introduite par Fourier aux alentours de 1810 :

$$\boxed{\partial_t u = D \Delta_x u + f} \quad (\text{I.5})$$

où u modélise la température dans le domaine Ω , f est un terme source et D est la diffusivité thermique du matériau. Cette équation s'établit via un bilan d'énergie et via la loi de Fourier, qui est une loi phénoménologique : de nombreux débats ont lieu aujourd'hui encore pour savoir si cette loi peut se déduire des principes de la mécanique classique ou si elle est condamnée à rester une loi phénoménologique. Notons que cette équation n'est pas réversible, contrairement aux équations de Newton. Mais où arrive cette irréversibilité ?

La troisième EDP emblématique est l'**équation de la mécanique des fluides** (introduite par Euler, en 1755, et affinée par Navier en 1823 pour l'étude des fluides visqueux).

On définit $u(t, x)$ la vitesse dans le fluide au point x à l'instant t et $p(t, x)$ la pression dans le fluide au point x à l'instant t . On introduit $\eta \geq 0$ la viscosité du fluide. Alors u est solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) &= \eta \Delta_x u - \nabla p \\ \operatorname{div}_x(u) &= 0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Si $\eta = 0$, on parle d'équation d'Euler, et si $\eta > 0$, on parle d'équation de Navier-Stokes. Il est intéressant de noter qu'il s'agit de la première EDP non-linéaire apparue historiquement. Elle l'est de manière intrinsèque, pas à cause d'un développement limité malencontreux de la part d'un mathématicien, mais bien à cause du $(u \cdot \nabla)u$ qui apparaît dans le terme d'accélération, qui correspond en fait à une dérivée de Lie. C'est une équation sur laquelle beaucoup de questions sont encore ouvertes : on sait pas si les solutions sont régulières, ni même si elles existent en tout temps...

Un des succès incontestables de la physique du XIX^e siècle est l'établissement, aux alentours de 1875, des **équations de Maxwell**. Soit ρ la densité de charge, j la densité de courant, ε_0 la permittivité du vide et μ_0 sa perméabilité. Les équations de Maxwell sont le système d'EDP suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(E) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}(B) &= 0 \\ \operatorname{rot}(E) &= -\partial_t B \\ \operatorname{rot}(B) &= \mu_0 j + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

On peut par exemple en déduire une EDP fermée qui s'assimile à une équation des ondes à la vitesse de la lumière c , $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$:



$$\varepsilon_0 \mu_0 \partial_{tt}^2 B = \Delta_x B + \mu_0 \operatorname{rot}(j) \quad (\text{I.8})$$

Enfin, mentionnons l'**équation de Schrodinger** : $u(t, x)$ désignant l'amplitude de probabilité de présence de la particule en dx à l'instant t , on a :

FIGURE 3 –
Maxwell

$$i\hbar \partial_t u = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x u + V u \quad (\text{I.9})$$

où \hbar est la constante de Planck réduite, m la masse d'une particule et $V(x, t)$ le potentiel associé à la force subie. Cette équation décrit l'évolution de la densité de probabilité $|u|^2$. Elle présente certaines analogies avec l'équation de la chaleur, mais également des différences majeures : par exemple, elle est réversible (via la symétrie $u(x, t) \mapsto \overline{u(x, -t)}$, qui est un analogue quantique de la réversibilité), tandis que l'équation de la chaleur ne l'est pas.

Mentionnons pour finir l'**équation de Poisson**, qui apparaît naturellement lorsque l'on cherche des solutions stationnaires de l'équation des ondes ou de la chaleur :

$$-\Delta_x u = f \quad (\text{I.10})$$

f ne dépendant pas du temps.

I-3. Bibliographie

- S. Alinhac et P. Gérard, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels, InterEditions, Paris, 1991.
- H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext, Springer, New York, 2011.
- Th. Cazenave et A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*. Mathématiques & Applications 1, Ellipses, Paris, 1990.
- K.-J. Engel et R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York, 2000.
- L. C. Evans, *Partial differential equations*, second edition. Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

- A. Friedman, *Partial differential equations*. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1976.
- D. Gilbarg et N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis. II. Differential operators with constant coefficients. III. Pseudo-differential operators. IV. Fourier integral operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003–2009.
- F. John, *Partial differential equations*, reprint of the fourth edition. Applied Mathematical Sciences 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
- J. Jost, *Partial differential equations*, second edition. Graduate Texts in Mathematics 214, Springer, New York, 2007.
- O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques & Applications 13, Springer, Paris, 1993.
- J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- M. Protter et H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, corrected reprint of the 1967 edition. Springer-Verlag, New York, 1984.
- J. Rauch, *Partial differential equations*. Graduate Texts in Mathematics 128, Springer-Verlag, New York, 1991.
- W. Strauss, *Partial differential equations. An introduction*, second edition. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008.
- M. E. Taylor, *Partial differential equations. I. Basic theory. II. Qualitative studies of linear equations. III. Nonlinear equations*. Second edition, Applied Mathematical Sciences 115–117, Springer, New York, 2011.

I-4. Exercices

I-4- 1. Stabilité de la solution d'une EDP

On note \mathbb{T}^n le tore de dimension n (classes d'équivalence \bar{x} pour la relation $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}^n$). Pour $p \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction $\varphi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe C^k sur \mathbb{T}^n (noté $\varphi \in C^k(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^p)$) si la fonction

$$x \ni \mathbb{R}^n \mapsto \varphi(\bar{x})$$

est de classe C^k sur \mathbb{R}^n . Pour $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, on notera aussi

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = \int_{[0,1]^n} f(\bar{x}) dx.$$

On rappelle la formule de Green dans ce cadre périodique :

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{T}^n} \operatorname{div}(\mathbf{a})(x) \varphi(x) dx, \quad (\text{I.11})$$

pour toutes fonctions $\mathbf{a} \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

Pour $p \geq 1$, on note $L^p(\mathbb{T}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont \mathbb{Z}^n périodique et satisfont

$$\int_{[0,1]^n} |u(x)|^p dx < +\infty.$$

Si $u \in L^1(\mathbb{T}^n)$ et $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx = \langle u, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

le k -ième coefficient de Fourier de u . Ici $e_k(x) := e^{2\pi i k \cdot x}$.

1. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Soit $u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$ satisfaisant

$$u \in C^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{T}^n), \quad (\text{I.12})$$

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n, \quad (\text{I.13})$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{I.14})$$

Remarque : Dans (I.13), $u(0)$ est la valeur en $t = 0$ de la courbe $t \mapsto u(t)$ tracée dans $L^2(\mathbb{T}^n)$. Considérer la valeur en 0 a un sens puisque la courbe est continue par hypothèse.

En passant en Fourier, montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{-4\pi^2 |k|^2 t} \hat{u}_0(k) e_k, \quad (\text{I.15})$$

l'égalité ayant lieu dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

2. Réciproquement, montrer que la formule (I.15) définit une fonction

$$u \in C([0, +\infty[; L^2(\mathbb{T}^n))$$

satisfaisant (I.12), (I.13), (I.14).

3. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \int_{\mathbb{T}^n} u_0(x) dx$$

dans $L^2(\mathbb{T}^n)$.

4. Qu'en déduit-on au sujet de la stabilité dans $L^2(\mathbb{T}^n)$ de la solution nulle ?

I-4- 2. Equation de transport

Soit $b \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteur borné.

- Justifier que le flot $\Phi_t(x)$ est défini globalement en temps. On rappelle que Φ_t définit un C^1 -difféomorphisme $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- On note Φ^t la fonction inverse de $x \mapsto \Phi_t(x)$. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que

$$u: (t, x) \mapsto u_0(\Phi^t(x))$$

est solution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla_x u(t, x) = 0 \quad \text{pour tous } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{I.16})$$

et satisfait la condition initiale : $u(0, x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

- Comment opère l'équation de transport (I.16) sur le graphe de u_0 ? Qu'en est-il dans les cas particuliers $n = 1, b \equiv \pm 1$?

I-4- 3. Étude d'un problème elliptique en dimension 1

On considère le problème aux limites suivant :

trouver $u \in C^2[0, 1]$ tel que

$$-u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \quad (\text{I.17})$$

$$u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \quad (\text{I.18})$$

Les fonctions, $a, f \in C^0[0, 1]$, sont données, ainsi que les réels α, β . On suppose $a(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$.

- En utilisant les théorèmes de base sur les équations différentielles, montrer que les solutions de (1) forment un espace affine de dimension 2.

.....

SOLUTION :

Il s'agit d'une EDO dont l'ensemble des solutions est défini par la considération du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \text{trouver } u \in C^2[0, 1] \text{ tel que} \\ -u''(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = \lambda \quad u'(0) = \mu, \end{aligned}$$

avec λ et μ dans \mathbb{R} . Pour λ et μ fixés, le problème de Cauchy admet une unique solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz. En effet, il est équivalent au système différentiel

$$V' = AV \quad \text{et} \quad V(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec} \quad V = \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

où $(x, y) \mapsto A(x)y$ est lipschitzienne de $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2 par rapport à y .

.....

- Pour $v \in C^2(]0, 1[) \cap C^0[0, 1]$, on pose $(\mathcal{L}v)(x) = -v''(x) + a(x)v(x)$. Montrer que

$$(\mathcal{L}v)(x) \leq 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad \text{entraîne} \quad v(x) \leq \max(0, v(0), v(1)), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Indication : quel est le signe de v'' sur les intervalles où $v > 0$?

SOLUTION :

- Supposons $(\mathcal{L}v)(x) \leq 0, \forall x \in]0, 1[$. Dans un premier temps, supposons $v(0), v(1) \leq 0$. Il s'agit alors de montrer que v reste négative.

Par l'absurde, considérons alors qu'il existe x_0 tel que $m = \max\{v(x), x \in]0, 1[\} = v(x_0) > 0$. Soit $V(x_0)$ le voisinage de x_0 maximal tel que $v(x) > 0$ pour tout x dans $V(x_0)$. Par positivité de v et a sur $V(x_0)$, il vient alors que v'' est positive sur $V(x_0)$ et donc v est convexe sur $V(x_0)$. Alors, sur $V(x_0)$, v atteint son max sur une borne de $V(x_0)$.

La convexité de v et sa continuité induise que v est constante sur $V(x_0) \cup [x_0, 1]$ et ceci contredit la définition même de $V(x_0)$. Contradiction.

- Concernant le cas $v(0) > 0$ et $v(1) \leq 0$. On pose $w(x) = v(x) - v(0)(1-x)$ et on se retrouve dans le cas précédent en w , ce qui induit le résultat attendu par l'intermédiaire de $(\mathcal{L}w)$ qui est aussi négative lorsque $(\mathcal{L}v)$ l'est.
- Concernant le cas $v(0) \leq 0$ et $v(1) > 0$. Idem en posant $w(x) = v(x) - v(1)x$.
- Concernant le cas $v(0) > 0$ et $v(1) > 0$. Idem en posant $w(x) = v(x) - v(0)(1-x) - v(1)x$.

3. Vérifier que, si u est solution de (1), (2), la fonction

$$w(x) = u(x) - |\alpha|(1-x) - |\beta|x - \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

vérifie $(\mathcal{L}w)(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.

SOLUTION :

Il suffit d'écrire pour aboutir à

$$(\mathcal{L}w)(x) = f(x) - \|f\|_{L^\infty(0,1)} - a(x)(|\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)})$$

ce qui est effectivement négatif.

On peut remarquer de plus que $w(0), w(1) \leq 0$, d'où l'on déduit de la question précédente que $w \leq 0$ sur $]0, 1[$.

4. Montrer que les solutions de (1), (2) vérifient

$$\forall x \in [0, 1], \quad |u(x)| \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$$

en déduire l'unicité des solutions de (1), (2).

SOLUTION :

De la question précédente, on a $u(x) \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$.

Il suffit d'appliquer la question précédente à $-u$ avec $-f$, $-\alpha$, et $-\beta$ à la place de f , α , et β pour avoir $-u(x) \leq |\alpha|(1-x) + |\beta|x + \frac{1}{2}x(1-x)\|f\|_{L^\infty(0,1)}$.
cqfd. L'unicité de la solution de (1-2) en découle trivialement.

Ici, on remarque que l'unicité repose sur la linéarité du problème et le contrôle de la solution par les données du problème : α , β et f .

5. Montrer que la solution du problème

$$\begin{aligned} -v''(x) + a(x)v(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ v(0) &= 0 \quad v'(0) = 1, \end{aligned}$$

vérifie $v(1) \neq 0$. En déduire que le problème (1), (2) admet une solution et une seule, et que de plus, si $a \in C^k[0, 1]$ et $f \in C^{k+2}[0, 1]$, alors $u \in C^{k+2}[0, 1]$.

SOLUTION :

Désignons par (P1) le problème

$$\begin{aligned} -v''(x) + a(x)v(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ v(0) &= 0 \quad v'(0) = 1, \end{aligned}$$

D'après la question précédente, si $v(1) = 0$, on obtient $v = 0$ sur $[0, 1]$, ce qui contredit $v'(0) = 1$. Nécessairement, $v(1) \neq 0$. L'unicité et l'existence de la solution v de (P1) est assurée par le théorème

de Cauchy-Lipschitz (comme question (a)).

Désignons par (P2) le problème

$$\begin{aligned} -w''(x) + a(x)w(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ w(0) = \alpha \quad w'(0) &= 0, \end{aligned}$$

L'unicité et l'existence de la solution w de (P2) est aussi assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Notons $u = w + \gamma v$. Alors u vérifie :

$$\begin{aligned} -u''(x) + a(x)u(x) &= 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = w(0) + \gamma v(0) &= \alpha \\ u(1) = w(1) + \gamma v(1). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'existence d'une solution u de (1-2) en prenant $\gamma = \frac{\beta - w(1)}{v(1)}$.

La régularité provient du fait que $u'' = au - f$. Ainsi, si $a \in C^k[0, 1]$ et $f \in C^k[0, 1]$, avec $u \in C^2[0, 1]$, on obtient $u'' \in C^2[0, 1]$ et donc $u \in C^4[0, 1]$ (si $k \geq 2$). De proche en proche, on obtient $u'' \in C^k[0, 1]$ et donc $u \in C^{k+2}[0, 1]$. On gagne de la régularité.

Remarque : Au travers de cette première partie, nous nous sommes intéressés à 4 propriétés :

— *Contrôle de la solution par les données du problème : une forme de continuité de la fonctionnelle qui au problème initial associe sa solution.*

— *Unicité de la solution comme conséquence de la linéarité du problème et du contrôle ci-dessus.*

— *Existence de la solution : la partie la moins triviale. Ici, on se ramène à un problème dont on connaît l'existence d'une solution.*

— *Régularité de la solution.*

I-4- 4. Equation des ondes et cordes de guitare

Soit une corde de longueur L , considérée à l'horizontale dans la position de repos. L'équation vérifiée par l'amplitude $u(t, x)$ de déplacement de la corde (voir cours) est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in]0, L[, \quad (\text{I.19})$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, T étant la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Dans cette question uniquement on considère la corde comme de longueur infinie, c'est-à-dire qu'on résout (I.19) pour x variant dans tout \mathbb{R} .

- (a) Soit $\varphi, \theta \in C^2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$u(t, x) := \varphi(x + ct) + \theta(x - ct)$$

satisfait (I.19).

- (b) Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Déterminer la solution de (I.19) qui satisfait

$$u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x), \quad (\text{I.20})$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

On revient au cas de la corde de longueur L finie. Dans le cas d'une corde de guitare, en plus de l'équation d'ondes (I.19), l'amplitude de déplacement u vérifie les conditions au bord

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad t > 0. \quad (\text{I.21})$$

A t fixé, on peut alors prolonger $x \mapsto u(t, x)$ en une fonction *impair* continue $2L$ -périodique.

2. En utilisant un développement en séries de Fourier de $u(t, \cdot)$, montrer, sans justification de convergence des séries, que

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x), \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.22})$$

où

$$k_n := \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n := ck_n.$$

3. On considère (c'est approximatif pour plusieurs raisons), qu'une corde de guitare est mise en mouvement de la manière suivante : elle est déportée d'une hauteur h en son centre, donc avec le profil

$$f(x) = \min\left(\frac{2h}{L}x, \frac{2h}{L}(L-x)\right). \quad (\text{I.23})$$

et lâchée ainsi sans vitesse initiale. Trouver u sous la forme (I.22) satisfaisant la condition initiale (I.20) (pour $x \in]0, L[$) avec f données par (I.23) et g nulle. A t fixé, que dire de la convergence de la série obtenue ?

4. La vibration de la corde se propage à l'air puis à l'oreille (onde de pression). L'oreille entend les fréquences ω_n , d'autant moins nettement que le coefficient A_n est petit : ω_1 est donc la *fondamentale*. Pour $n \geq 2$, on appelle $\omega_n = n\omega_1$ la n -ième (fréquence) *harmonique*. Si n est une puissance de 2, la fréquence ω_n est perçue par l'oreille comme analogue à ω_1 (et plus aigüe). Une note correspondant à la fréquence $\omega_{2^{k+1}}$ est dite à *l'octave* de la note correspondant à la fréquence ω_{2^k} , cf. le tableau ci-dessus, issu de la page wikipedia [http://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_\(musique\)](http://fr.wikipedia.org/wiki/Harmonique_(musique)).

Harmonique	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (Hz)	32,7	65,4	98,1	130,8	163,5	196,2	228,9	261,6	294,3	327	359,7	392,4
Note ^{octave} de la gamme la plus proche	do ¹	do ¹	sol ¹	do ²	mi ²	so ²	si ²	do ³	ré ³	mi ³	fa ³	so ³
Écart à la note de la gamme la plus proche (cents)	0	0	2	0	-14	2	-31	0	4	-14	-49	2

FIGURE 4 –

- (a) Où poser¹ l'index gauche pour jouer la note à l'octave de la corde à vide ?
 (b) Dans la *gamme tempérée*

do, ré, mi, fa, sol, la, si, do,

l'écart entre notes est de deux tons sauf entre mi et fa et si et do : un seul ton. Connaissant la fréquence ω du do le plus bas, la fréquence du do à l'octave est 2ω . On obtient les notes intermédiaires (y compris les notes altérées) en considérant la progression géométrique

$$k \mapsto 2^{k/12}\omega$$

pour k entier entre 0 et 12. Certaines des valeurs de k (par exemple 1, ou 8) donnent les notes altérées (do[#] = ré^b et sol[#] = la^b en l'occurrence). Sur un ukulele ou une guitare, poser le doigt sur la première frette réduit la longueur de la corde d'un facteur $2^{-1/12}$. Quelles notes obtient-on en posant son doigt sur la première frette, sachant que sur la guitare les cordes sont successivement

mi, la, ré, sol, si, mi,

et sur un ukulele

sol, do, mi, la.

- (c) Revenons à la question des fondamentales et des harmoniques. Soit une note donnée de fréquence ω_1 (par exemple do¹ dans le tableau des harmoniques de do ci-dessus). La n -ième harmonique de fréquence $\omega_n = n\omega_1$ est-elle nécessairement une note de la gamme tempérée construite² sur do¹ ? Commenter les deuxième et troisième lignes du tableau des harmoniques de do ci-dessus.

1. sur une guitare ou un ukulele, la douzième frette est en effet située au milieu de la corde

2. elle est plutôt construite sur le la de fréquence 440 Hz

I-4- 5. Minimisation et EDP

On renvoie au préambule de l'exercice 4.1 pour les notations dans le cadre périodique.

1. **Equation de Poisson** : Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(x) dx = 0. \quad (\text{I.24})$$

Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$J: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla_x u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$

(a) Montrer que

$$-\Delta u_*(x) = f(x), \quad (\text{I.25})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

(b) Pour $k \in \mathbb{Z}^n$, on note

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx$$

le k -ième coefficient de Fourier de f . Déterminer u_* solution de (I.25) en fonction des coefficients Fourier de f .

(c) Quelle hypothèse sur f vous assurerait en effet que u_* est de classe C^2 ?

(d) Montrer que si $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ vérifie (I.25), alors u_* minimise la fonctionnelle J parmi les fonctions $u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

2. **Courbure Moyenne prescrite** : Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{A}: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{T}^n} \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2} dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u_*(x)}{\sqrt{1 + |\nabla u_*(x)|^2}} \right) = f(x), \quad (\text{I.26})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$.

3. **Minimisation sous contrainte** : Soit $f \in C^0(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$. Soit $u_* \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ telle que $|u(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$ (i.e. u_* est à valeurs dans \mathbb{S}^{n-1} , la sphère unité de \mathbb{R}^n). On suppose que u_* minimise la fonctionnelle

$$J: u \in C^1(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n) \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \cdot u(x) dx$$

parmi les fonctions $u \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$ à valeurs dans \mathbb{S}^{n-1} . Ici $\nabla u(x)$ est la matrice de composantes $\partial_{x_i} u_j$, $i, j = 1 \dots, n$. On a noté $|A|$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (norme euclidienne sur \mathbb{R}^{n^2}) associée au produit scalaire

$$(A, B) \mapsto A:B = \operatorname{trace}(A^t B).$$

Montrer que u_* vérifie l'équation

$$-\Delta u(x) = |\nabla u(x)|^2 u(x) + P_{\langle u_*(x) \rangle^\perp} f(x), \quad (\text{I.27})$$

pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, où, pour $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, on a noté

$$P_{\langle u \rangle^\perp}: v \mapsto v - (u \cdot v)u$$

la projection orthogonal sur $\langle u \rangle^\perp$.

Indication :

(a) Pour $v \in C^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{R}^n)$, on pourra introduire la fonction

$$w(t) = \frac{u + tv}{|u + tv|},$$

pour t petit et on montrera que

$$w(t) = u + tP_{\langle u \rangle^\perp} v + \mathcal{O}(t^2).$$

(b) On dérivera l'identité $u(x) \cdot u(x) = 1$ pour montrer $\partial_{x_i} u(x) \cdot u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{T}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, puis l'identité

$$\nabla u : \nabla((u \cdot v)u) = |\nabla u|^2 u \cdot v.$$

I-4- 6. Probas et EDP

Un champ très actif dans les probabilités est l'étude des limites d'échelles de processus probabilistes, souvent décrites à l'aide d'EDP ("limites hydrodynamiques"). En voici un exemple en dimension 1 (généralisable à toute dimension), où seule la question 1 demande des connaissances probabilistes très élémentaires.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N}$. Sur l'intersection du réseau $h\mathbb{Z}$ avec le segment $] - 1, 1[$ on considère une particule P se déplaçant de la manière suivante (marche au hasard) : soit une suite de temps $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots$. Si au temps t_n , la particule P est en $x_i := ih$ ($i \in \mathbb{Z}$, $|i| < N$), elle saute au hasard à droite ou à gauche avec probabilités respectives p et q ($p + q = 1$), de sorte qu'au temps t_{n+1} elle est en x_{i-1} avec probabilité p , en x_{i+1} avec probabilité q .

Pour $x \in h\mathbb{Z} \cap] - 1, 1[$, on note $u_N(x)$ la probabilité de rencontrer la "frontière" gauche -1 avant la frontière droite $+1$ dans la marche au hasard, sachant qu'on se trouve en x .

(a) Montrer que, pour $x \in h\mathbb{Z} \cap] - 1, 1[$, on a

$$u_N(x) = qu_N(x - h) + pu_N(x + h). \quad (\text{I.28})$$

(b) Donner les valeurs de $u_N(x)$ pour $x = \pm 1$.

On interpole u_N de manière affine et on fait l'hypothèse (H) suivante : il existe une fonction u de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $u_N \rightarrow u$ uniformément et assez rapidement sur $[-1, 1]$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, au sens où

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^2 \|u_N - u\|_{C([-1, 1])} = 0. \quad (\text{I.29})$$

(c) Montrer que, ainsi interpolée, u_N vérifie l'équation (I.28) pour tout $x \in] - 1 + h, 1 - h[$.

(d) Montrer que u est solution d'une certaine EDP sur $] - 1, 1[$ et vérifie certaines conditions au bord. On distinguera le cas symétrique ($p = q = \frac{1}{2}$) du cas non-symétrique $p \neq q$.

(e) Déterminer u dans le cas symétrique.

(f) Que dire de l'hypothèse (H) dans le cas non symétrique ? Qu'attend-t-on pour $\lim u_N(x)$?

(g) On considère le cas "faiblement non symétrique" où p et q dépendent de N avec

$$p_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{N}, \quad q_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}.$$

Montrer que u vérifie l'EDP

$$u'' + 4u' = 0$$

avec conditions au bord $u(-1) = 1$, $u(1) = 0$ et déterminer u .

I-4- 7. Transport Optimal et équation de Monge-Ampère

Soit $n \geq 1$, soient f et g deux applications continues, positives (strictement), intégrables sur \mathbb{R}^n d'intégrales 1. On note μ et ν les mesures de probabilité de densité respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx, \quad \nu(A) = \int_A g(x)dx,$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^n . Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est borélienne, on dit que T transporte μ sur ν si $T_*\mu = \nu$, *i.e.*

$$\mu(T^{-1}(A)) = \nu(A),$$

pour tout borélien A de \mathbb{R}^n .

1. On suppose que T est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n . Montrer que si T transporte μ sur ν , alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\det(DT(x)) = \frac{f(x)}{g(T(x))}.$$

2. Soit c une fonction $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ s'annulant précisément sur la diagonale. On définit le coût d'une application transport T comme

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(x, T(x))f(x)dx.$$

On considère maintenant l'application de transport *optimale* qui minimise le coût de transport. Dans le cas où la distance $c(x, y)$ est la distance euclidienne au carré entre x et y , le théorème de Brenier affirme que l'application transport optimale T est le gradient d'une certaine fonction convexe $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En supposant u régulière et Du un C^1 -difféomorphisme, montrer que

$$\det(D^2u(x)) = \frac{f(x)}{g(Du(x))}, \tag{I.30}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. L'équation (I.30) est une équation de type Monge-Ampère.

3. Déterminer T et u dans les cas $g(x) = f(x+z)$ ($z \in \mathbb{R}^n$ fixé) et $g(x) = \lambda^n f(\lambda x)$ ($\lambda > 0$ fixé).
4. Ecrire l'équation (I.30) dans le cas où les fonctions f, g, u sont radiales. On supposera $Du(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$.

II. EDP linéaires du second ordre à coefficients constants

II-1. Solutions fondamentales de l'équation de Laplace

On s'intéresse dans cette section à l'équation de Laplace :

$$-\Delta u = f \quad (\text{II.1})$$

les dérivées étant entendues au sens des distributions et f étant une fonction continue à support compact. Rappelons que si l'on dispose d'une distribution u solution fondamentale du laplacien, c'est-à-dire de

$$-\Delta u = \delta_0$$

on a accès grâce à la convolution des distributions à une solution de II.1, à savoir $u * f$. Pour déterminer une telle solution fondamentale, remarquons que le laplacien est un opérateur invariant par rotation, de même que δ_0 vu comme distribution. Ceci nous incite à chercher la solution fondamentale sous la forme d'une fonction radiale, c'est-à-dire sous la forme $\Phi = \varphi(|\cdot|)$. Alors en tout $x \neq 0$, l'hypothèse $\Delta \Phi = 0$ s'écrit en coordonnées polaires

$$\Delta \Phi(x) = (\partial_{rr}^2 \varphi + \frac{n-1}{r} \partial_r \varphi)_{r=|x|} = 0$$

On peut résoudre cette équation différentielle, et obtenir le résultat suivant :

DÉFINITION II.1. On définit sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la fonction Φ par

$$\Phi(x) := -\frac{1}{2\pi} \ln(\|x\|_2) \text{ si } n = 2$$

et

$$\Phi(x) := \frac{1}{(n-2)S_n|x|^{n-2}} \text{ si } n > 2$$

où $S_n := \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Φ est la **solution fondamentale du laplacien**.

LEMME II.1. La fonction Φ précédemment définie est bien solution fondamentale du laplacien au sens des distributions.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On ne traite que le cas $n = 3$; le cas $n = 2$ se fait assez simplement et le cas $n > 3$ se traite de manière similaire. Montrons donc que

$$\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = -4\pi \delta_0$$

Déjà, pour $|x| > 0$, $\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0$ au sens classique. Ainsi, $\Delta \left(\frac{1}{|x|} \right) = \sum u_\alpha D^\alpha \delta_0$ où les u_α sont des coefficients réels et où la somme est finie³. Soit ensuite $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Alors

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \left(\frac{1}{|x|} \right), f \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Définissons, pour $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon := \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\Delta f(x)}{|x|} d\mu^{(n)}(x)$. Calculons cette quantité grâce la formule de Green; on suppose $\text{supp}(f) \subseteq B(0, R)$. Alors la formule de Green appliquée à $B(0, R) \setminus B(0, \varepsilon)$ donne⁴

$$I_\varepsilon = \int_{|x|=\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|x|} \cdot \frac{-y}{|y|} \cdot \nabla f(y) + f(y) \cdot \frac{y}{|y|} \cdot \nabla \frac{1}{|y|} \right\} dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi f(0)$$

3. On peut ici conclure grâce à la notion de degré d'homogénéité d'une distribution.

4. La formule de Green et les notions de mesure de surface sont rappelées dans la section suivante.

□

En effet :

$$\left| \int_{|x|=\varepsilon} \frac{y}{|y|^2} \cdot \nabla f(y) dS(y) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla f\|_{\infty} \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} dS(y)}_{=4\pi\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

et

$$\begin{aligned} \int_{|x|=\varepsilon} -\frac{1}{|y|^2} f(x) dS(y) &= - \int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|y|^2} (f(y) - f(0) + f(0)) dS(y) \\ &= \underbrace{-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x|=\varepsilon} f(0) dS(y)}_{=-4\pi f(0)} - \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (f(y) - f(0)) dS(y)}_{\leq 4\pi \sup_{|x|=\varepsilon} \|f(x) - f(0)\| \rightarrow 0} \end{aligned}$$

PROPOSITION II.1. Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \Phi(x-y) d\mu^{(n)}(y)$$

. Alors u est continue et est solution de

$$-\Delta u = f$$

au sens des distributions.

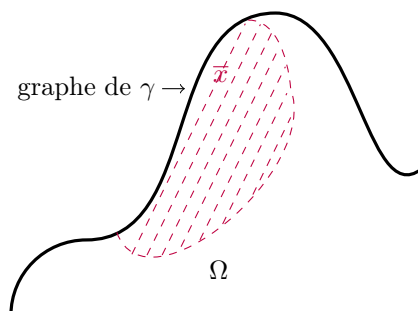
II-2. Mesure de surface et formule de Gauss

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION II.2. On dit que Ω est un **ouvert de classe C^k de \mathbb{R}^n** si pour tout $\bar{x} \in \partial\Omega$ il existe $r > 0$ et $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k tel que, après renumérotation des coordonnées et réordonnement des axes éventuels, on ait

$$\Omega \cap B(\bar{x}, r) = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^n \cap B(\bar{x}, r), x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x^n \in \mathbb{R}, x^n < \gamma(x')\}$$

En d'autres termes, on demande que deux conditions soient vérifiées : que la frontière $\partial\Omega$ soit une sous-variété de classe C^k de \mathbb{R}^n et que Ω soit localement d'un seul côté de Ω . Que veut-on dire par "après renumérotation des coordonnées" ? On veut pouvoir localement paramétrer le bord par un graphe, mais, dans le cas du cercle par exemple, au voisinage du point $(1, 0)$ le cercle ne peut pas s'écrire $(x, f(x))$. Et "après changement d'orientation des axes" ? Il se peut que l'intérieur soit paramétré par $\{x^n > \gamma(x')\}$, ce qui justifie ce choix.



Cette définition nous permet de définir deux objets essentiels :

- i) La normale unité sortante à Ω : C'est l'application suivante, définie en cartes locales et de classe C^{k-1} :

$$\nu : \begin{cases} \partial\Omega & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x', \gamma(x')) & \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\gamma(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla\gamma(x') \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Il est important de noter que sa définition ne dépend pas de la carte locale choisie.

- ii) La mesure de surface sur $\partial\Omega$: C'est la mesure S sur $\partial\Omega$ définie localement par son action sur les fonctions à support compact, au sens où, pour toute fonction φ continue à support compact dans $B(\bar{x}, r)$ (où r est choisi comme dans la définition), on définit

$$\langle S, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x', \gamma(x')) \sqrt{1 + |\nabla \gamma(x')|^2} dx'$$

et cette définition est indépendante du choix de la carte locale. On obtient une mesure sur tout $\partial\Omega$ par un argument de partition de l'unité.

On a alors la fameuse **formule de Gauss** :

PROPOSITION II.2. *Soit Ω un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n et $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) d\mu^{(n)} = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS} \quad (\text{II.2})$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Par partition de l'unité, on se ramène au cas de fonctions F telles que $\operatorname{supp}(F) \subset B(\bar{x}, R)$, ensuite de quoi la démonstration se ramène à une application du théorème de Fubini.

□

On en tire la non moins fameuse **formule de Green** :

COROLLAIRE II.1. *Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$. Alors*

$$\boxed{\int_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) d\mu^{(n)} = \int_{\partial\Omega} f\partial_{\nu}g - g\partial_{\nu}f dS} \quad (\text{II.3})$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Il suffit de remarquer que $f\Delta g - g\Delta f = \operatorname{div}(f\nabla g - g\nabla f)$ et d'appliquer la formule de Gauss.

□

REMARQUE. Ce résultat constitue également un petit miracle de la théorie toute aussi miraculeuse des distributions, puisqu'elle exprime la dérivée au sens des distributions de χ_{Ω} :

$$\nabla \chi_{\Omega} = -\nu(\cdot)S$$

Revenons à présent à la solution fondamentale du laplacien. L'hypothèse que f est à support compact n'est absolument pas minimale ; il suffit que f décroisse suffisamment rapidement à l'infini. Par exemple, pour $n \geq 3$, l'expression a encore un sens pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1; \frac{n}{2}[$. L'important est que cette formule donnée par convolution ne donne pas toujours la solution si f ne décroît pas suffisamment vite.

Parlons ensuite de la régularité de u : la solution donnée par convolution donne-t-elle une fonction de classe \mathcal{C}^2 ? En général, non : la fonction obtenue est de classe \mathcal{C}^1 , mais pas \mathcal{C}^2 . En fait, les espaces $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, longtemps considérés comme naturels pour l'étude des EDP y sont en fait très mal adaptés : les bons espaces de régularité sont les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ et les espaces de Sobolev.

Ensuite, a-t-on unicité de la solution ? Il est clair que non : il suffit d'ajouter à u n'importe quelle fonction harmonique, et l'on obtient une nouvelle solution. Étudions, pour aller plus loin dans cette étude, les propriétés des fonctions harmoniques, en commençant par le lemme de Liouville :

LEMME II.2. *Soit $v \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ harmonique dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Alors v est constante.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Une fonction L^{∞} définit une distribution tempérée ; par transformée de Fourier, on a

$$\mathcal{F}\Delta v = 0$$

Mais

$$\mathcal{F}(-\Delta v)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}(v)(\xi)$$

et ainsi

$$\operatorname{supp}(\mathcal{F}(v)) \subseteq \{0\}$$

Ainsi, v est un polynôme, en passant par $\bar{\mathcal{F}}$. Comme v est bornée, v est constante.

□

En conséquence de ce résultat, si $n \geq 3$ et si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ la solution u donnée par convolution est l'unique solution de $-\Delta u = f$ tendant vers 0 en $+\infty$. Ce résultat reste vrai en dimension 2 si $\int f = 0$.

II-3. Propriétés des fonctions harmoniques

DÉFINITION II.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Une fonction $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est dite **harmonique dans** Ω si $\Delta v = 0$ dans Ω .

De même que les fonctions holomorphes (dont les parties réelles et imaginaires sont harmoniques), les fonctions harmoniques possèdent une structure extrêmement rigide, mais jouissent également de propriétés remarquables. Commençons par la formule de la moyenne :

PROPOSITION II.3. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonique dans Ω . Alors pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS(y) \quad (\text{II.4})$$

$$= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) d\mu^{(n)}(y) \quad (\text{II.5})$$

Rappelons que $|S(x, r)| = r^{n-1}|S(0, 1)|$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Une fois la première formule établie, la deuxième en découle immédiatement, comme on va le voir. Définissons, pour $x \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit

$$\varphi(r) := \frac{1}{r^{n-1}|S(0, 1)|} \int_{S(x, r)} u(x) dS(x)$$

Par le changement de variable $x = ry$, on obtient

$$\varphi(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(x, 1)} \varphi(ry) dS(y)$$

Dérivons cette expression :

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{S(x, 1)} y \cdot \nabla u(ry) dS(y)$$

Par la formule de Gauss, cette dernière expression se ramène à

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|S(0, 1)|} \int_{B(x, 1)} r \Delta u(rx) d\mu^{(n)}(x) = 0$$

car u est harmonique. Donc φ est constante. Nécessairement, par continuité, $\varphi(r) = u(x)$. Pour établir la deuxième formule, on intègre sur les sphères :

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} u(y) d\mu^{(n)}(y) &= \int_0^r \left(\int_{S(x, s)} u(y) dS(y) \right) ds \\ &= \int_0^r (s^{n-1} |S(0, 1)| u(x)) ds \\ &= u(x) r^n \frac{|S(0, 1)|}{n} \\ &= u(x) |B(x, r)| \end{aligned}$$

□

Cette proposition est en fait une équivalence : une fonction de classe \mathcal{C}^2 est harmonique si et seulement si elle vérifie en tout point la propriété de la moyenne, ce qui permet de généraliser la notion d'harmonicité aux fonctions qui sont simplement continues ; ceci est une fausse généralisation puisque, comme nous le verrons plus bas, une fonction harmonique est automatiquement \mathcal{C}^∞ .

PROPOSITION II.4 : *Principe du maximum.* Soit Ω un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ harmonique sur Ω . Alors

i) Principe du maximum faible : $\max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \Omega} u(x)$ et de même pour les minima.

ii) Principe du maximum fort : Supposons de plus Ω connexe. Alors s'il existe $y \in \Omega$ tel que $u(y) = \max_{x \in \Omega} u(x)$, u est constante, et de même pour les minima.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Il est clair que $ii) \Rightarrow i)$. Montrons donc $i)$. Pour cela soit $M := \max_{\Omega} u$ et soit $E := \{x \in \Omega, u(x) = M\}$. E est un fermé de Ω et est non vide par hypothèse.

Montrons qu'il est ouvert, ce qui permettra de conclure. Pour cela, soit $x \in E$. Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq \Omega$. Alors par la formule de la moyenne

$$\int_{B(x,r)} (M - u(y)) d\mu^{(n)}(y) = 0$$

car $u(x) \leq M$ dans Ω et donc, par continuité de u , la fonction u est constante sur $B(x, r)$. Comme Ω est connexe, $E = \Omega$, ce qui conclut la preuve. □

Remarquons que ce principe du maximum est encore valable si u est simplement supposée sous-harmonique (i.e $\Delta u \geq 0$) car on a alors la propriété de la sous-moyenne :

$$\forall x \in \Omega, \forall r > 0 |B(x, r) \subset \Omega, u(x) \leq \frac{1}{|S(x, r)|} \int_{S(x, r)} u(y) dS(y)$$

En revanche, u ne vérifie alors plus le principe du minimum. Comme annoncé, parlons de la régularité des fonctions elliptiques :

PROPOSITION II.5. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ harmonique sur Ω (i.e qui vérifie la formule de la moyenne). Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Ici encore, on va voir que l'harmonicité fait des miracles : on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, en définissant

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega | \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

alors u est \mathcal{C}^∞ sur chacun des Ω_ε . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ positive, radiale ($\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|)$), de support inclus dans $B(0, \varepsilon)$ et d'intégrale 1. On définit alors :

$$u_\varepsilon : \begin{cases} \Omega_\varepsilon & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \varphi * u(x) \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned} u_\varepsilon * \varphi(x) &= \int_{B(x, \varepsilon)} \tilde{\varphi}(|x - y|) u(y) d\mu^{(n)}(y) \\ &= \int_0^\varepsilon \left\{ \int_{S(x, r)} \tilde{\varphi}(r) u(y) dS(y) \right\} dr \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}(r) r^{n-1} |S(0, 1)| u(x) dr \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon \tilde{\varphi}(r) |S(0, r)| dr \\ &= u(x) \|\varphi\|_1 \\ &= u \end{aligned}$$

Donc $u = \varphi * u$ qui est \mathcal{C}^∞ .

□

Notons que tous les calculs précédents s'adaptent parfaitement dans le cadre d'une distribution harmonique. Toute distribution harmonique est donc, après régularisation, une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

DÉFINITION II.4. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle **support singulier de u** le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel u est \mathcal{C}^∞ .

Le support singulier de u est inclus dans le support de u . Par exemple, si $-\Delta u = f$, on a $\text{suppsing}(f) \subseteq \text{suppsing}(u)$. En fait, on a même

$$\boxed{\text{suppsing}(u) = \text{suppsing}(f)}$$

On dit que $-\Delta$ est un **opérateur hypoelliptique**. Dans le cas de l'opérateur des ondes, cette propriété disparaît : l'équation des ondes propage les singularités.

Démontrons que $\text{suppsing}(u) = \text{suppsing}(f)$. : soit V un ouvert de Ω sur lequel f est \mathcal{C}^∞ et soit $x \in V$. Soit φ une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact inclus dans V identiquement égale à 1 sur un voisinage W de x . Alors $-\Delta(u - \Phi * (\varphi f)) = 0$ sur W donc u est \mathcal{C}^∞ : $u = \Phi * (\varphi f) + z$ où z est harmonique sur W .

Passons à présent à un résultat d'estimation des dérivées :

PROPOSITION II.6. Si u est harmonique dans $B(x, r)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists C(n, k) \in \mathbb{R} | \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = k, |\partial^\alpha u(x)| \leq \frac{C(n, k)}{r^{n+k}} \int_{B(x, r)} |u|$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On le démontre par récurrence sur k . Pour $k = 0$, c'est la formule de la moyenne. Le passage du cas $k = 0$ au cas $k = 1$ étant représentatif, on se contente de ne faire que ce passage-là : Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Le lemme de Schwarz implique que $\partial_i u$ est harmonique. En particulier,

$$\partial_i u(x) = \frac{1}{|B(x, \frac{r}{2})|} \int_{S(x, \frac{r}{2})} u \nu_i dS$$

d'où l'inégalité voulue en majorant brutalement.

□

II-4. Problème de Dirichlet et fonctions de Green

Dans toute la suite, on se fixe un ouvert Ω de \mathbb{R}^n de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$. Étant données deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega; \mathbb{R})$, le **problème de Dirichlet classique** consiste à trouver $u \in \mathcal{C}^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ telle que

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u & = & f \text{ dans } \Omega \\ u & = & g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}} \quad (\text{II.6})$$

On parle de problème de Dirichlet "classique" car la solution est cherchée dans l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 ; on s'intéressera plus tard à l'existence de solution pour des EDP dans des espaces plus généraux, comme par exemple les espaces de Sobolev.

On peut déjà dire un certain nombre de choses sur cette équation :

- S'il existe une solution u , alors elle est unique : soit en effet v une autre solution de II.6. Alors $u - v$ est harmonique dans Ω et identiquement nulle sur $\partial\Omega$. Par le principe du maximum et le principe du minimum, $u - v$ est nulle sur $\bar{\Omega}$.
- Toujours sous réserve de l'existence d'une solution u , u est positive si $f \geq 0$ et si $g \geq 0$. En effet, si $f \geq 0$, u est surharmonique (ou super harmonique) et son minimum est donc atteint sur $\partial\Omega$, en conséquence de quoi $u \geq \inf g \geq 0$. Si Ω est connexe, on a même mieux : $u > 0$ dans Ω , sauf si f et g sont identiquement nulles. Cela suit d'une application du principe du minimum fort : si u s'annule en un point $x \in \Omega$, ses valeurs sur le bord étant positives, elle est identiquement nulle.

L'existence d'une solution pour II.6 est en revanche beaucoup plus difficile à établir. On a le théorème suivant, que nous admettrons ici :

THÉORÈME II.1. Si Ω est un ouvert borné de classe C^1 , si $f \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R})$, $\alpha > 0$ et si $g \in C^0(\partial\Omega; \mathbb{R})$, alors II.6 possède une unique solution $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

Ce théorème implique en particulier que si l'on prescrit les valeurs d'une fonction sur $\partial\Omega$, on peut la relever en une fonction harmonique sur Ω .

Il y a deux données dans II.6, f et g . On peut se ramener au cas où $f = 0$: si $f \neq 0$, on peut construire une extension continue de f à support compact $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. On résout ensuite l'équation de Poisson $-\Delta v = \tilde{f}$ dans \mathbb{R}^n , en $v = \Phi * \tilde{f}$. Alors $w := u + v$ vérifie $\Delta w = 0$ dans Ω et $w|_{\partial\Omega} = g - v|_{\partial\Omega}$.

De même, mais c'est moins naturel, on peut se ramener au cas $g = 0$: soit $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ un relèvement C^2 de g (que l'on peut construire par cartes locales). On pose $w := u - v$ et alors $-\Delta w = f + \Delta v$ dans Ω , et est nulle sur $\partial\Omega$. Suivant le contexte, on travaillera avec l'une de ces deux formes.

Approches classiques de l'existence d'une solution :

- La théorie du potentiel : Cette théorie, développée par Hilbert et Courant, a été très à la mode au début du XX^e siècle, mais n'est plus beaucoup utilisée aujourd'hui. Elle consiste à placer une densité de charges g convenable sur $\partial\Omega$. Le potentiel électrostatique u qui en résulte alors vérifie $\Delta u = 0$ dans Ω et est égal à la densité sur $\partial\Omega$. La bonne méthode consiste en fait à considérer non pas une densité de charge mais un potentiel dipolaire sur $\partial\Omega$. Cette densité vérifie alors une équation intégrale sur $\partial\Omega$, et l'on peut ensuite appliquer la théorie de Fredholm et les outils d'analyse spectrale.
- La méthode de Perron : Cette méthode, qui date des années 20, est aussi appelée *méthode des fonctions sous-harmoniques*. Elle consiste à considérer $H^+(\Omega, g)$ l'ensemble des fonctions u sous-harmoniques sur Ω et vérifiant $u \leq g$ sur $\partial\Omega$. En posant $\varphi := \sup_{u \in H^+(\Omega, g)} u$, on montre que φ est harmonique sur Ω et égale à g sur $\partial\Omega$.
- Les méthodes hilbertiennes : On travaille, à la différence des deux méthodes précédentes, avec $g = 0$ dans II.6 et, en se plaçant dans un espace de Hilbert convenable, on utilise des outils d'analyse fonctionnelle (Lax-Milgram par exemple).

Notons néanmoins que les deux dernières méthodes fabriquent des solutions en un sens plus faible que la première ; nous y reviendrons plus tard.

Représentation des solutions et fonctions de Green Soit $x \in \Omega$. On définit une certaine fonction $G(x, \cdot)$ sur Ω de la forme

$$G(x, y) = \Phi(x - y) + w(y), y \in \Omega, y \neq x$$

où w est une fonction harmonique sur Ω . L'objectif est de faire de G une "solution fondamentale du laplacien dans Ω ". Pour ε suffisamment petit, appliquons la formule de Green à $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus B(x, \varepsilon)$: si u est une solution du problème de Dirichlet, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} \{u(y)\Delta_y G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y)\} d\mu^{(n)}(y) &= \int_{\partial\Omega} \{u(y)\partial\nu_y G(x, y) - G(x, y)\partial\nu_y u(y)\} dS(y) \\ &+ \int_{S(x, \varepsilon)} \{u(y)\partial\nu_y G(x, y) - G(x, y)\partial\nu_y u(y)\} dS(y) \end{aligned}$$

Travaillons un peu plus sur le deuxième terme :

$$\int_{S(x, \varepsilon)} \{u(y)\partial\nu_y G(x, y) - G(x, y)\partial\nu_y u(y)\} dS(y)$$

Pour cela, on recycle nos calculs effectués pour trouver la solution fondamentale du laplacien.

$$\int_{S(x,\varepsilon)} u(y)\partial\nu_y G(x,y)dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(x)$$

et

$$\int_{S(x,\varepsilon)} G(x,y)\partial\nu_y u(y)dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Par ailleurs, la singularité de G en x est intégrable et $\Delta_y G(x,y) = 0$. On obtient donc la représentation suivante :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)(-\Delta u(y))d\mu^{(n)}(y) - \int_{\partial\Omega} \{u(y)\partial\nu_y G(x,y) - G(x,y)\partial\nu_y u(y)\} dS(y)$$

Si u est une solution du problème de Dirichlet, alors la seule donnée qui reste inconnue est la quantité $\partial\nu_y u$ sur $\partial\Omega$, mais ce terme dépend de Δu et de $u|_{\partial\Omega}$. Pour lever cette difficulté, on va s'arranger pour trouver w harmonique dans Ω telle que $G(x,y) = 0, y \in \partial\Omega$. En d'autres termes, on veut résoudre le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{dans } \Omega \\ w(y) = -\Phi(x-y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

En supposant que l'on ait réussi à trouver un tel w , les conditions voulues sont satisfaites. La fonction G qui en résulte est appelée **fonction de Green pour $-\Delta$ dans Ω** . On a alors la représentation suivante des solutions de II.6 :

$$\forall x \in \Omega, \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)d\mu^{(n)}(y) + \int_{\partial\Omega} K(x,y)g(y)dS(y) \quad (\text{II.8})$$

La fonction $K(x,y) := -\partial\nu_y G(x,y)$ est appelée **noyau de Poisson sur Ω** .

Propriétés de la fonction de Green si Ω est connexe

- i) Pour tout $x \neq y \in \Omega$, $G(x,y) > 0$: En effet, $\Delta_y G(x,y) = 0$ sur Ω_ε , $G(x,y) = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\overline{G(x,y)} \geq 0$ sur $S(x,\varepsilon)$ pour ε suffisamment petit, puisque $G(x,y)$ tend vers $+\infty$ quand $y \rightarrow x$ et que w est de classe \mathcal{C}^∞ .
- ii) $K(x,y) > 0$ pour tout $y \in \partial\Omega$: Cela demande un raffinement du principe du maximum, et nous ne le démontrerons pas ici.
- iii) $G(x,y) = G(y,x)$ pour tout $x \neq y$: En effet, si l'on applique la formule de Green à $\Omega'_\varepsilon := \Omega \setminus (B(x,\varepsilon) \cup \overline{B(y,\varepsilon)})$ aux fonctions $v(z) = \overline{G(x,z)}$ et $w(z) := G(y,z)$, on obtient

$$0 = \int_{S(x,\varepsilon)} (v\partial_\nu w - w\partial_\nu v)dS + \int_{S(y,\varepsilon)} (v\partial_\nu w - w\partial_\nu v)dS$$

Le premier terme tend vers $-w(x)$, le second vers $v(y)$, toujours par la même méthode de calcul. On trouve ainsi $G(x,y) = v(y) = w(x) = G(y,x)$.

Fonction de Green dans la boule On connaît très peu de fonctions de Green de manière explicite ; néanmoins, dans le cas de la boule et du demi-espace, on a accès aux formules. Dans le cas de la boule, on travaille par la méthode des **images électriques**. Soit $\Omega := B(0,R)$ la boule de rayon R dans \mathbb{R}^n . On associe à $x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ le vecteur \tilde{x} défini par

$$\tilde{x} := \frac{R^2}{|x|^2}x$$

LEMME II.3. Soit $\psi(x, y) := \frac{|x| \cdot |\tilde{x} - y|}{R}$ pour $x, y \in \bar{\Omega}$, $|x| \cdot |y| \neq 0$. Alors

$$\psi(x, y) = \psi(y, x)$$

et

$$\psi(x, y) \geq |x - y|$$

avec égalité si et seulement si $|x| = R$ ou $|y| = R$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On calcule brutalement :

$$\begin{aligned} \psi(x, y)^2 &= \frac{|x|^2}{R^2} |\tilde{x} - y|^2 \\ &= \frac{|x|^2}{R^2} (|\tilde{x}|^2 + |y|^2 - 2\langle \tilde{x}, y \rangle) \\ &= R^2 + \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{R^2} - 2\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

On déduit que

$$\psi(x, y)^2 - |x - y|^2 = \frac{1}{R^2} (R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)$$

d'où les résultats annoncés. □

DÉFINITION II.5. Soit $G(x, y) := \Phi(x - y) - \Phi\left(\frac{|x|}{R}(\tilde{x} - y)\right)$, $y \neq x$, $|x|, |y| \in [0; R]$, $x \neq y$. Alors G est la fonction de Green de la boule.

Le fait que G soit bien la fonction de Green est laissé à titre d'exercice. On a par ailleurs une expression du noyau de Poisson dans la boule :

$$K(x, y) = \frac{|R|^2 - |x|^2}{R|S(0, 1)|} \cdot \frac{1}{|x - y|^n}$$

COROLLAIRE II.2. Si u est harmonique dans $B(0, R)$, alors

$$\forall r \in]0; R[, \forall x \in B(0, r), u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r|S(0, 1)|} \int_{S(0, r)} \frac{1}{|x - y|^n} u(y) dS(y)$$

C'est un analogue de la formule de Cauchy en analyse complexe.

Les dernières propriétés miraculeuses que nous aborderons dans cette sections sont les fameuses **in-égalités de Harnack**, qui rigidifient encore les fonctions harmoniques ; le contenu de ce théorème est que si u est une fonction harmonique positive sur $B(0, R)$, si $r < R$, alors la quantité $\frac{\max(u)}{\min(u)}$ est bornée par une constante qui dépend uniquement de r et de R :

COROLLAIRE II.3. Si $u \geq 0$ est harmonique dans $B(0, R)$ alors

$$\forall x \in B(0, R), R^{n-1} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2} \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}} u(0)$$

On peut en fait montrer des formes plus générales des inégalités de Harnack, i.e dans un cadre où l'ouvert Ω peut avoir une géométrie plus compliquée que la boule.

II-5. L'équation de la chaleur



Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On cherche à résoudre l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{pour } t \geq 0 \\ u(\cdot, \cdot, 0) = g(x) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Pour cela, on va faire appel à la théorie de Fourier, développée pour l'occasion. Supposons que l'on dispose d'une solution de II.9 telle que pour tout $t \geq 0$ $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et qui soit \mathcal{C}^1 en la variable de temps.

FIGURE 5 –
Fourier

À t fixé, prenons la transformée de Fourier de l'équation en espace, avec la convention

$$\hat{u}(\xi, t) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-ix \cdot \xi} d\mu^{(n)}(x)$$

de sorte que la formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi)$$

Avec les hypothèses ci-dessus, l'équation de la chaleur devient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \partial_t \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t)$$

Cette forme est beaucoup plus agréable : alors que Δ_x est un opérateur différentiel et couple les variables d'espaces, les ξ sont découplés dans l'équation obtenue via Fourier. Ainsi, en discrétisant, la matrice obtenue sera diagonale, tandis que la discrétisation du laplacien fait apparaître une matrice non diagonale en général. En quelque sorte, la transformée de Fourier diagonalise les opérateurs différentiels à coefficients constants.

En résolvant cette équation différentielle ordinaire, on obtient

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{g}(\xi) \quad (\text{II.10})$$

En d'autres termes, en Fourier, l'équation de la chaleur se contente de multiplier la donnée initiale par une gaussienne. Remarquons que les hypothèses ne sont pas auto-contradictoires. Par ailleurs, l'irréversibilité apparaît dans la forme précédente : on ne peut pas renverser le temps et autoriser $t < 0$, sinon le passage par la transformée de Fourier inverse deviendrait illicite. Pour inverser cette transformation, on introduit le **noyau de la chaleur** :

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2 t + i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

La solution de II.9 est alors donnée par convolution

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \quad u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) d\mu^{(n)}(y) \quad (\text{II.11})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(x, 0) = g(x) \quad (\text{II.12})$$

et cette formule vérifie bien les conditions voulues.

PROPOSITION II.7. Si $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors u donnée par II.11 vérifie

- i) $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times]0; +\infty[)$
- ii) $\partial_t u(x, t) = \Delta_x u(x, t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$
- iii) Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, u(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0^+} g(\bar{x})$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. a) Il s'agit d'applications successives des théorèmes généraux d'intégration.

b) Ce second point est évident une fois que l'on a remarqué que $\partial_t \Phi = \Delta_x \Phi$.

c) Ce point est un peu plus délicat : posant $y := x + \sqrt{t}z$. Alors

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} g(x + z\sqrt{t}) d\mu^{(n)}(z)$$

et cette formule est encore valable pour $t = 0$. On conclut ensuite par convergence dominée :

$$|u(x, t) - g(\bar{x})| = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4}} (g(x + z\sqrt{t}) - g(\bar{x})) d\mu^{(n)}(z) \right| \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}, t \rightarrow 0^+} 0$$

□

Remarquons que les hypothèses faites sur g ne sont absolument pas minimales : on peut demander que g soit à croissance polynômiale, ou bien que g définisse une distribution tempérée. On voit apparaître un principe du maximum parabolique : on a par exemple

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{t \geq 0} u(x, t) \leq \sup g$$

et de même pour les infimums. En outre, $g \geq 0$ entraîne $u \geq 0$ et même $u(x, t) > 0$ pour tout x et pour tout $t > 0$, sauf si g est identiquement nulle : la chaleur se transmet instantanément dans tout l'univers.

Une question qu'il est alors naturel de se poser est la suivante : la solution u donnée par II.11 est-elle l'unique solution de ce problème ? De manière équivalente, si $g = 0$, la solution nulle est-elle l'unique solution ? En fait, non. Le problème, c'est que les autres solutions sont alors non physiquement acceptables (par exemple, on peut avoir des croissances en $e^{|x|^2}$ en l'infini). Sous des hypothèses un peu plus restrictives cependant, on peut garantir l'unicité de la solution à II.9 :

PROPOSITION II.8. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0; T]) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0; T])$ telle que

$$\partial_t u = \Delta_x u$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times]0; T[)$. Alors u est donnée par II.11 avec $g = u(\cdot, 0)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. La démonstration est plutôt astucieuse et utilise la proposition précédente. Supposons dans un premier temps que u est en fait de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^n \times [0; T]$ et que $x \mapsto \partial_x^\alpha \partial_t^\beta u(x, t)$ soit borné sur \mathbb{R}^n , pour $t \in]0; T[$ et $|\alpha| + |\beta| \leq 2$.

Passons à l'idée principale de la démonstration : définissons, pour $0 \leq s < t \leq T$, la fonction $v_{t,s}$ ⁵ comme

$$v(x, \tau) := \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} u(y, \tau) d\mu^{(n)}(y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tau \in]s; t[$$

Ainsi, en omettant d'écrire la dépendance spatiale des fonctions, on voit que

$$v(\tau) = \Phi(t-\tau) * u(\tau), \tau \in]s; t[$$

où la convolution est prise en espace. Dérivons les deux membres en τ . On pourra dériver sous l'intégrale le membre de droite, les hypothèses *ad hoc* ayant été imposées. Il vient alors

$$\begin{aligned} \partial_\tau v(\tau) &= \partial_\tau \Phi(t-\tau) * u(\tau) + \Phi(t-\tau) * \partial_\tau u(\tau) \\ &= -\Delta_x \Phi(t-\tau) * u(\tau) + \Phi(t-\tau) * \partial_t u(\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc v n'a qu'une dépendance spatiale. On passe alors à la limite en t et s : la limite quand $\tau \rightarrow s$ ne pose pas de problème, et la limite $\tau \rightarrow t$ se traite en appliquant la proposition II.7. Remarquons ensuite que

$$u(t) = v(t) = v(s) = \Phi(t-s) * u(s)$$

Ainsi

$$u(t) = \Phi(t-s) * u(s)$$

Avec $s = 0$, on obtient le résultat. Si u ne vérifie pas les hypothèses plus strictes imposées au début de la démonstration, on la régularise et on travaille ensuite par approximation.

5. que l'on abrège en v pour alléger les notations.

□

Comment se servir de ce genre de raisonnement pour traiter l'équation de la chaleur avec termes sources ? On va présenter ici un procédé très général et assez utile pour l'étude de certaines équations d'évolution. On s'intéresse désormais à l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u &= f(x, t) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(\cdot, 0) &= g(x) \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

En travaillant avec la bonne régularité et en passant en transformée de Fourier en espace, on obtient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, \partial_t \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) + \hat{f}(\xi, t)$$

En utilisant la théorie des équations différentielles et plus particulièrement la variation de la constante, on obtient donc, à ξ fixé,

$$\forall t \geq 0, \hat{u}(\xi, t) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi, 0) + \int_0^t e^{-|\xi|^2 (t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds$$

En passant en Fourier inverse (et en n'oubliant pas que $\overline{\mathcal{F}}$ est un opérateur linéaire), on obtient finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0, u(x, t) = (\Phi(\cdot, t) * u(\cdot, 0))(x) + \int_0^t \Phi(x, t-s) * f(s) ds$$

C'est la **formule de Duhamel**. On arrive alors à une "solution fondamentale de la chaleur" dans \mathbb{R}^{n+1} : Soit $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{\Phi}(x, t) := H(t) \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (\text{II.14})$$

où H est la fonction de Heaviside. Notons que $\tilde{\Phi}$ est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Elle est en outre localement intégrable : en effet, $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}(x, t) d\mu^{(n)}(x) = H(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, et la positivité de $\tilde{\Phi}$ permet d'appliquer le théorème de Fubini. $\tilde{\Phi}$ définit ainsi une distribution, qui vérifie :

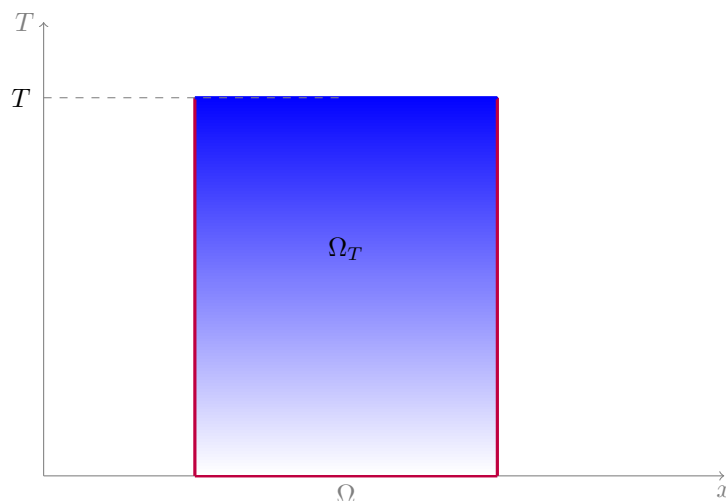
- $\text{suppsing}(\tilde{\Phi}) \subseteq \{0\}$.
- $\partial_t \tilde{\Phi} - \Delta_x \tilde{\Phi} = \delta_0$ au sens des distributions.

On va voir que, de même que le laplacien, l'opérateur des la chaleur est un opérateur hypoelliptique, c'est-à-dire que $\text{suppsing}(\partial_t u - \Delta_x u) = \text{suppsing}(u)$. Évoquons un peu le principe du maximum parabolique :

Principe du maximum parabolique Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $T > 0$. On définit :

- Le cylindre parabolique $\Omega_T := \Omega \times]0; T]$, qui n'est ni ouvert, ni fermé.
- Le bord parabolique de Ω_T : $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0; T])$, qui est compact.

Les figures suivantes illustrent la situation dans le cas où Ω est un intervalle réel :



Dans ce schéma, la partie centrale et le "couvercle" supérieur représentent Ω_T , tandis que les parties violettes représentent le bord parabolique. On a alors des principes du maximum parabolique :

PROPOSITION II.9. Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_T})$ telle que

$$\partial_t u(x, t) \leq \Delta_x u(x, t), (x, t) \in \Omega_T$$

Alors :

i) Principe du maximum faible : $\max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x, t).$

ii) Principe du maximum fort : si de plus Ω est connexe et s'il existe $(\bar{x}, t) \in \Omega_T$ tel que

$$u(\bar{x}, t) = \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} u(x, t)$$

alors u est constante dans $(\Omega_t :=) \Omega \times [0; t]$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Rappelons avans tout que l'essence du principe du maximum réside dans le fait qu'en un maximum la hessienne est négative. Pour utiliser ce fait, on va perturber légèrement la solution u : pour $\varepsilon > 0$, introduisons la fonction v_ε définie sur $\overline{\Omega_T}$ par

$$v_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$$

La seule vertu de cette fonction est qu'elle est une sous-solution stricte de l'équation de la chaleur dans le domaine Ω_T :

$$\partial_t v_\varepsilon - \Delta_x v_\varepsilon \leq \varepsilon < 0$$

Pour cette perturbation v_ε , le maximum ne peut être atteint que sur Γ_T : si v_ε atteint son maximum en $(x, t) \in \Omega_T$, alors, en ce point,

$$\partial_t v_\varepsilon(x, t) \geq 0, \Delta_x v_\varepsilon(x, t) \leq 0$$

ce qui contredit notre hypothèse. Il est par ailleurs assez clair que

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u(x, t) \leq \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} v_\varepsilon(x, t) + \varepsilon T$$

en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} \max_{\overline{\Omega_T}} u(x, t) &\leq \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_T}} v_\varepsilon(x, t) + \varepsilon T \\ &= \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon + \varepsilon T \\ &\leq \max_{\Gamma_T} u + \varepsilon T \end{aligned}$$

On fait ensuite tendre ε vers 0. La démonstration du deuxième point est moins immédiate; on peut utiliser plusieurs méthodes : la méthode de Nirenberg, développée dans le traité de Evans, une méthode utilisant les sous-solutions...

Soit M le maximum de u sur $\overline{\Omega_T}$ et soit v la fonction définie sur $\overline{\Omega_T}$ par $v(x, t) := M - u(x, t)$. Alors v est positive et $\partial_t v - \Delta_x v \geq 0$ sur $\overline{\Omega_T}$. Le principe du maximum parabolique fort est en fait équivalent à : si $v(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ pour un certain $\bar{x} \in \Omega, \bar{t} \in [0; T[$, alors $v(x, t) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $t \in]\bar{t}; T]$. On utilise ensuite le lemme suivant :

LEMME II.4. Pour tout $r > 0$, pour tout $e \in \mathbb{R}^n$, il existe $\alpha > 0$ suffisamment grand pour que l'application

$$w_{r,e,\alpha} : (x, t) \mapsto e^{-\alpha t} (r^2 - |x - te|^2)_+^3$$

définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ soit une sous-solution de l'équation de la chaleur, i.e

$$\partial_t w_{r,e,\alpha} \leq \Delta_x w_{r,e,\alpha}$$

sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. La preuve est purement calculatoire. \square

Revenons à la preuve de *ii*). On choisit $r, \varepsilon > 0$ suffisamment petits pour que $v(x, \bar{t}) \geq \varepsilon(r^2 - |x - \bar{x}|^2)_+^3$. On considère ensuite la fonction $U(x, t) := v(x, t) - \varepsilon w(x - \bar{x}, t - \bar{t})$ où $w := w_{r,0,\alpha}$ avec $\alpha > 0$ comme dans le lemme. Par hypothèse,

$$\partial_t U - \Delta_x U \geq 0 \text{ sur } B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$$

et

$$U(x, \bar{t}) \geq 0 \text{ sur } B(\bar{x}, r) \text{ et } U(x, t) = v(x, t) \geq 0 \text{ sur } \partial B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$$

Par le principe du minimum faible, $U(x, t) \geq 0$ sur $B(\bar{x}, r) \times [\bar{t}; T]$. Ainsi, $v(x, t) > 0$ sur ce même cylindre. Comme on peut atteindre tous les points par des cylindres obliques (faire les schémas), la preuve est terminée. (**clarifier la preuve**). \square

On en déduit facilement que l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u &= f(x, t) \text{ pour } (x, t) \in \Omega_T \\ u(x, 0) &= g(x) \text{ sur } \Omega \\ u(x, t) &= h(x, t) \text{ sur } \partial\Omega \times [0; T] \end{cases}$$

admet au plus une solution. Par contre, on ne peut espérer avoir une formule générale pour représenter les solutions. Pour conclure ce paragraphe, évoquons le problème de la régularité des solutions :

PROPOSITION II.10. *Si $u \in C^2(\Omega_T)$ vérifie $\partial_t u = \Delta_x u$ dans Ω_T , alors u est C^∞ sur Ω_T .*

Ceci implique notamment que l'opérateur de la chaleur $\partial_t - \Delta_x$ est hypoelliptique.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $(\bar{x}, \bar{t}) \in \Omega_T$. Montrons que u est C^∞ au voisinage de ce point. Pour $r > 0$ suffisamment petit, considérons le cylindre parabolique

$$C_r := \{(x, t) \in \Omega_T, |x - \bar{x}| \leq r, t \in [\bar{t} - r^2, \bar{t}]\}$$

Ce choix des puissances de r (simple et quadratique) s'explique par l'invariance de changement d'échelles dans l'équation. On considère ensuite une fonction de troncature χ de support contenu dans C_r et constante égale à 1 sur $C_{\frac{r}{2}}$. Regardons l'équation vérifiée par $\chi u =: v$ définie sur $\mathbb{R}^n \times [0; \bar{t}]$. Alors

$$\partial_t v = (\partial_t \chi)u + \chi \Delta_x u$$

et

$$\Delta_x v = u \Delta_x \chi + 2 \nabla \chi \cdot \nabla u + \chi \Delta_x u$$

et ainsi

$$\partial_t v - \Delta_x v = f$$

où $f = u(\partial_t \chi - \Delta_x \chi) - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u$. On peut donc considérer que $v \chi$ est la solution d'une certaine équation de la chaleur dans tout l'espace⁶ Par ailleurs, $\text{supp}(f) \subseteq C_r \setminus C_{\frac{r}{2}}$. Ainsi, pour tout $(x, t) \in C_{\frac{r}{4}}$, on a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) f(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \\ &= \int \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \{u(\partial_t \chi - \Delta_x \chi) - 2 \nabla \chi \cdot \nabla u\}(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \\ &= \int \int_{C_r} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \left\{ \partial_t \chi(y, s) + \Delta_x \chi(y, s) - 2 \nabla \tilde{\Phi}(x - y, t - s) \cdot \nabla \chi(y, s) \right\} u(y, s) d\mu^{(n)}(y) ds \end{aligned}$$

donc u est de classe C^∞ sur $C_{\frac{r}{4}}$ ⁷.

6. on l'étend par 0 hors de $\text{supp}(\chi)$.

7. Noter que si $(x, t) \in C_{\frac{r}{4}}$ et si $(y, s) \in C_r \setminus C_{\frac{r}{2}}$ alors $|x - y|^2 + |t - s| \geq \frac{r^2}{16}$.

□

On tire de la démonstration des estimations sur les dérivées de u :

COROLLAIRE II.4. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a les estimations suivantes :*

$$\sup_{(x,t) \in C_{\frac{r}{4}}} |\partial_t^\alpha \partial_x^\beta u(x,t)| \leq \frac{C_{n,|\alpha|,|\beta|}}{r^{2|\alpha|+|\beta|+n+2}} \|u\|_{L^1(C_r)} \quad (\text{II.15})$$

II-6. L'équation des ondes

Dans cette section, on va s'intéresser à la résolution de l'équation suivante :

$$\boxed{\partial_t^2 u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}} \quad (\text{II.16})$$

Dans un premier temps, on va supposer que f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Remarquons déjà que, pour la chaleur, on ne s'intéressait qu'aux temps futurs, tandis qu'ici on s'intéresse au comportement en tout temps. On peut imposer les données initiales. La fait que l'équation soit d'ordre 2 en temps nous montre qu'il nous faut imposer deux données initiales

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x,0) = v_0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où u_0 et v_0 sont supposées appartenir à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On prend la transformée de Fourier de II.16 en espace et l'on obtient l'équation différentielle :

$$\partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

On obtient une expression de la solution :

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos(|\xi|t) \hat{u}_0(\xi, t) + \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \hat{v}_0(\xi) + \int_0^t \frac{\sin(|\xi|(t-s))}{|\xi|} \hat{f}(\xi, s) ds$$

Appelons cette solution (A). On peut également choisir de ne pas imposer de condition initiale mais choisir la solution dite **causale** ou **retardée**, c'est-à-dire tendant vers 0 en $-\infty$:

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin(|\xi|(t-s))}{|\xi|} \hat{f}(\xi, s) ds$$

Appelons cette solution (B). (A) et (B) correspondent à deux problèmes physiques différents. Soit Φ la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{\Phi}(\xi, t) = H(t) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \quad (\text{II.17})$$

C'est une solution fondamentale de l'équation des ondes ; on retombe sur un produit de convolution. Dans l'étude de l'équation de la chaleur, la décroissance en Fourier donnait la régularité de la solution, mais ici, la décroissance n'est pas suffisamment rapide, et l'on pourrait rencontrer des solutions non physiques. Avec cette définition, (B) se réécrit

$$u = \tilde{\Phi} * f$$

où la convolution est cette fois prise en espace et en temps. Notons que ce n'est pas la seule solution fondamentale ; elle est appelée **solution fondamentale causale** ou **solution fondamentale retardée**. Dans le cas des petites dimensions, on a des expressions explicites pour $\tilde{\Phi}$:

PROPOSITION II.11. *La solution fondamentale retardée de l'équation des ondes vérifie :*

- Cas $n = 1$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$
- Cas $n = 2$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}$

- Cas $n = 3$: $\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \delta(t - |x|) = \frac{1}{4\pi|x|} \delta(t - |x|)$

Avant de passer à la démonstration, rappelons que $\delta(t - |x|)$ est défini, par dualité, comme la distribution sur \mathbb{R}^{n+1} donnée par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}), \langle \delta(t - |x|), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{|x|=t} \varphi(x, t) dS(x) \right\} dt = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, |x|) d\mu^{(3)}(x)$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Dans cette démonstration, on va un peu tricher : on va partir des expressions de $\tilde{\Phi}$ et montrer qu'elles satisfont II.17.

- Cas $n = 1$: Calculons brutalement la transformée de Fourier en espace : si $\xi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\xi, t) &= \frac{1}{2} \int_{-t}^t e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} H(t) \end{aligned}$$

Le résultat annoncé est donc prouvé. Avant de passer aux autres dimensions, faisons quelques commentaires : par un calcul direct, la solution causale donnée par (B) devient

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} H(t - s - |x - y|) f(y, s) dy ds$$

Le heaviside sélectionne donc un certain domaine de l'espace temps :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{C_-(x, t)} f(y, s) dy ds$$

où $C_-(x, t) := \{(y, s) : |x - y| \leq t - s\}$ est appelé **cône du passé du point** (x, t) . Faisons un schéma (la partie rouge symbolise le support de la source f) : $C_-(x, t)$ est parfois appelé **domaine de dépendance du point** (x, t) . Considérons à présent le point (y, s) sur la figure. Peut-il influencer $u(x, t)$? Oui, mais à condition que (x, t) soit dans le **domaine d'influence de** (y, s) , c'est-à-dire que $(x, t) \in C_+(y, s) := \{(x, t) : |x - y| \leq t - s\}$. On l'appelle également **cône du futur du point** (y, s) . Il est assez clair que

$$(y, s) \in C_-(x, t) \Leftrightarrow (x, t) \in C_+(y, s)$$

Cela traduit la propagation à vitesse finie des ondes, phénomène aussi connu sous le nom de principe de Huyghens. Passons à présent à la formule de d'Alembert, la formule (A). Celle ci prend la forme :

$$\forall t \geq 0, \forall x, u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - t) + u_0(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(y, t - \tau) dy d\tau$$

On retrouve la même idée : on peut définir les domaines d'influence, de dépendance, etc...

- Cas $n = 2$: On saute prudemment ce calcul, qui est plus sportif, et nous y reviendrons ensuite.
- Cas $n = 3$: Ici, à t fixé, $\delta(t - |x|)$ est simplement la mesure de surface sur $S(0, t)$. Sa transformée de Fourier en espace s'obtient donc par un calcul direct via la transformée de Fourier des mesures signées et, si $\xi \in \mathbb{R}^3, t > 0$ alors

$$\hat{\Phi}(\xi, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0, t)} e^{-i\xi \cdot x} dS(x)$$

Nous voilà embêtés, mais c'est le moment de présenter un calcul fort instructif et spécifique aux dimensions impaires : Si l'on définit ψ par

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \psi(\xi, t) := \int_{S(0, t)} e^{-i\xi \cdot x} dS(x)$$

alors

$$\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \psi(\xi, t) = 4\pi t \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

En définissant la valeur de $\psi(\xi, t)$ en $\xi = 0$ en passant à la limite. Pour $\xi = 0$, la formule est claire. Si $\xi \neq 0$ alors observons que ψ est invariante par rotation et donc, qu'en notant $e_3 := (0, 0, 1)$ le troisième vecteur de la base canonique, on a, pour tout $t > 0$

$$\psi(\xi, t) = \psi(|\xi|e_3, t)$$

Passons en coordonnées sphériques, c'est-à-dire que l'on paramètre $S(0, t)$, à un ensemble de mesure nulle près, par

$$S(0, t) = \{t(\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta)), 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

faire le schéma Dans ce système de coordonnées $dS(x) = t^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$ et ainsi

$$\begin{aligned} \psi(\xi, t) = \psi(|\xi|e_3, t) &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left\{ \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-it \cos(\theta)|\xi| t^2 \sin(\theta)} d\varphi \right\} d\theta \\ &= 2\pi t^2 \int_0^{\pi} e^{-it \cos(\theta)} \sin(\theta) d\theta \\ &= 4\pi t \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|} \end{aligned}$$

Le miracle de la dimension impaire apparaît dans le passage de la deuxième à la troisième ligne, quand on arrive sur une fonction que l'on sait intégrer de manière simple. Cette formule conclut la preuve.

Écrivons les formules (A) et (B). La solution causale devient alors, la convolution étant prise en espace-temps

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\tilde{\Phi} * f)(x, t) \\ &= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{|y|=s} \frac{1}{4\pi|y|} f(x-y, t-|y|) dS(y) \right\} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|y|} f(x-y, t-|y|) d\mu^{(3)}(y) \end{aligned}$$

On a donc la très belle formule :

$$\boxed{u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y, t-|y-x|)}{4\pi|x-y|} d\mu^{(3)}(y)} \quad (\text{II.18})$$

C'est une des belles formules de la physique classique. Ici, on intègre sur $|x-y| = t-s$. Ce que la source émet arrive avec un retard $t-|x-y|$ et le signal perçu est atténué, ce qui est exprimé par le facteur $\frac{1}{|x-y|}$, tandis qu'en dimension 1, le signal part soit vers la droite, soit vers la gauche, mais que les signaux perçus ont toujours pour intensité l'intensité initiale divisée par 2. On voit par ailleurs que $u(x, t)$ ne dépend que des valeurs de f sur $\partial C_-(x, t)$: c'est le principe de Huyghens fort.

La formule (A) devient alors la célèbre **formule de Kirchhoff** :

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} v_0(y) dS(y) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{|x-y|=t} u_0(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi} \int_{|x-y| \leq t} \frac{f(y, t-|x-y|)}{4\pi|x-y|} d\mu^{(3)}(y)} \quad (\text{II.19})$$

Pour $n = 2$, on a plusieurs possibilités : les fonctions de Bessel, la méthode de descente (traitée dans le livre d'Evans)...

□

Faisons un point sur le principe de Huyghens : que stipule-t-il ?

1. En toute dimension, le support singulier de $\tilde{\Phi}$ est $\partial C_+ = \{(x, |x|), x \in \mathbb{R}^n\}$. En particulier, l'opérateur des ondes $\partial_t^2 - \Delta_x$ n'est pas hypoelliptique (il propage des singularités, quand bien même la source n'aurait qu'une singularité à l'origine).

2. En dimension 1 et en toute dimension paire, le support de $\tilde{\Phi}$ est $C_+ = \{(x, t), |x| \leq t\}$.
3. En dimension impaire supérieure ou égale à 3, le support de $\tilde{\Phi}$ est ∂C_+ .

Remarquons finalement que vivre en dimension 3 est très commode : si l'on écoute un concert, le musicien étant placé à l'origine, et l'auditeur en x alors, en 2D on entendrait au temps t une moyenne pondérée de tout ce qui a été émis depuis le début du concert.

II-7. Exercices

II-7- 1. L'équation de Poisson dans \mathbb{R}^3

Soit ρ une fonction de classe C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^3 . On cherche une fonction $u(x)$ de classe C^2 sur \mathbb{R}^3 telle que

$$-\Delta u = \rho, \quad (\text{II.20})$$

sous les conditions suivantes de décroissance à l'infini :

$$x \mapsto |x| u(x) \text{ bornée}, \quad x \mapsto |x|^2 \nabla u(x) \text{ bornée}. \quad (\text{II.21})$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et calculer son Laplacien.
2. Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^3 . On note $n(x)$ le vecteur normal unitaire sortant en tout point $x \in \partial\Omega$ et $d\sigma$ la mesure surfacique sur $\partial\Omega$. On se donne deux fonctions u et v de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$. À l'aide de la formule de Stokes, démontrer la formule de Green pour le Laplacien :

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma(x).$$

3. Pour $0 < \alpha < \beta$, on définit la sphère et l'anneau suivants :

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = \alpha\}, \quad A_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^3, \alpha \leq |x| \leq \beta\}$$

Soit $0 < \varepsilon < R$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfaisant (II.21). Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, montrer l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} u(x+y) d\sigma(y) = \int_{A_{\varepsilon,R}} \frac{(-\Delta u)(x+y)}{|y|} dy + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4. Montrer que l'unique solution de (II.20), (II.21) s'écrit

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dy.$$

II-7- 2. Fonction de Green sur le demi-espace - I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $x = (\bar{x}, x_n)$ le point courant dans \mathbb{R}^n , avec $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et on note \mathbb{R}_+^n le demi-espace ouvert

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}.$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, on note $\tilde{x} = (\bar{x}, -x_n)$. Soit Φ la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans \mathbb{R}^n . Montrer que, à $x \in \mathbb{R}_+^n$ fixé, la fonction $W(y) = -\Phi(\tilde{x} - y)$ est solution de

$$\begin{aligned} -\Delta W(y) &= 0, & y \in \mathbb{R}_+^n, \\ W(y) &= -\Phi(x - y), & y \in \partial\mathbb{R}_+^n. \end{aligned}$$

2. En déduire l'expression suivante du noyau de Poisson sur \mathbb{R}_+^n :

$$K(x, y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n,$$

où S_n est la mesure de la sphère unité de \mathbb{R}^n .

3. Soit $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^n$. On admet (voir exercices additionnels pour la preuve) que la formule

$$u(x) := \frac{2x_n}{S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dy$$

définit une fonction C^∞ bornée sur \mathbb{R}_+^n , solution de l'équation de Laplace $-\Delta u = 0$ dans \mathbb{R}_+^n , vérifiant la condition au bord

$$\lim u(x) = g(x_0),$$

où $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ et la limite est prise sur les $x \in \mathbb{R}_+^n$ tendant vers x_0 . On suppose que

$$g(y) = |y|,$$

pour $|y| \leq 1$. Montrer que ∇u n'est pas bornée au voisinage de 0.

Indication : on pourra évaluer le quotient différentiel $\frac{u(te_n) - u(0)}{t}$ pour $t > 0$ petit.

II-7- 3. Principe du maximum

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta u \leq 0 \text{ dans } \Omega.$$

On veut montrer qu'on a alors

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x). \quad (\text{II.22})$$

1. On suppose dans un premier temps

$$-\Delta u < 0 \text{ dans } \Omega.$$

On suppose d'autre part que u atteint son max sur $\bar{\Omega}$ un point intérieur $x_0 \in \Omega$. Montrer que (au sens des matrices symétriques)

$$D^2u(x_0) \leq 0.$$

2. En déduire $\Delta u(x_0) \leq 0$ et une contradiction.
3. Prouver le principe du maximum dans le cas général. On pourra considérer la fonction

$$x \mapsto u(x) + \varepsilon e^{x_1}, \quad \varepsilon > 0.$$

4. Soit $w \in C^3(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ vérifiant

$$-\Delta w = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Montrer que

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla w|(x) = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla w|(x). \quad (\text{II.23})$$

Comparer au résultat de la question 3. de l'exercice 2.

II-7- 4. La formule de la moyenne et applications

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in C^2(\Omega)$ telle que $\Delta u = 0$ dans Ω . On suppose $u \geq 0$ dans Ω .

1. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ on note $B(a, R)$ la boule de centre a et de rayon R , $S(a, R)$ la sphère de centre a et de rayon R , et on rappelle que $|S(0, 1)| = N\omega_N$, où $\omega_N = |B(0, 1)|$ est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^N . Pour tout $R > 0$, on pose

$$\varphi(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs) d\sigma(s).$$

où s est le vecteur unitaire normal extérieurement à $S(0, 1)$. Vérifier que

$$\varphi(0) = u(a), \quad \varphi'(R) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} \frac{\partial u}{\partial n}(a + Rs) d\sigma(s),$$

puis, en appliquant la formule de Green à $\int_{B(a,R)} \Delta u dx$, en déduire que

$$u(a) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{S(0,1)} u(a + Rs) d\sigma(s).$$

2. En déduire que

$$u(a) = \frac{1}{R^N \omega_N} \int_{B(a,R)} u(x) dx.$$

3. Montrer l'existence de $C > 0$ indépendante de R telle que

$$\forall a \in \Omega, \quad \forall R > 0 \quad \text{tel que } \overline{B}(a, 4R) \subset \Omega, \quad \forall (x, y) \in B(a, R)^2, \quad u(x) \leq Cu(y).$$

Indication : on écrira $u(x) = \frac{1}{R^N \omega_N} \int_{B(x,R)} u dx$, et $u(y) = \frac{1}{(3R)^N \omega_N} \int_{B(y,3R)} u dx$.

4. *Application 1 : le théorème de Liouville.* Supposons $\Omega = \mathbb{R}^N$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que u est une constante, et que le résultat reste vrai si l'on ne suppose plus $u \geq 0$. Le résultat reste-t-il vrai si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$?

5. *Application 2.* Soit Ω' un ouvert connexe de \mathbb{R}^N tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer l'existence de $C(\Omega') > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega'^2, \quad u(x) \leq Cu(y).$$

II-7- 5. Fonction de Green sur le demi-espace - II

Les notations sont celles de l'exercice "Fonction de Green sur le demi-espace - I". En particulier, le noyau de Poisson $K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial \nu_y} G(x, y)$ est

$$K(x, y) = \frac{2}{S_n} \frac{x_n}{|x - y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial \mathbb{R}_+^n.$$

Soit $g: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On confond le point $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ avec le point $(y, 0) \in \partial \mathbb{R}_+^n$. On définit $u: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$u(x) := \frac{2x_n}{(n-2)S_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n$$

1. Justifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \mapsto K(x, y)$ est harmonique sur \mathbb{R}_+^n .

2. On admet la formule suivante :

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{n/2}} dr = \frac{1}{2}. \quad (\text{II.24})$$

Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(x, y) dy = 1, \quad (\text{II.25})$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$.

3. Montrer que u est bornée.

4. Justifier que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ et u harmonique dans \mathbb{R}_+^n .

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \text{ si } |y - x_0| < \delta.$$

Montrer que

$$|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon,$$

pour $x \in \mathbb{R}_+^n$ assez proche de x_0 .

Indication : on notera que

$$u(x) - g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (g(y) - g(x_0))K(x, y)dy, \quad (\text{II.26})$$

par (II.25). On pourra considérer les $x \in \mathbb{R}_+^n$ à distance au plus $\delta/2$ de x_0 et séparer le domaine d'intégration dans (II.26) en deux parties : $B(x_0, \delta)$ et $\mathbb{R}^{n-1} \setminus B(x_0, \delta)$.

6. Conclure.

7. Prouver la formule (II.24). On rappelle que $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ où Γ est la fonction Γ d'Euler.

II-7- 6. L'équation de la chaleur sur le Tore

On renvoie à la fiche de TD1, Exercice 1, pour les notations au sujet du tore \mathbb{T}^n . On renvoie au même exercice pour la résolution de l'équation de la chaleur sur \mathbb{T}^n , plus précisément du problème de Cauchy

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{T}^n, \quad (\text{II.27})$$

$$u(0) = u_0. \quad (\text{II.28})$$

1. Donner le noyau de la chaleur ψ_t sur \mathbb{T}^n en fonction du noyau Φ_t de la chaleur sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire $\psi_t: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que la solution de (II.27)-(II.28) s'écrive

$$u(t, x) = \psi_t * u_0(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \psi_t(x - y)u_0(y)dy, \quad \forall t > 0, x \in \mathbb{T}^n.$$

2. Justifier les estimations

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \leq \|u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}, \quad (\text{II.29})$$

pour tout $t \geq 0, p \in [1, +\infty]$.

II-7- 7. L'équation de la chaleur avec terme source - Résolution

Soit $T > 0, f \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ (indice b pour "borné"). Soit $\Phi_t: x \rightarrow \Phi(t, x)$ le noyau de la chaleur sur \mathbb{R}^n . On rappelle l'inégalité de Young suivante pour la convolution sur \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) :

$$\|\varphi * \theta\|_{C_b(\mathbb{R}^m)} \leq \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \|\theta\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^m)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (\text{II.30})$$

pour tout $p \in [1, +\infty]$: (II.30) contient l'assertion $\varphi * \theta \in C_b(\mathbb{R}^m)$ si $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^m)$ et $\theta \in L^{p'}(\mathbb{R}^m)$, avec borne sur les normes en jeu.

1. On pose

$$u(t) = \int_0^t f(s) * \Phi_{t-s} ds, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.31})$$

Justifier que $u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$.

Indication : on remarquera que, pour $t \in [0, T]$, en notant χ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, T]$, on peut écrire χu comme la convolution en (t, x) de $f\chi$ et $\Phi\chi$.

2. Soit $\alpha, \beta \in]0, 1[$. On suppose $f \in C_b^{1+\alpha, 2+\beta}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire : les dérivées partielles $\partial_t^k \partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m f$ existent et sont continues bornées pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $k, l, m \leq 1$ et, de surcroît, $\partial_t f$ est une fonction α -Holderienne en t , et $\partial_{x_i, x_j}^2 f$ est une fonction β -Holderienne en x : il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|\partial_t f(t, x) - \partial_t f(s, x)| \leq C|t - s|^\alpha, \quad |\partial_{x_i, x_j}^2 f(t, x) - \partial_{x_i, x_j}^2 f(t, y)| \leq C|x - y|^\beta, \quad (\text{II.32})$$

pour tout $t, s \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Soit, pour $h > 0$,

$$v_h(t) = \int_0^t \frac{f(s+h) - f(s)}{h} * \Phi_{t-s} ds, \quad v_0(t) = \int_0^t \partial_t f(s) * \Phi_{t-s} ds.$$

Montrer que v_h tend vers v_0 dans $C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

- (b) Montrer que $\partial_t u$ existe, $\partial_t u \in C_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, et

$$\partial_t u(t) = f(0) * \Phi_t + v_0(t).$$

- (c) On admet qu'on montrerait de même l'existence des dérivées partielles spatiales $\partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m u$ pour $k, l \leq 1$ et que

$$\partial_{x_i}^l \partial_{x_j}^m u(t) = \int_0^t \int_0^t \partial_t f(s) * \Phi_{t-s} ds.$$

Montrer que u vérifie

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = f(t, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0 \quad (\text{II.33})$$

$$u(t, x) \rightarrow 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \quad (\text{II.34})$$

II-7- 8. L'équation de la chaleur avec terme source - Effet régularisant

Soit $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant (II.32), et soit $u \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ définie par (II.31) la solution de (II.33)-(II.34). On rappelle qu'on note aussi

$$\Phi_t : x \mapsto \Phi(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur \mathbb{R}^n .

1. Montrer que

$$\|\Phi_t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p t^{-\frac{n}{2p}},$$

pour tout $t > 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$, où p' est l'exposant conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et C_p est une constante dépendant de p .

2. Soit $T > 0$. Montrer que si $f \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ sous la condition suivante

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 2, \quad (\text{II.35})$$

alors $u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ avec

$$\|u\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)} \leq C_T \|f\|_{L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))},$$

où la constante C_T dépend de T, r, p, n .

3. Soit $T > 0$. Montrer que si $f = \operatorname{div}_x(G)$, où les composantes $G_i \in C_b^{1,3}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, et si, pour tout i , $G_i \in L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ sous la condition suivante (dite de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin),

$$\frac{2}{r} + \frac{n}{p} < 1, \quad (\text{II.36})$$

alors $u \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ avec

$$\|u\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)} \leq C_T \|G\|_{L^r(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))},$$

où la constante C_T dépend de T, r, p, n .

II-7- 9. Inégalité de Varopoulos-Carne

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (classe de Schwarz) et $\varphi: \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à croissance au plus polynomiale en $-\infty$, on note $\varphi(\Delta)f$ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ définie par

$$\mathcal{F}[\varphi(\Delta)f](\xi) = \varphi(-|\xi|^2)\mathcal{F}f(\xi),$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $e^{t\Delta}f$?
2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Qu'est-ce que $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$?
3. En utilisant la formule de Kirchhoff, montrer que

$$\cos(t\sqrt{-\Delta})f(x) = \frac{1}{4\pi t} \int_{B(x,t)} \Delta f(y) dy + \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S(x,t)} f(y) d\sigma(y). \quad (\text{II.37})$$

4. Montrer que, si f est à support compact, alors, pour tout $t \geq 0$, $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$ est à support compact et son support est à distance au plus t du support de f . La distance entre deux ensembles E et G de \mathbb{R}^n est définie par

$$d(E, G) = \inf \{|x - y|; x \in E, y \in G\},$$

où $|\cdot|$ est la distance euclidienne sur \mathbb{R}^n .

5. Montrer la formule

$$e^{-\frac{1}{2}z^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} \cos(sz) ds, \quad z > 0.$$

On rappelle la transformée de Fourier de la Gaussienne en dimension m : $\mathcal{F}G(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, où $G(x) := \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

6. En déduire

$$e^{t\Delta/2}f = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2t}} \cos(s\sqrt{-\Delta})f ds, \quad (\text{II.38})$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

7. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ des fonctions à supports compacts, notés respectivement F et G . Montrer l'inégalité de Varopoulos-Carne :

$$\langle e^{t\Delta/2}f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi d(F, G)^2}} \exp\left(-\frac{d(F, G)^2}{2t}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \quad (\text{II.39})$$

8. Savez-vous montrer directement (II.39) à partir de l'identité

$$\langle e^{t\Delta/2} f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \iint_{F \times G} f(x)g(y) \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} dx dy ?$$

Remarque : l'inégalité de Varopoulos-Carne est vraie en toute dimension (même preuve que ci-dessus, excepté qu'on emploie la formule de représentation ad hoc pour $\cos(t\sqrt{-\Delta})f$).

II-7- 10. Propagation

1. Donner la solution fondamentale $\psi(t, x)$ de l'équation

$$\partial_t u - \Delta u = u \text{ dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

2. Montrer que l'ensemble de niveau 1

$$\{(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}; \psi(t, x) = 1\}$$

est proche (un en sens qu'on précisera) des droites de propagation

$$D_{\pm} = \{(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}; x = \pm 2t\}$$

pour t grand.

II-7- 11. Limite Hydrodynamique

Soit $N \geq 1$. Soit \mathbb{R}^N muni du produit scalaire $x \cdot y$. On note $|x|$ la norme euclidienne associée. Pour $t > 0$, $x, y, v, w \in \mathbb{R}^n$, On pose

$$D(t) = \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2t})t - (1 - e^{-t})^2 \right),$$

$$A(t, x, v) = \frac{1}{D(t)} \int_0^t |(1 - e^{-s})v - e^{-s}x|^2 ds$$

et

$$G_t(x, v; y, w) = \frac{1}{(4\pi)^N D(t)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{4} A(t, x - y - (1 - e^{-t})w, v - e^{-t}w) \right]. \quad (\text{II.40})$$

On admet⁸ que G_t fournit la solution fondamentale de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad Q(f) := \operatorname{div}_v (\nabla_v f + v f), \quad (\text{II.41})$$

au sens où, pour tout $f_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ ("in" pour "initiale"), la fonction

$$f(t, x, v) := \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n} G_t(x, v; y, w) f_{\text{in}}(y, w) dy dw$$

est l'unique fonction

$$f \in C(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)) \cap C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \quad (\text{II.42})$$

satisfaisant (II.41) dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et satisfaisant la condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f(t) - f_{\text{in}}\|_{L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} = 0. \quad (\text{II.43})$$

⁸ ce qui se montre par le calcul direct, mais c'est long, ou bien, plus directement, par l'interprétation probabiliste de l'équation (II.41)

1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f^\varepsilon(t, x, v) = f(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x, v). \quad (\text{II.44})$$

De quelle équation f^ε est-elle solution ?

2. On note \mathcal{M} (lettre \mathcal{M} pour "Maxwellienne", mais c'est aussi la gaussienne) la fonction

$$\mathcal{M}(v) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}.$$

Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{\mathbb{R}^N} G_{\varepsilon^{-2}t}(\varepsilon^{-1}x, v; \varepsilon^{-1}y, w) \mathcal{M}(w) dw = \Phi_t(x - y) \mathcal{M}(v), \quad (\text{II.45})$$

où Φ_t est le noyau de la chaleur sur \mathbb{R}^N .

3. Soit $\rho_{\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C_b(\mathbb{R}^N)$. Soit

$$f_{\text{in}}(x, v) = \rho_{\text{in}}(\varepsilon x) \mathcal{M}(v).$$

Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $x, v \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f^\varepsilon(t, x, v) = \rho(t, x) \mathcal{M}(v), \quad (\text{II.46})$$

où ρ est la solution d'un problème que l'on précisera.

Remarque : l'équation (II.41) est une équation dite cinétique. Elle résulte d'une description statistique de la matière, à une échelle intermédiaire, dite mésoscopique, entre l'échelle moléculaire (description microscopique) et l'échelle dite fluide (description macroscopique). L'équation de Boltzmann est probablement la plus célèbre des équations cinétiques. Ici, (II.41) est l'équation dite de Fokker-Planck. La limite (II.46), qui établit un lien (après remise à l'échelle) entre la description mésoscopique et la description macroscopique est un exemple de limite hydrodynamique.

III. Opérateurs différentiels-Régularité elliptique-Propagation des singularités

III-1. Définitions générales

Dans toute la suite, Ω désignera un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle **opérateur différentiel d'ordre m** un opérateur de la forme

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) D^\alpha$$

où :

- $D = \frac{1}{i} \nabla$ (le facteur renormalisant permet d'avoir des expressions plus esthétiques une fois les équations fourierisées), et donc pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$ $D^\alpha = \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.
- Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $a_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction régulière. On appelle les a_α les **coefficients de L** et on suppose qu'il existe α tel que $|\alpha| = m$ et $a_\alpha \neq 0$.

DÉFINITION III.1. Avec les notations ci-dessus, on appelle **symbole** de L la fonction $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

On appelle **symbole principal** de L la fonction $\sigma_m : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma_m(x, \xi) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega, (Lf)(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha f)(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{a_\alpha(x)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{D^\alpha f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\mu^{(n)}(\xi) \end{aligned}$$

Remarquons que cette formule permet d'associer un opérateur L à tout symbole σ non nécessairement polynômial. Il s'agit de ce que l'on appelle les opérateurs pseudo-différentiels. Par ailleurs, si L est à coefficients constants, alors $\sigma(x, \xi) = \sigma(\xi)$ avec un abus de notations et alors

$$\widehat{(Lf)}(\xi) = \sigma(\xi) \widehat{f}(\xi)$$

DÉFINITION III.2. Un opérateur différentiel L est dit :

- Elliptique en $x \in \Omega$ si pour tout $\xi \neq 0$ $\sigma_m(x, \xi) \neq 0$.
- Elliptique s'il est elliptique en tout $x \in \Omega$.
- Uniformément elliptique sur Ω si $\inf_{x \in \Omega} \inf_{\xi \in S(0,1)} \sigma_m(x, \xi) > 0$.

EXEMPLE 1. • $L = -\Delta$, de symbole principal $\sigma_2(\xi) = |\xi|^2$, est uniformément elliptique.

- $L = \partial_t - \Delta_x$ de symbole $\sigma(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = i\xi_0 + \sum_{i=1, \dots, n} |\xi_i|^2$ et de symbole principal $\sigma_2(\xi_0, \tilde{\xi}) = |\tilde{\xi}|^2$ n'est pas elliptique.
- $L = \partial_{tt} - \Delta_x$ de symbole principale $\sigma_2(\xi) = -\xi_0 + |\tilde{\xi}|^2$ n'est pas elliptique.

III-2. EDP elliptiques d'ordre 2-Existence de solutions faibles

On considère l'opérateur différentiel

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n \partial_j (a^{i,j} \partial_i u) + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$$

Cette expression est dite sous **forme divergence**. On peut le mettre sous une autre forme :

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_{i,j}^2 u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu$$

Attention, les b^i sont différents dans cette seconde expression ! On suppose que les matrices $(a^{i,j}(x))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ sont symétriques en tout $x \in \Omega$. Le symbole principal d'un tel opérateur est alors

$$\sigma_2(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \xi_i \xi_j$$

En notant $A(x) := (a^{i,j}(x))_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ on voit donc que L est elliptique si et seulement si A est définie positive ou définie négative. On suppose dans toute la suite que L est uniformément elliptique, i.e

$$\exists \theta > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \Omega, \sum_{i,j=1}^n a^{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

On fixe un tel θ . Supposons à présent que Ω est borné et régulier. Soit par exemple $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et supposons que $u \in C^2(\Omega)$ est solution du problème de Dirichlet pour L :

$$\boxed{\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}} \quad (\text{III.1})$$

Soit $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Si $v = 0$ sur $\partial\Omega$ alors, en intégrant par parties, en mettant L sous forme divergence

$$\int_{\Omega} f v d\mu^{(n)} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i v \partial_i u + c u v \right\} d\mu^{(n)}$$

On voit apparaître une forme bilinéaire, qui va nous mener sur la piste des solutions faibles :

DÉFINITION III.3. La **forme bilinéaire associée à L** est B définie sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ par

$$B(u, v) := \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_{i=1}^n b^i v \partial_i u + c u v \right\} d\mu^{(n)}$$

DÉFINITION III.4. $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite **solution faible de III.2** si

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), B(u, v) = (f|v)_{L^2(\Omega)}$$

Supposons les $a^{i,j}$, les b^i et c continus borné sur Ω . La forme bilinéaire B vérifie alors plusieurs propriétés :

PROPOSITION III.1. Il existe $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma \geq 0$ tels que :

1. B est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) : \forall u, v \in H^1(\Omega), |B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$.
2. $B + \gamma$ est coercive sur $H_0^1(\Omega) : \forall u \in H_0^1(\Omega), \beta \|u\|_{H_0^1}^2 \leq B(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2}^2$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour le premier point, les hypothèses de continuité et de bornitude des $a^{i,j}, b^i$ et de c nous permettent d'assurer l'existence de $A, B, C > 0$ telles que la première inégalité ci-dessous soit satisfaite. Alors, en utilisant la convention d'Einstein, on peut écrire la suite d'inégalités suivante : pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a, en notant $\alpha := \sup(A, B, C)$

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq A \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |\nabla v| + B \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |v| + C \int_{\Omega} |u| \cdot |v| \\ &\leq \tilde{\alpha} (\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) (\|\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\leq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne se fait en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le deuxième point est plus délicat à démontrer ; on va également faire usage de l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \geq 0, \forall \varepsilon > 0, ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

Nous aurons également à utiliser l'inégalité de Poincaré, qui stipule que dans le cas d'un ouvert Ω borné dans une direction, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Déjà, par uniforme ellipticité de l'opérateur L , on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u \partial_j u \geq \theta \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Par ailleurs,

$$\left| \int_{\Omega} b^i u \partial_i u \right| \leq B \int_{\Omega} |\nabla u| \cdot |u| \leq \frac{B^2}{2\theta} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

et

$$\left| \int_{\Omega} c u^2 \right| \leq C \int_{\Omega} |u|^2$$

Ainsi, on a l'estimation suivante, où $\gamma = \frac{B^2}{2\theta} + C$:

$$B(u, u) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2$$

Par ailleurs, par l'inégalité de Poincaré, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq D \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

où D est une constante positive. On obtient bien la coercivité voulue. □

Pour obtenir l'existence de solutions faibles, il nous suffit ensuite de mettre en branle la machine "analyse fonctionnelle" :

THÉORÈME III.1. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n et L un opérateur elliptique d'ordre 2. Alors pour tout $\mu \geq \gamma$ et tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} (L + \mu)u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

(on note le problème D_{μ}) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. La formulation faible de D_μ est

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), B_\mu(u, v) = (f|v)_{L^2}$$

où B_μ est la forme bilinéaire associée à $(L + \mu Id)$. B_μ est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Par le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H_0^1(\Omega)$ qui soit solution faible de (D_μ) .

□

REMARQUE. Dès que $\mu > \gamma$, B_μ est coercive sur tout $H^1(\Omega)$ et l'on peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram sur $H^1(\Omega)$, mais le $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), B_\mu(u, v) = (f|v)_{L^2}$$

est une solution faible d'un problème de type Neumann :

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ a^{i,j} (\partial_i u) n_j = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Que dire du μ qui intervient dans le théorème? Est-il vraiment nécessaire? La raison derrière l'introduction d'un tel $\mu \geq 0$ est que L a des valeurs propres, et qu'il se peut que $(L - \lambda)u = 0$ ait des solutions non triviales. Le μ permet d'éviter ces valeurs propres. Développons cela dans le cas où L est un opérateur symétrique, au sens suivant : l'adjoint formel L^* de L est défini comme suit :

$$L^*v = - \sum_{i,j} \partial_i (a^{i,j} \partial_j v) - \sum_i b^i \partial_i v + \left(c - \sum_i \partial_i b^i \right) v$$

La forme bilinéaire associée est alors B^* , qui vérifie

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), B^*(v, u) = B(u, v)$$

DÉFINITION III.5. L'opérateur L est dit symétrique si $L^* = L$ (ce qui implique $B^* = B$), ce qui revient à demander :

- i) $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, a^{i,j} = a^{j,i}$
- ii) $\forall i \in \mathbb{N}^n, b^i = 0$

PROPOSITION III.2. Supposons que L soit symétrique. Alors

- Il existe $\Sigma \subseteq \mathbb{R}$ au plus dénombrable tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Sigma$ le problème de Dirichlet (D_λ) admette une unique solution faible.
- En choisit une numérotation de Σ de la forme suivante : $\Sigma = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}, -\gamma < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$. En outre, les λ_k sont des valeurs propres de L , et on peut choisir les fonctions propres associées φ_k de sorte que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

Pour montrer ce résultat, qui rappelle fortement les résultats de théorie spectrale, on va passer par l'inverse de L qui sera lui borné, auto-adjoint et compact.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On a déjà démontré que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, le problème de Dirichlet (D_γ) admet une unique solution faible $u_f \in H_0^1(\Omega)$. Notons K l'opérateur défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ par $K(f) = u_f$. Alors K est un opérateur borné de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, de borne $\frac{1}{\beta}$: en effet, on a déjà vu que

$$\beta \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B_\gamma(u, u) = (f|u)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1}$$

K est un opérateur symétrique : pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$, si $u = Kf$ et si $v = Kg$, on a

$$B_\gamma(Kf, Kg) = (f|Kg)_{L^2} = B_\gamma(v, u) = (Kf|g)_{L^2}$$

Enfin, K est un opérateur compact : ceci est une conséquence du théorème de Rellich-Kondrachov (comme K est continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et que l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte, la composée de K par cette injection est compacte). Remarquons enfin que $\ker(K) = \{0\}$.

La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints assure l'existence d'une suite $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls qui tend vers 0 de valeurs propres, de fonctions propres associées $\varphi_k \in L^2(\Omega)$, et ces fonctions propres forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. En fait, comme $\text{Im}(K) \subseteq H_0^1(\Omega)$, les φ_k sont des éléments de $H_0^1(\Omega)$.

Remarquons à présent que u est une solution faible de $Lu = \lambda u + f$ si et seulement si u est une solution

faible de
$$\begin{cases} (L + \gamma)u = (\gamma + \lambda)u + f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 Ensuite, en posant $\lambda_k := -\gamma + \mu_k^{-1}$, on obtient le résultat voulu.

□

On vient de voir un exemple d'opérateur à résolvante compacte ; Dans un domaine borné, la résolvante d'un opérateur différentiel est facilement compacte (c'est un peu le même phénomène qu'avec les opérateurs intégraux). Si l'opérateur L n'est pas symétrique, ses valeurs propres peuvent être complexes (et $\Re(\lambda_k) \rightarrow +\infty$, le raisonnement tient toujours), mais il faut avoir d'autres arguments pour montrer que les φ_k forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$.

On peut montrer que λ_1 , la plus petite valeur propre de L , en est toujours une valeur propre simple et que la fonction propre associée garde un signe constant sur Ω si Ω est connexe. Par exemple, dans le cas $\Omega =]0; \pi[$ et $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\varphi_k(x) = \sin(kx)$ et on peut étudier les zéros des φ_k . Ce domaine est appelé étude des ensembles nodaux.

L'existence d'une base hilbertienne de fonctions propres de L est à la base de la méthode de séparation des variables, utilisée pour résoudre des problèmes d'évolution. Par exemple, la solution générale de $-\partial_t u = Lu$ sur Ω , $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est, formellement :

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)$$

III-3. Équations elliptiques d'ordre 2-Résultats de régularité

III-3- 1. Rappels sur les quotients différentiels

Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $V \subset\subset \Omega$ (i.e \bar{V} est compact inclus dans Ω). Soit $\delta := \text{dist}(V, \partial\Omega) > 0$. Si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, si $k \in \mathbb{N}_n$ et si $h \in \mathbb{R}$ vérifie $0 < |h| < \delta$, on définit le k -ième quotient différentiel de u sur V par

$$D_k^h u(x) := \frac{u(x + h e_k) - u(x)}{h}$$

Alors, au sens des distributions, $D_k^h u \xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_k u$. On a également la proposition suivante :

PROPOSITION III.3. Si $u \in H^1(\Omega)$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\forall h, 0 < |h| < \frac{\delta}{2}, \|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Réciproquement, si $u \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall h, 0 < |h| < \frac{\delta}{2}, \|D^h u\|_{L^2(V)} \leq C$$

alors $u \in H^1(V)$ et $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C$.

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

III-3- 2. Régularité intérieure

THÉORÈME III.2. Les coefficients de L étant supposés continus bornés et les $a^{i,j}$ étant de plus supposés appartenir à C_b^1 , si $f \in L^2(\Omega)$ et si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de $Lu = f$ alors $u \in H_{loc}^2(\Omega)$ et pour tout ouvert $V \subset\subset \Omega$, il existe $C > 0$, $C = C(\Omega, V, L)$ tel que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Avant de se lancer dans la démonstration, rappelons la formule de Leibniz pour les quotients différentiels : en notant $f^h(x) := f(x + he_k)$ on a

$$D_k^h f g = f^h D_k^h g + g D_k^h f$$

et remarquons que

$$D_k^{h*} = -D_k^{-h}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Soit $V \subset\subset \Omega$. Soit W tel que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$ et ξ une fonction de troncature lisse, $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$, $\xi \equiv 1$ sur V , $\xi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus W$.

Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution faible du problème de Dirichlet associé à L , alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u \partial_j v = \int_{\Omega} \tilde{f} v \quad (\text{III.3})$$

où $\tilde{f} = f - b^i \partial_i u - cu \in L^2$. Pour h suffisamment petit, utilisons cette identité avec $v = D_k^{h*}(\xi^2 D_k^h u)$. Pourquoi ? Parce que l'on aurait envie d'appliquer notre identité à $v = -\partial_{kk}^2 u$. Si on le fait directement, l'hypothèse d'ellipticité uniforme aurait pu nous permettre de conclure. Cependant, rien ne garantit que ces dérivées soient bien L^2 . Lançons nous dans les calculs :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} a^{i,j} \partial_i u D_k^{-h} \partial_j (\xi^2 D_k^h u) &= \int_{\Omega} D_k^h (a^{i,j} \partial_i u) \partial_j (\xi^2 D_k^h u) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ a^{i,j} D_k^h (\partial_i u) + D_k^h (a^{i,j}) \partial_i u \right\} \partial_j (\xi^2 D_k^h u) \\ &= \int_{\Omega} a^{i,j} D_k^h (\partial_i u) D_k^h (\partial_j u) \xi^2 (= A_1) \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ 2a^{i,j} D_k^h (\partial_i u) D_k^h (u) \xi \partial_j \xi + D_k^h (a^{i,j}) \partial_i u [D_k^h \partial_j u + 2\xi \partial_j \xi D_k^h u] \right\} (= A_2) \end{aligned}$$

Par uniforme ellipticité, $A_1 \geq \theta \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h \nabla u|^2$. On borne tous les autres termes brutalement :

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq C \int_{\Omega} \xi \{ |D_k^h \nabla u| \cdot |D_k^h u| + |D_k^h \nabla u| \cdot |\nabla u| + |D_k^h u| \cdot |\nabla u| \} \\ &\leq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 + \tilde{C} \int_W (|D_k^h u|^2 + |\nabla u|^2) \\ &\leq \frac{\theta}{2} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h \nabla u|^2 + \tilde{C} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \text{ par III.1} \end{aligned}$$

Ceci termine l'étude du membre de gauche de III.3. Remarquons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^2 &\leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla (\xi^2 D_k^h u)|^2 \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} \{ \xi^4 |\nabla D_k^h u|^2 + \xi^2 |D_k^h u|^2 \} \\ &\leq C_3 \int_{\Omega} \{ \xi^2 |\nabla D_k^h u|^2 + |\nabla u|^2 \} \end{aligned}$$

Le membre de droite devient donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f}v &\leq C_4 \int_{\Omega} (|f| + |\nabla u| + |u|) |v| \\ &\leq \frac{\theta}{4} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 + C_5 \int_{\Omega} (|f|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2) \end{aligned}$$

Finalement, en identifiant les deux membres :

$$\frac{\theta}{4} \int_V |D_k^h(\nabla u)|^2 \leq \frac{\theta}{4} \int_{\Omega} \xi^2 |D_k^h u|^2 \leq C_6 \int_{\Omega} (|f|^2 + |\nabla u|^2 + |u|^2)$$

Par conséquent, $\nabla u \in H^1(V)$, donc $u \in H^2(V)$ et $\|u\|_{H^2(V)} \leq C_7(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1})$: ceci découle de la proposition III.3.

□

Remarquons que le théorème implique en particulier que

$$Lu(x) = f(x)$$

pour presque tout $x \in \Omega$, et donc $Lu \in L^2(\Omega)$. Par ailleurs, on peut obtenir une régularité d'ordre plus élevé : en dérivant l'équation et en procédant par induction, on peut montrer le résultat suivant :

Si les coefficients $a^{i,j}, b^i$ et c sont dans $C^{m+1}(\Omega)$, si $f \in H^m(\Omega)$, où m est un entier naturel, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible du problème de Dirichlet associé à L , alors $u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ ne dépendant que de L, Ω et de m tel que pour tout $V \subset\subset \Omega$, on a

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(V)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

En particulier, si les coefficients de L et f sont de classe C^∞ , alors toute solution faible du problème de Dirichlet associé à L est de classe C^∞ et vérifie $Lu = f$ au sens classique. On voit donc que pour tout $V \subset\subset \Omega$, si $f \in C^\infty(V)$, alors $u \in C^\infty(V)$: L est donc un opérateur hypoelliptique.

Mais que se passe-t-il au niveau du bord de Ω ? Nous allons énoncer un théorème dont la démonstration ne sera qu'esquissée dans ces notes de cours :

THÉORÈME III.3. *Supposons que Ω soit un ouvert borné de classe C^2 de \mathbb{R}^n et soit $f \in L^2(\Omega)$. Supposons que les coefficients de L vérifient $a^{i,j} \in C^1(\Omega), b^i \in C^0(\bar{\Omega}), c \in C^0(\bar{\Omega})$. Il existe $C > 0$ tel que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution faible de*

$$Lu = f \text{ dans } \Omega, \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

alors

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Remarquons que si u est l'unique solution faible du problème, c'est-à-dire si 0 n'est pas valeur propre de L , alors

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. (Esquisse) Qu'est-ce qui coince dans la démonstration précédente? Ce sont les quotients différentiels : pour pouvoir les utiliser, il faut avoir un minimum d'espace. Dans cette preuve, afin de simplifier, on ne considérera que le cas où Ω est une demi-boule, i.e $\Omega =$

$B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^n$ (et on oublie les histoires de régularité de la frontière). Travaillons au voisinage d'un point du bord en lequel le bord est plat, disons par exemple au voisinage de l'origine. En répétant la démonstration du théorème précédent avec les quotients différentiels D_k^n , pour $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, on montre que sur $V = B(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{R}_+^n$ on a les estimées suivantes :

$$\|\partial_k \nabla u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Il nous reste donc à contrôler $\partial_n^2 u$, ce qui se fait en utilisant directement l'équation : presque partout, $Lu(x) = f(x)$, i.e

$$\mu^{(n)} - pp, \quad a^{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) = g(x)$$

où $g = -f + cu + \sum_i (b^i - \sum_j \partial_j (a^{i,j})) \partial_i u \in L^2(\Omega)$. Remarquons à présent que par uniforme ellipticité $a^{n,n}$ est uniformément minorée par $\theta > 0$. Ainsi

$$\partial_n^2 u(x) = \frac{-1}{a^{n,n}(x)} \left(\sum_{i+j < 2n} a^{i,j}(x) \partial_i \partial_j u(x) - g(x) \right)$$

Donc $\partial_n^2 u \in L^2(\Omega)$ et, qui plus est,

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

Pour passer au cas général, on redresse le bord en un bord plat, localement, et on utilise le lemme de Borel-Lebesgue. Les détails se trouvent dans le livre de Gilberg et Trudinger.

□

Remarquons que l'on peut également faire cela en régularité supérieure : si $\partial\Omega$ est de classe \mathcal{C}^{m+2} , si les coefficients de L sont de classe $\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega})$ et si $f \in H^m(\Omega)$, alors toute solution faible du problème $Lu = f$ vérifie $u \in H^{m+2}(\Omega)$ et, par ailleurs, on a l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

III-3- 3. Principes du maximum

On va voir ici que le comportement diffère de celui du laplacien ; il nous sera ici utile d'écrire l'opérateur L sous une forme non divergence :

$$L = - (a^{i,j} \partial_i \partial_j) + (b^i \partial_i) + c$$

On suppose ici encore notre opérateur uniformément elliptique, toujours avec une constante d'uniforme ellipticité $\theta > 0$. De même, Ω désigne toujours ici un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n . On va distinguer trois cas :

Le cas $c \equiv 0$ On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION III.4. *On suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ vérifie $Lu \leq 0$ dans Ω . Alors :*

- i) Principe du maximum faible : $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
- ii) Principe du maximum fort : Si u atteint son maximum en $x_0 \in \Omega$ et si Ω est connexe, alors u est constante.
- iii) Lemme de Hopf : S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que pour tout $x \in \Omega$ $u(x_0) > u(x)$, alors $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On ne fait ici qu'esquisser la preuve du principe du maximum faible (**rajouter les autres ?**) : ici, il n'y a plus la formule de la moyenne, qui nous avait tant aidé pour le principe du maximum dans le cas du laplacien. Si u atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ en $x_0 \in \Omega$, alors $H(x_0) := \text{Hess}(u)_{x_0}$ est semi-définie négative et $\nabla u(x_0) = 0$. En notant $A := (a^{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$, qui est une matrice définie positive, on a

$$Lu(x_0) = -\text{tr}(AH) = -\text{tr}\left(A^{\frac{1}{2}}HA^{\frac{1}{2}}\right) \geq 0$$

Donc si $Lu < 0$ dans Ω , u atteint son maximum sur $\partial\Omega$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire et λ doit être choisi assez grand. Dans le cas général, on applique le résultat précédent à $u^\varepsilon := u + \varepsilon a^{\lambda x_1}$ où λ et ε sont choisis de sorte que Lu^ε vérifie l'inégalité stricte. On conclut de la même manière que dans le cas du laplacien.

Le principe du maximum fort demande des modifications plus subtiles.

□

Le cas $c \geq 0$ On a la proposition suivante :

PROPOSITION III.5. *On suppose que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ vérifie $Lu \leq 0$ dans Ω . Alors :*

- i) Principe du maximum faible : $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u^+$, où $u^+ := \max(u, 0)$.
- ii) Principe du maximum fort : Si u atteint son maximum en $x_0 \in \Omega$, si ce maximum est positif ou nul et si Ω est connexe, alors u est constante.
- iii) Lemme de Hopf : S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $u(x_0) \geq 0$ et que $u(x_0) > u(x)$ pour tout $x \in \Omega$, alors $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$.

Les conditions de positivité du maximum sont essentielles : par exemple, dans le cadre unidimensionnel, disons avec $L := -\partial_{xx}^2 + 1$ sur \mathbb{R} , avec $u = -\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$, $Lu(x) = -\left(\frac{1}{3} + \frac{x^2}{3}\right) < 0$, mais le principe du maximum faible est archi-faux pour $\Omega :=]-1; 1[$ et le lemme de Hopf est faux sur $\Omega :=]0; 1[$.

Le cas $c \leq 0$ On ne peut espérer aucun principe du maximum : les termes entrent tous en compétition. Par exemple, soit $c \in \mathbb{R}_-$ tel que 0 soit valeur propre de L . Alors il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ non nul tel que $Lu = 0$, ce qui contredit le principe du maximum.

III-4. Opérateurs linéaires hyperboliques et propagation

III-4- 1. Définitions et exemples

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On considère l'opérateur différentiel d'ordre m

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) D^\alpha$$

DÉFINITION III.6. On appelle **variété caractéristique de L** le sous-ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ défini par

$$\text{Car}(L) := \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \sigma_m(x, \xi) = 0\} \quad (\text{III.4})$$

où σ_m désigne le symbole principal de L .

Par définition, L est elliptique si et seulement si $\text{Car}(L) = \Omega \times \{0\}$. En fait, $\text{Car}(L)$ est une variété projective lisse. Demander qu'un opérateur différentiel L soit hyperbolique, c'est, heuristiquement, demander que $\text{Car}(L)$ soit aussi grand que possible, comme le précise la définition suivante :

DÉFINITION III.7. Soit $\eta \in \mathbb{R}^n$ et soit $x \in \Omega$. On dit que L est **hyperbolique au point x dans la direction η** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\sigma_m(x, \eta) \neq 0$ (on dit que η n'est pas une direction caractéristique)
- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, les racines de l'équation polynômiale en λ

$$\sigma_m(x, \xi + \lambda\eta) = 0$$

sont toutes réelles.

On dit que L est **strictement hyperbolique au point x dans la direction η** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\sigma_m(x, \eta) \neq 0$
- Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ non colinéaire à η , les racines de l'équation polynômiale en λ

$$\sigma_m(x, \xi + \lambda\eta) = 0$$

sont toutes réelles et distinctes.

Remarquons que la variété caractéristique d'un opérateur hyperbolique n'est jamais triviale (c'est-à-dire qu'elle n'est jamais réduite à $\Omega \times \{0\}$). Afin d'illustrer cette définition remarquablement obscure, étudions quelques exemples :

Équation des ondes à coefficients variables : On considère, dans \mathbb{R}^{n+1} , l'opérateur différentiel

$$L := \partial_{tt}^2 - a^{i,j}(t, x)\partial_i\partial_j$$

où les $a^{i,j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sont des fonctions fixées. On note (t, x) les coordonnées en espace-temps et $(-\omega, k)$ les coordonnées en Fourier (i.e $\xi = (-\omega, k)$). Que signifierait la phrase " L est hyperbolique dans la direction du temps" (i.e dans la direction $\eta = (1, 0, \dots, 0)$)? Calculons le symbole principal de cet opérateur :

$$\sigma_2((t, x), (-\omega, k)) = -\omega^2 + a^{i,j}(t, x)k_i k_j$$

Déjà, la direction temporelle n'est pas caractéristique : en effet, on a

$$\sigma_2((t, x), \eta) = -1$$

et ce pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La deuxième condition d'hyperbolicité, il faut que pour tout $(-\omega, k)$ les racines du polynôme $\lambda \mapsto -(\omega + \lambda)^2 + a^{i,j}(t, x)k_i k_j$ soient réelles. En d'autres termes, après translations, il faut que les racines de $\lambda \mapsto -\lambda^2 + a^{i,j}(t, x)k_i k_j$. On en déduit donc que L est hyperbolique (dans la direction η) si et seulement si la matrice $A := (a^{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ est en tout point semi-définie positive, et que L est strictement hyperbolique (dans la direction η) si et seulement si la matrice A est en tout point définie positive.

Système d'équations hyperboliques : Il arrive régulièrement de tomber sur des systèmes hyperboliques d'ordre 1, c'est-à-dire que l'on ait à considérer un système d'EDP de la forme suivante :

$$L\bar{u} := \partial_t \bar{u}(t, x) + \sum_{j=1}^n A_j(t, x)\partial_j \bar{u}(t, x) = 0 \quad (\text{III.5})$$

où $\bar{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ et où les A_j sont des matrices de $M_N(\mathbb{R})$. Le symbole principal de cet opérateur est alors à valeurs matricielles :

$$\sigma_1((t, x), (-\omega, k)) = i \left\{ -\omega I_N + \sum_{j=1}^n A_j(t, x)k_j \right\} \in M_N(\mathbb{C})$$

et la variété caractéristique est alors définie par

$$\text{Car}(L) := \{((t, x), (-\omega, k)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \det(\sigma_1((t, x), (-\omega, k))) = 0\}$$

On en déduit donc que L est hyperbolique (dans la direction η) si et seulement si la matrice $A(t, x, k) := \sum_j A_j(t, x)k_j$ a toutes ses valeurs propres réelles et que L est strictement hyperbolique (dans la direction η) si et seulement si la matrice A a toutes ses valeurs propres réelles distinctes si $k \neq 0$. En particulier, L est hyperbolique si toutes les matrices $A_j(t, x)$ sont symétriques ; on parle alors de **système hyperbolique symétrique**.

III-4- 2. Exemples de solution : propagation

Ondes planes : Soit L un opérateur différentiel à coefficients constants dans \mathbb{R}^{n+1} . Par abus de notation, on notera donc $\sigma(-\omega, k)$ pour $\sigma((t, x), (-\omega, k))$. On définit alors

$$V := \{(-\omega, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \sigma(-\omega, k) = 0\}$$

Notons qu'en général $V \neq \text{Car}(L)$. Par ailleurs, si $(-\omega, k) \in V$, alors la fonction $u(t, x) := e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ est solution de $Lu = 0$. On dit que u est une onde plane de vecteur d'ondes $k \in \mathbb{R}^n$ et de pulsation ω . Si $k \neq 0$, cette onde se propage dans la direction k à la vitesse de phase $v_\varphi := \frac{\omega}{|k|}$. L'équation $\sigma(-\omega, k) = 0$ s'appelle relation de dispersion.

Maintenant, quel est le lien avec un problème de Cauchy bien posé ? Pour simplifier, supposons que L soit homogène de degré 2 et strictement hyperbolique dans la direction temporelle. Alors, si $k \neq 0$, comme $(0, k)$ n'est pas colinéaire à $\eta = (1, 0, \dots, 0)$ l'équation polynômiale en ω

$$\sigma_2(-\omega, k) = 0$$

admet deux solutions distinctes $\omega_1(k)$ et $\omega_2(k)$. Cherchons alors une solution de l'équation $Lu = 0$ sous la forme

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}} \left(a_1(k) e^{i(k \cdot x - \omega_1(k)t)} + a_2(k) e^{i(k \cdot x - \omega_2(k)t)} \right) d\mu^{(n)}(k)$$

où a_1 et a_2 sont dans la classe de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Soient $u_0, v_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On impose les conditions initiales $u(0, x) := u_0(x)$ et $\partial_t u(0, x) := v_0(x)$. En rassemblant toutes ces hypothèses, on aboutit donc au système suivant :

$$\begin{cases} a_1(k) + a_2(k) &= \hat{u}_0(k) \\ \omega_1(k)a_1(k) + \omega_2(k)a_2(k) &= i\hat{v}_0(k) \end{cases}$$

Posons alors $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1(k) & \omega_2(k) \end{pmatrix}$ Si $\det(A) \neq 0$ alors le système ci-dessus est inversible, ce qui est le cas dès que l'on a hyperbolicité stricte : en somme, demander de l'hyperbolicité, c'est demander suffisamment d'ondes planes pour les construire les solutions.

Optique géométrique : Commençons par énoncer un principe général pour les opérateurs hyperboliques à coefficients non constants : la variété caractéristique détermine la propagation des singularités de l'équation $Lu = 0$. Si l'on a des singularités, la transformée de Fourier va contenir de très grands modes. Tentons de chercher des solutions de l'équation $Lu = 0$ sous la forme

$$u(t, x) := e^{\frac{i}{\varepsilon}\psi(t, x)} A_\varepsilon(t, x) \tag{III.6}$$

où ε est un petit paramètre et où ψ et A_ε sont des fonctions régulières. Pourquoi chercher une solution sous cette forme ? Cela vient de l'optique géométrique, et de la volonté d'unifier théorie et pratique : en pratique, on voit des rayons lumineux, tandis que les équations de Maxwell font apparaître des ondes planes, mais pas des rayons lumineux. L'idée, c'est que la longueur d'onde caractéristique de la lumière est très faible ; on cherche donc une fonction fortement oscillante multipliée par une amplitude.

Choisir ψ constante n'aurait pas grand intérêt. Si ψ est linéaire, on cherche donc simplement une onde plane à haute fréquence, mais il peut parfois être utile de travailler avec une fonction ψ non linéaire. Pour se fixer les idées, soit L l'opérateur défini dans \mathbb{R}^{n+1} par

$$L := \partial_{tt}^2 - a^{i,j}(\cdot, \cdot) \partial_i \partial_j$$

qui sera de plus supposé symétrique. De ceci on tire le symbole principal de L :

$$\sigma_2((t, x), (-\omega, k)) = -\omega^2 + a^{i,j}(t, x) k_i k_j$$

Peut-on obtenir des solutions de la forme III.6? Injectons III.6 dans l'équation $Lu = 0$. On obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 A_\varepsilon + \frac{2i}{\varepsilon} (\partial_t A_\varepsilon) (\partial_t \psi) + \frac{i}{\varepsilon} A_\varepsilon \partial_{tt}^2 \psi - \frac{1}{\varepsilon^2} (\partial_t \psi)^2 A_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^n a^{i,j} \left\{ \partial_i \partial_j A_\varepsilon + \frac{2i}{\varepsilon} (\partial_i \psi) (\partial_j A_\varepsilon) \right. \\ \left. + \frac{i}{\varepsilon} A_\varepsilon (\partial_i \partial_j \psi) - \frac{1}{\varepsilon^2} A_\varepsilon (\partial_i \psi) (\partial_j \psi) \right\} \end{aligned}$$

Qu'a-t-on gagné à faire cela? Identifions à l'ordre ε^{-2} les deux expressions ci-dessus : on obtient donc l'équation suivante, dite **équation de Hamilton-Jacobi** :

$$(\partial_t \psi)^2 = a^{i,j} (\partial_i \psi) (\partial_j \psi) \quad (\text{HJ1})$$

On obtient donc une équation aux dérivées partielles pour la phase qui, certes, est du premier ordre, mais est non linéaire. En fait, dans le cadre d'un opérateur plus général, les calculs sont plus compliqués, mais l'on obtient tout de même l'équation de Hamilton-Jacobi générale :

$$\boxed{\sigma_m((t, x), (\partial_t \psi, \nabla_x \psi)) = 0} \quad (\text{HJ})$$

En d'autres termes, le gradient (en espace-temps) de la phase vérifie $\nabla_{t,x} \varphi \in \text{Car}(L)$. On aimerait bien se ramener à la méthode des caractéristiques, mais ce n'est pas si simple ; on peut néanmoins résoudre HJ localement grâce à cette méthode. Imaginons avoir mis la main sur une solution ψ ; comment en déduire A_ε ? Réécrivons notre équation en adoptant les notations suivantes :

- Opérateur de transport : $M_\psi f := (\partial_t \psi) (\partial_t f) - a^{i,j} \partial_i \psi \partial_j f$
- Opérateur de d'Alembert : $\square f := Lf$

L'équation sur A_ε devient alors

$$\square(A_\varepsilon) + \frac{2i}{\varepsilon} M_\psi(A_\varepsilon) + \frac{i}{\varepsilon} (\square \psi) A_\varepsilon = 0 \quad (\text{III.7})$$

Cette équation est linéaire en A_ε , et l'on va chercher une solution sous la forme

$$A_\varepsilon(t, x) = A_0(t, x) + \varepsilon A_1(t, x) + \varepsilon^2 A_2(t, x) + \dots$$

On en tire une hiérarchie d'équation de transport :

$$\begin{cases} 2M_\psi A_0 + (\square \psi) A_0 = 0 \\ 2M_\psi A_k + (\square \psi) A_k + \square A_{k-1} = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on pourrait utiliser, ici encore, la méthode des caractéristiques (et les caractéristiques seraient ici les mêmes que dans HJ). Il faudrait ensuite encore travailler pour montrer que l'on pourrait définir $A_\varepsilon := \sum \varepsilon^k A_k$, soit que cette méthode permet d'approcher une solution exacte.

Revenons à HJ : comment la résoudre par la méthode des caractéristiques? On peut la mettre sous la forme d'une équation eikonale, c'est-à-dire

$$\partial_t \psi = \pm (a^{i,j} \partial_i \psi \partial_j \psi)^{\frac{1}{2}}$$

Supposons, comme d'habitude, que la matrice $(a^{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ est strictement définie positive et, de plus, que les $a^{i,j}$ sont indépendants du temps. Introduisons le hamiltonien H défini sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $H(x, p) := \pm(a^{i,j} p_i p_j)^2$. L'équation de Hamilton-Jacobi prend alors la forme

$$\boxed{\partial_t \psi + H(x, \nabla_x \psi) = 0} \quad (\text{HJ}')$$

On cherche une solution vérifiant la condition initiale $\psi(0, \cdot) = \psi_0$. **faire schéma**

DÉFINITION III.8. On appelle **bicaractéristique de l'opérateur** $\partial_t + H(x, \nabla_x)$ les solutions (x, p) dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$ des équations canoniques d'Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \partial_p H(x(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\partial_x H(x(t), p(t)) \end{cases}$$

Ce sont donc les équations d'un système mécanique associé à notre hamiltonien que l'on a réussi à exprimer.

Quelles seraient les caractéristiques elles-mêmes ? Simplement la projection sur le premier facteur des bicaractéristiques. Dans le cas des équations de transport linéaire, les équations en p et x se découpleraient, et l'on n'avait donc aucun besoin de recourir aux bicaractéristiques. Notons enfin que cette construction s'adapte au cas où les $a^{i,j}$ ne sont plus autonomes, mais on aurait alors dû paramétrer le temps en fonction d'un autre paramètre s , ce qui aurait alourdi nos équations de plusieurs termes en $t^{(k)}(s)$.

PROPOSITION III.6. Soit $(x(t), p(t))$ la bicaractéristique vérifiant la condition initiale $(x(0), p(0)) = (x_0, \nabla \psi_0(x_0))$. Alors pour toute solution régulière de HJ , au voisinage du point $(0, x_0)$, on a

$$\begin{cases} \psi(t, x(t)) &= \psi_0(x_0) \\ \nabla_x \psi(t, x(t)) &= p(t) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour montrer cette proposition, on va montrer que l'application q définie par

$$q : t \mapsto \nabla_x \psi(t, x(t)) - p(t)$$

est identiquement nulle. Un calcul direct montre que q est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} q'(t) &= \partial_x H(x(t), p(t)) - \partial_x H(x(t), q(t) + p(t)) + \nabla_x^2 \psi(t, x(t)) (\partial_p H(x(t), p(t)) - \partial_p H(x(t), p(t) + q(t))) \\ q(0) &= 0 \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, q est donc identiquement nulle. Sachant cela, on calcule la quantité $\frac{d}{dt} \psi(t, x(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t, x(t)) &= \partial_t \psi(t, x(t)) + \langle \nabla_x \psi(t, x(t)) | \frac{d}{dt} x(t) \rangle \\ &= -H(x(t), \nabla_x \psi(t, x(t))) + \langle \nabla_x \psi(t, x(t)) | \frac{d}{dt} x(t) \rangle \\ &= -H(x(t), p(t)) + \langle \frac{dx}{dt}(t) | p(t) \rangle \\ &= \\ &= -H(x(t), p(t)) + \langle \partial_p H(x(t), p(t)) | p(t) \rangle \\ &= -H(x(t), p(t)) + H(x(t), p(t)) = 0 \end{aligned}$$

La dernière ligne peut sembler apparaître de manière miraculeuse ; en fait, c'est une conséquence des relations d'Euler pour les fonctions homogènes : si une fonction f est homogène de degré α , alors pour tout vecteur y on a $\langle y | \nabla f(y) \rangle = \alpha f$. On vérifie, toujours par un petit calcul, que H est homogène de degré 1 en p . Le résultat suit immédiatement.

□

On peut tenter de renverser cette proposition pour avoir, après application judicieuse d'un théorème des fonctions implicites, une résolution locale des équations de Hamilton-Jacobi. Malheureusement, cette méthode ne fonctionne pas globalement : même si les bicaractéristiques ne se croisent pas dans l'espace des phases, ils se peut qu'après projection sur la première coordonnée elles s'intersectent... On ne peut alors plus avoir de solutions régulières, puisque l'on doit alors faire face à l'apparition de caustiques ! Ceci peut motiver l'introduction des solutions entropiques.

Remarquons que dans le cas d'un opérateur à coefficients constants la relation de dispersion des ondes planes s'écrit $\omega = \pm(a^{i,j}k_i k_j)^{\frac{1}{2}}$ et que les caractéristiques sont les solutions de l'équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = v_g(k), \quad k'(t) = 0$$

où $v_g(k) := \frac{\partial \omega}{\partial k}$ est la vitesse de groupe associée au vecteur k .

Remarquons également qu'ayant construit $\psi(t, x)$ une solution non triviale, si l'on revient à l'équation de transport

$$M_\psi f = g$$

et que l'on dérive le long d'une caractéristique on obtient

$$\frac{d}{dt} f(t, x(t)) = \frac{-1}{H(x(t), p(t))} M_\psi f(t, x(t)) = \frac{-1}{H(x(t), p(t))} g(t, x(t))$$

Donc si $g \equiv 0$ f est constante. Sinon, f vérifie une équation différentielle et l'on obtient les mêmes caractéristiques que par les projections des bicaractéristiques de Hamilton-Jacobi.

III-5. Exercices

III-5- 1. Un exemple de régularité intérieure

Soit U un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N , soit $f \in L^p(U)$ où $p > N/2$ et soit $u \in H_0^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $-\Delta u \leq f$ au sens où

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v dx \leq \int_U f v dx \quad (\text{III.8})$$

pour toute fonction positive $v \in H_0^1(U)$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante $M_1 \geq 0$ telle que $u \leq M_1$ p.p. On rappelle le résultat suivant : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v \geq 0} \nabla v = \mathbf{1}_{v > 0} \nabla v$$

p.p. dans U . On rappelle⁹ aussi l'injection de Sobolev suivante : il existe une constante $C_S \geq 0$ telle que

$$\|v\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|\nabla v\|_{L^2(U)}, \quad \forall v \in H_0^1(U), \quad (\text{III.9})$$

où 2^* est n'importe quel exposant ≥ 1 si $N \leq 2$ (auquel cas C_S dépend du choix de la valeur de 2^*), $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$ si $N > 2$.

.....
Corrigé : Note : si $N \leq 2$, on fixe dans la suite $2^* > 2q$ (de sorte que l'exposant μ défini en (III.13) soit bien strictement supérieur à 1).

1. Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite strictement croissante. On note

$$u_k = (u - a_k)^+, \quad A_k = \{x \in U; u_k(x) > 0\}.$$

Montrer que

$$\int_U |\nabla u_k|^2 dx \leq \|f\|_{L^p(U)} \|u_k\|_{L^q(U)}, \quad (\text{III.10})$$

où q est l'exposant conjugué de p .

.....
Corrigé : Appliquons l'inégalité faible (III.8) à $v = u_k$. On a l'identité

$$\nabla u \cdot \nabla u_k = \mathbf{1}_{u > a_k} \nabla u \cdot \nabla u = \mathbf{1}_{u > a_k} \nabla u \cdot \mathbf{1}_{u > a_k} \nabla u = |\nabla u_k|^2$$

presque partout et

$$\int_U f u_k \leq \|f\|_{L^p(U)} \|u_k\|_{L^q(U)}$$

par l'inégalité de Holder, d'où (III.10).

2. En déduire

$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2} \|u_k\|_{L^q(U)}^{1/2}. \quad (\text{III.11})$$

.....
Corrigé : C'est une conséquence directe de l'inégalité de Sobolev (III.9) et de l'estimation (III.10).

9. qui se déduit de l'injection de Sobolev $H^1(U) \hookrightarrow L^{2^*}(U)$ et de l'inégalité de Poincaré, cf. (III.27) ci-dessous

3. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, pour tout $\beta > 0$,

$$\mathbf{1}_{A_k} \leq \frac{u_{k-1}^\beta}{(a_k - a_{k-1})^\beta}. \tag{III.12}$$

.....
Corrigé : Sur l'ensemble $u_k > 0$ (soit $\mathbf{1}_{A_k} = 1$), on a $u - a_{k-1} > a_k - a_{k-1} > 0$ donc $u_{k-1} > a_k - a_{k-1}$. Comme le ratio

$$\frac{u_{k-1}}{a_k - a_{k-1}}$$

est positif dans tous les cas, cela prouve (III.12) pour $\beta = 1$. En à levant l'inégalité à la puissance $\beta > 0$, on obtient (III.12).

4. En remarquant que $u_k \leq u_{k-1}$, montrer que

$$\|u_k\|_{L^{2^*}(U)} \leq C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2} (a_k - a_{k-1})^{-\beta} \|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}^\mu, \quad \beta := \frac{2^*}{2q} - \frac{1}{2}, \quad \mu := \frac{2^*}{2q}. \tag{III.13}$$

.....
Corrigé : On a $u_k \leq u_{k-1}$ car, à u fixé, $s \mapsto (u - s)^+$ est une application décroissante. On en déduit

$$u_k^q \leq u_k \mathbf{1}_{A_k} \leq u_{k-1}^q \mathbf{1}_{A_k} \leq \frac{u_{k-1}^{q+\beta_0}}{(a_k - a_{k-1})^{\beta_0}},$$

pour tout $\beta_0 > 0$ d'après (III.12). Choisissons $\beta_0 = q - 2^*$. Ce choix est admissible car

$$p > \frac{N}{2} \iff \frac{1}{q} > 1 - \frac{2}{N} = \frac{2}{2^*}. \tag{III.14}$$

On obtient

$$\int_U u_k^q dx \leq \frac{1}{(a_k - a_{k-1})^{q-2^*}} \int_U u_{k-1}^{2^*}$$

et

$$\|u_k\|_{L^q(U)}^{1/2} \leq (a_k - a_{k-1})^{\frac{1}{2} - \frac{2^*}{2q}} \|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}^\mu, \quad \mu := \frac{2^*}{2q}.$$

En appliquant (III.11), on obtient alors (III.13).

5. Justifier $\mu > 1$.

.....
Corrigé : c'est (III.14).

6. On prend $a_k = (1 - 2^{-k-1})M$ pour une constante $M \geq 1$ à déterminer plus tard. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de C_S , $\|f\|_{L^p(U)}$, p tel que

$$\|u_0\|_{L^{2^*}(U)} < \varepsilon \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k\|_{L^{2^*}(U)} = 0 \tag{III.15}$$

On pourra passer au log dans l'estimation (III.13).

.....
Corrigé : avec $a_k = (1 - 2^{-k-1})M$, on a $a_k - a_{k-1} = 2^{-k-1}M$, d'où

$$(a_k - a_{k-1})^{-\beta} = 2^{\beta(k+1)} M^{-\beta} \leq 2^{\beta(k+1)}, \tag{III.16}$$

car $M \geq 1$. De (III.13), on déduit l'inégalité

$$z_k \leq CA^k z_{k-1}^\mu, \quad z_k := \|u_k\|_{L^{2^*}(U)}, \quad C := 2^\beta C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2}, \quad A := 2^\beta. \quad (\text{III.17})$$

En passant au log (ce qui suppose les $z_k > 0$, mais si z_k est nul pour un certain k , on a fini, voir question suivante), on obtient

$$\log(z_k) \leq \log(C) + k \log(A) + \mu \log(z_{k-1}),$$

d'où, par récurrence,

$$\begin{aligned} \log(z_k) &\leq \mu^k \log(z_0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mu^{k-j} (\log(C) + j \log(A)) \\ &\leq \mu^k [\log(z_0) + S_0 \log(C) + S_1 \log(A)], \quad S_\alpha := \sum_{j=0}^{\infty} j^\alpha \mu^{-j}. \end{aligned}$$

Si

$$z_0 < \varepsilon := \exp [S_0 \log(C) + S_1 \log(A)] = C^{S_0} A^{S_1},$$

on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \log(z_k) = -\infty$, soit $z_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$. Noter qu'on peut calculer, avec des notations claires $S_0(\mu) = \frac{\mu}{\mu-1}$ et

$$\frac{\partial S_0(\mu)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\mu} S_1(\mu),$$

d'où $S_1(\mu) = \frac{\mu}{(\mu-1)^2}$ et

$$\varepsilon = 2^{\beta \frac{\mu}{(\mu-1)^2}} \left[2^\beta C_S \|f\|_{L^p(U)}^{1/2} \right]^{\frac{\mu}{\mu-1}}.$$

7. Si (III.15) est réalisé, qu'en déduit-on au sujet de u ?

Corrigé : Par convergence monotone, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = (u - M)^+$ dans L^{2^*} donc (III.15) signifie $u \leq M$ p.p.

8. Justifier qu'il existe un choix de M assurant $\|u_0\|_{L^{2^*}(U)} < \varepsilon$.

Corrigé : par convergence monotone,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \|u_0\|_{L^{2^*}(U)}^{2^*} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_U [(u - M/2)^+]^{2^*} dx = 0,$$

donc $\|u_0\|_{L^{2^*}(U)} < \varepsilon$ pour M assez grand.

9. Justifier rapidement que la méthode se généralise au cas de l'équation

$$\partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = f,$$

où $a_{ij} \in L^\infty(U)$, où on a utilisé la convention de sommation sur les indices répétés, et où la condition d'ellipticité suivante est satisfaite : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$, où on a de nouveau utilisé la convention de sommation sur les indices répétés.

.....
Corrigé : on a de nouveau (III.10) (avec une constante α^{-1} en plus dans le membre de droite) et le reste de la preuve est identique au cas Laplacien.

Remarque Finale : on peut être moins grossier dans le traitement du paramètre M dans les estimations ci-dessus et en déduire une estimation L^∞ dépendant précisément des données. En effet, reprenons l'inégalité (III.13) et l'identité (III.16) (le membre de gauche). On en déduit

$$\frac{\|u_k\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq 2^\beta C_S \left[\frac{\|f\|_{L^p(U)}}{M} \right]^{1/2} 2^{\beta k} \left[\frac{\|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \right]^\mu,$$

d'où

$$\frac{\|u_k\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq 2^\beta C_S 2^{\beta k} \left[\frac{\|u_{k-1}\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \right]^\mu,$$

si

$$M \geq \|f\|_{L^p(U)}. \quad (\text{III.18})$$

En mimant les calculs ci-dessus on obtient $u \leq M$ p.p. dès que

$$\frac{\|u_0\|_{L^{2^*}(U)}}{M} < \varepsilon, \quad (\text{III.19})$$

où ε ne dépend que de C_S et μ (et α dans le cas d'un opérateur $u \mapsto \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)$). D'après la question 1. et (III.18) (et l'inégalité $(u-s)^+ \leq u^+$ pour $s \geq 0$), on a

$$\frac{\|u_0\|_{L^{2^*}(U)}}{M} \leq C_S \left[\frac{\|u_0\|_{L^q(U)}}{M} \right]^{1/2} \leq C_S \left[\frac{\|u^+\|_{L^q(U)}}{M} \right]^{1/2}.$$

Par conséquent (III.19) est réalisé pour $M = K\|u^+\|_{L^q(U)}$ où la constante K (assez grande) ne dépend que de C_S et μ et à ventuellement α . Finalement, on a

$$u \leq K(\|f\|_{L^p(U)} + \|u^+\|_{L^q(U)})$$

presque partout, pour une constante K ne dépendant que de C_S , μ et α .

III-5- 2. Un contre-exemple de régularité intérieure

Soit $\rho \in]0, 1[$, soit B_ρ la boule de centre 0 de rayon ρ dans \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne $|\cdot|$ et soit

$$u(x) = \ln |\ln(r)|, \quad f(x) = \frac{1}{r^2 \ln^2(r)}, \quad r = |x|.$$

1. L'objet de cette question est de montrer que $u \in H^1(B_\rho)$ est solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ dans B_ρ .

(a) Montrer que $u \in H^1(B_\rho)$.

.....
Corrigé : la fonction u est radiale, $u(x) = U(r)$. On a $\nabla u(x) = U'(r)\frac{x}{r}$, donc

$$\|u\|_{H^1(B_\rho)}^2 = 2\pi \int_0^\rho (U(r)^2 + U'(r)^2)rdr.$$

Avec $U'(r) = \frac{1}{r \ln(r)}$, on a $\|u\|_{H^1(B_\rho)}^2 < +\infty$ par le critère de Bertrand.

(b) On admet (inégalité de Trudinger), qu'il existe des constantes positives C et α telles que

$$\forall v \in H^1(B_\rho), \int_{B_\rho} \exp \left[\alpha \frac{v(x)^2}{\|v\|_{H^1(B_\rho)}^2} \right] dx \leq C, \tag{III.20}$$

et on introduit la fonction $h(s) = e^{\alpha s^2}$. Justifier l'inégalité (h^* est la transformée dite de Fenchel-Legendre de h)

$$ps \leq h^*(p) + h(s), \quad h^*(p) := \sup_{s \in \mathbb{R}} (ps - h(s)), \tag{III.21}$$

pour tout $p, s \in \mathbb{R}$.

.....
Corrigé : l'inégalité est claire par définition de la transformée de Fenchel-Legendre h^* .

Remarque : l'inégalité (III.21) est triviale par définition de h^* , mais riche une fois qu'on calcule (ou estime comme ci-dessous) la transformée h^* . Si h est surlinéaire strictement, au sens où

$$\limsup_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{|h(s)|}{|s|} = +\infty,$$

alors le sup définissant h^* peut-être restreint à un compact. En particulier il est atteint, disons en un point s_* . On a alors

$$h^*(p) = s_*p - h(s_*), \quad h'(s_*) = p. \tag{III.22}$$

Exemple 1. Avec $h(s) = \frac{|s|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, on a $h^*(p) = \frac{|p|^\beta}{\beta}$ où β est l'exposant conjugué de α , d'où

$$ps \leq \frac{|p|^\beta}{\beta} + \frac{|s|^\alpha}{\alpha}.$$

Exemple 1. Avec $h(s) = e^s$, on a

$$h^*(p) = \begin{cases} p \ln(p) - p & \text{si } p \geq 0, \\ +\infty & \text{si } p < 0, \end{cases}$$

et

$$ps \leq e^s + p \ln(p) - p, \quad \forall s \in \mathbb{R}, p \geq 0.$$

.....
 (c) Montrer que $h^*(p) \leq Dp \ln^{1/2}(p)$ pour une certaine constante $D > 0$ pour p assez grand.

.....
Corrigé : Utilisons (III.22) : on a $h^*(p) = s(p)p - h(s(p))$, $h'(s(p)) = p$. Noter que

$$h' : s \mapsto 2\alpha s e^{\alpha s^2}$$

est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donc $p \mapsto s(p) := h'^{-1}(p)$ est bien définie. De plus $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} s(p) = \pm\infty$. Comme

$$h(s(p)) = \frac{h'(s(p))}{2\alpha s(p)} = \frac{p}{2\alpha s(p)},$$

on a $h(s(p)) = o(s(p)p)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ donc $h^*(p) \leq 2s(p)p$ pour p assez grand. D'autre part, en passant au log dans la définition de $s(p)$, on a

$$\ln(p) = \alpha s(p)^2 + \ln(s(p)) + \ln(2\alpha),$$

d'où $s(p) \sim \alpha^{-1/2} \ln^{1/2}(p)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. En particulier $s(p) \leq 2\alpha^{-1/2} \ln^{1/2}(p)$ pour p assez grand. On en déduit $h^*(p) \leq Dp \ln^{1/2}(p)$ pour p assez grand, avec ici $D = 4\alpha^{-1/2}$.

(d) Montrer que $h^* \circ f \in L^1(B_\rho)$.

.....
Corrigé : pour r petit, $f(r)$ à tant grand, on a

$$h^* \circ f(r) \leq D \frac{2(\ln(r) + \ln |\ln(r)|)^{1/2}}{r^2 \ln^2(r)},$$

et $h^* \circ f(r) \leq \frac{4D}{r^2 \ln^{3/2}(r)}$, d'où

$$\int_0^\rho h^* \circ f(r) r dr < +\infty$$

par le critère de Bertrand.

(e) En déduire $fv \in L^1(B_\rho)$ pour tout $v \in H^1(B_\rho)$.

.....
Corrigé : soit $v \in H^1(B_\rho)$. Soit $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|_{H^1(B_\rho)}}$ et $\tilde{f} = \|v\|_{H^1(B_\rho)} f$ on a

$$|fv| \leq h^* \circ \tilde{f} + h(|\tilde{v}|),$$

avec $h(|\tilde{v}|) \in L^1(B_\rho)$ par l'inégalité de Trudinger et $h^* \circ \tilde{f} \in L^1(B_\rho)$ par une adaptation immédiate de la question précédente. Par conséquent $fv \in L^1(B_\rho)$.

(f) Conclure.

.....
Corrigé : on a montré que $u \in H^1(B_\rho)$. Pour justifier que u est solution faible de $-\Delta u = f$, reste à prouver

$$\int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{B_\rho} f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(B_\rho). \tag{III.23}$$

On a $-\Delta u = f$ ponctuellement sur $B_\rho \setminus \{0\}$ par le calcul (les fonctions u et f sont régulières sur $B_\rho \setminus \{0\}$). On en déduit (III.23) pour tout $v \in H_0^1(B_\rho)$ à support dans $B_\rho \setminus \{0\}$. Si $v \in H_0^1(B_\rho)$ sans condition de support, appliquons alors (III.23) à $v\chi_\varepsilon$ où $\chi_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon^{-1}x)$, χ à tant une fonction radiale régulière croissante valant 0 sur B_1 et 1 sur l'extérieur de B_2 . On obtient

$$\int_{B_\rho} \chi_\varepsilon [\nabla u \cdot \nabla v - fv] dx = - \int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla \chi_\varepsilon v dx. \tag{III.24}$$

Le membre de gauche de (III.24) tend vers

$$\int_{B_\rho} [\nabla u \cdot \nabla v - fv] dx$$

par convergence dominée car $\chi_\varepsilon \rightarrow 1$ partout sauf en 0, donc presque partout, et le terme entre crochets est L^1 d'après les questions précédentes. Reste à montrer que le terme de droite dans (III.24) tend vers 0 avec ε . On a

$$|\nabla \chi_\varepsilon(x)| \leq \frac{\|\chi'\|_{L^\infty}}{\varepsilon} \mathbf{1}_{\varepsilon < |x| < 2\varepsilon}$$

et $|\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon \ln(2\varepsilon)}$ pour $\varepsilon < |x| < 2\varepsilon$ donc

$$\left| \int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla \chi_\varepsilon v dx \right| \leq \frac{\|\chi'\|_{L^\infty}}{\varepsilon^2 \ln(2\varepsilon)} \int_{B_\rho} \mathbf{1}_{\varepsilon < |x| < 2\varepsilon} v dx.$$

Si $v \in L^\infty$, ce qui est le cas en particulier lorsque $v \in C_c^\infty(B_\rho)$, alors

$$\left| \int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla \chi_\varepsilon v dx \right| \leq \frac{\|\chi'\|_{L^\infty} \|v\|_{L^\infty}}{\varepsilon^2 \ln(2\varepsilon)} \times 2\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} r dr = \mathcal{O}(|\ln(\varepsilon)|^{-1}),$$

d'où la convergence à zéro recherchée. Cela signifie qu'on a (III.23) pour tout $v \in C_c^\infty(B_\rho)$ (sans restriction de support près de 0 maintenant!). Soit alors, pour $v \in H_0^1(B_\rho)$, une suite (v_n) de $C_c^\infty(B_\rho)$ convergeant vers v dans $H^1(B_\rho)$. Quitte à extraire, on peut supposer aussi $v_n \rightarrow v$ presque partout avec la propriété de domination

$$|v_n| \leq \bar{v}, \quad \bar{v} \in H_0^1(B_\rho). \tag{III.25}$$

Rappelons la démonstration de ces deux derniers faits (cf. preuve de la complétude des espaces L^p , par exemple dans Rudin Analyse réelle et complexe). La suite (v_n) à tant de Cauchy dans $H_0^1(B_\rho)$, on peut extraire une sous-suite (v_{n_k}) telle que $\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\|_{H_0^1(B_\rho)} < 2^{-k}$. La série

$$v_{n_1} + \sum_{j=1}^k (v_{n_{j+1}} - v_{n_j})$$

est alors convergente p.p. sur B_ρ et (III.25) a lieu avec

$$\bar{v} = |v_{n_1}| + \sum_{j=1}^\infty |v_{n_{j+1}} - v_{n_j}|.$$

Noter qu'on utilise la propriété $w \in H^1$ implique $|w| \in H^1$ avec $\nabla|w| = \text{sgn}(w)\nabla w$, donc $\| |w| \|_{H_0^1} \leq \|w\|_{H_0^1}$.

On a l'identité faible (III.23) avec $v = v_n$ et on peut passer à la limite $n \rightarrow +\infty$. En effet

$$\int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla v_n dx \rightarrow \int_{B_\rho} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

par convergence L^2 de ∇v_n et

$$\int_{B_\rho} f v_n dx \rightarrow \int_{B_\rho} f v dx$$

par convergence dominée, car la convergence presque partout a lieu et $(f v_n)$ est dominée par $|f|\bar{v}$ qui est $L^1(B_\rho)$ d'après les questions précédentes. On en déduit la formulation faible (III.23).

2. Montrer que $f \in L^1(B_\rho)$ mais pas mieux (c'est-à-dire $f \notin L^p(B_\rho)$ si $p > 1$). Commenter vis-à-vis du résultat de l'exercice 5.1.

.....
Corrigé : par le critère de Bertrand, $f \in L^1(B_\rho)$ mais $f \notin L^p(B_\rho)$ si $p > 1$. En particulier on n'a pas $f \in L^p$ pour un $p > N/2$ ($N/2 = 1$) ici, et le résultat de régularité intérieure (estimation L^∞) de l'exercice 5.1 se trouve en défaut : u n'est pas $L^\infty(B_\rho)$ à cause de la singularité en $x = 0$.

III-5- 3. Principe du maximum faible pour les solutions faibles

Soit U un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit, avec convention de sommation sur les indices répétés, l'opérateur $Lu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u)$. Ici les coefficients a_{ij} sont des fonctions $L^\infty(U)$. On suppose l'opérateur L uniformément elliptique : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, pour presque tout $x \in U$, $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i$. On rappelle le résultat suivant : si $v \in H^1(U)$, alors $v^+ \in H^1(U)$ et

$$\nabla v^+ = \mathbf{1}_{v \geq 0} \nabla v = \mathbf{1}_{v > 0} \nabla v$$

p.p. dans U . Soit $f \in L^2(U)$ et $u \in H_0^1(U)$ satisfaisant l'inégalité $Lu \leq f$ au sens faible suivant : pour toute fonction positive $v \in H_0^1(U)$,

$$\int_U a_{ij}(x)\partial_i u(x)\partial_j v(x)dx \leq \int_U f(x)v(x)dx. \quad (\text{III.26})$$

1. En appliquant (III.26) à $v = u^+$, montrer que

$$\alpha \|\nabla u^+\|_{L^2(U)}^2 \leq \|f^+\|_{L^2(U)} \|u^+\|_{L^2(U)}.$$

.....
Corrigé : pour $v = u^+$, en utilisant $\mathbf{1}_{u \geq 0} = (\mathbf{1}_{u \geq 0})^2$, on a

$$a_{ij}\partial_i u\partial_j v = a_{ij}\partial_i u^+\partial_j u^+ \geq \alpha|\nabla u^+|^2.$$

De (III.26), on déduit donc

$$\alpha \|\nabla u^+\|_{L^2(U)}^2 \leq \int_U f u^+ dx \leq \int_U f^+ u^+ dx \leq \|f^+\|_{L^2(U)} \|u^+\|_{L^2(U)},$$

par Cauchy-Schwarz.

2. Soit C_P la constante dans l'inégalité de Poincaré

$$\forall v \in H_0^1(U), \quad \|v\|_{L^2(U)} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2(U)}. \quad (\text{III.27})$$

Montrer que

$$\|u^+\|_{L^2(U)} \leq \frac{C_P^2}{\alpha} \|f^+\|_{L^2(U)}.$$

.....
Corrigé : D'après la question 1. et l'inégalité de Poincaré (III.27),

$$\|u^+\|_{L^2(U)}^2 \leq \frac{C_P^2}{\alpha} \|f^+\|_{L^2(U)} \|u^+\|_{L^2(U)},$$

d'où le résultat.

3. En déduire : $u \in H_0^1(U)$ et $Lu \leq 0$ impliquent $u \leq 0$ p.p. dans U .

.....
Corrigé : si $f = 0$, alors la question 2. donne $u^+ = 0$ dans $L^2(U)$, soit $u \leq 0$ p.p. dans U .

III-5- 4. Une équation elliptique semi-linéaire

10

Soit U un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N . Soit, avec convention de sommation sur les indices répétés, l'opérateur $Lu = -\partial_i(a_{ij}\partial_j u)$. Ici les coefficients a_{ij} sont des fonctions $C^1(\bar{U})$. On suppose (a_{ij}) symétrique et l'opérateur L uniformément elliptique. On se donne $r > N/2$, $f \in L^r(U)$ une fonction positive non identiquement nulle, un exposant $p > 1$ et on s'intéresse à l'existence de solutions faibles à l'équation

$$Lu = f + \lambda|u|^p, \quad u \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U), \tag{III.28}$$

où λ est un paramètre positif. Noter la condition $u \in H_0^1(U)$, de sorte qu'on cherche des solutions nulles au bord de U .

1. On suppose qu'il existe $\bar{u} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$ sursolution de (III.28), *i.e.* satisfaisant $L\bar{u} \geq f + \lambda|\bar{u}|^p$ au sens faible.

- (a) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$,

$$Lu_{n+1} = f + \lambda u_n^p, \quad u_{n+1} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U) \tag{III.29}$$

Montrer par récurrence que $u_n \in L^\infty(U)$ pour tout n et que (u_n) est bien définie (on pourra appliquer le résultat de l'exercice 5.1).

.....
Corrigé : voir TD

- (b) Justifier que (u_n) est croissante (on pourra appliquer le résultat de l'exercice 5.3).

.....
Corrigé : voir TD

- (c) Justifier $u_n \leq \bar{u}$ pour tout n .

.....
Corrigé : voir TD

- (d) Montrer l'existence d'une solution à (III.28).

.....
Corrigé : voir TD

2. Soit λ_1 la première valeur propre de L et $w_1 \in H_0^1(U)$ le vecteur propre correspondant. On rappelle que w_1 ne change pas de signe sur U : quitte à changer w_1 en son opposé, on supposera $w_1 \geq 0$. Justifier que $\lambda_1 > 0$.

.....
Corrigé : on a

$$\lambda_1 \int_U w_1^2 dx = \int_U a_{ij} \partial_i w_1 \partial_j w_1 \geq \alpha \int_U |\nabla w_1|^2 dx$$

et $\|w_1\|_{L^2(U)}$ est non-nul, ainsi que $\|\nabla w_1\|_{L^2(U)}$ (sans quoi w_1 est constant donc nul car $w_1 \in H_0^1(U)$: w_1 est nul au bord de U). Par conséquent $\lambda_1 > 0$

10. Rappel : une à quation aux dérivées partielles, d'ordre deux par exemple, du type $F(D^2u, Du, u, x) = 0$, est *linéaire* si F est linéaire en ses arguments, *semi-linéaire* si F est linéaire en D^2u , à coefficients dépendants de x , *quasi-linéaire* si F est linéaire en D^2u à coefficients dépendants de x, u, Du , *complètement non-linéaire* si F est non-linéaire en D^2u

3. Montrer qu'il existe $\lambda^* > 0$ dépendant de f, λ_1, w_1 tel que l'équation (III.28) n'a pas de solution pour $\lambda > \lambda^*$. On pourra tester (III.28) contre w_1 .

.....
Corrigé : si l'équation (III.28) a une solution $u \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$, alors, en testant contre w_1 , on obtient

$$\lambda_1 \int_U u w_1 dx = \int_U f w_1 dx + \lambda \int_U u^p w_1 dx.$$

Notons (voir Exercice 3.) que $u \geq 0$ p.p. Les quantités

$$z := \int_U u w_1 dx, \quad A := \int_U f w_1 dx$$

sont donc positives ou nulles. L'inégalité de Jensen, appliquée avec la mesure

$$d\mu(x) = \left(\int_U w_1(x) dx \right)^{-1} w_1(x) dx$$

donne d'autre part

$$\int_U u^p w_1 dx \geq B z^p, \quad B := \left(\int_U w_1(x) dx \right)^{1-p}.$$

On a part conséquent

$$\lambda_1 z \geq A + \lambda B z^p.$$

Cela n'est possible que si λ est assez petit. En traçant les graphes de $z \mapsto \lambda_1 z$ et $z \mapsto A + \lambda B z^p$, on s'en aperçoit que le paramètre λ_* critique correspond au cas de tangence des deux graphes, ce qui permet de calculer λ_* ...

-
 4. On suppose $f \in L^\infty(U)$ et $a_{ij} \in C^m(\bar{U})$ pour tout $m \geq 0$. Soit $z \in H_0^1(U)$ la solution faible de $Lz = 1$. Justifier $z \in C(\bar{U})$.

.....
Corrigé : on applique les résultats de régularité du cours.

-
 5. Montrer, pour λ assez petit, l'existence d'une sur-solution $\bar{u} \in H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$ de (III.28) (on pourra chercher \bar{u} de la forme $\bar{u} = Cz$ pour $C > 0$.)

.....
Corrigé : cherchons \bar{u} de la forme $\bar{u} = Cz$ pour $C > 0$ comme suggéré. La fonction \bar{u} est dans $H_0^1(U) \cap L^{2p}(U)$ et est sur-solution si

$$C \geq \|f\|_{L^\infty(U)} + \lambda K C^p, \quad K := \int_U z^p dx.$$

Un tel C existe pour λ assez petit (situation inverse de la fin du corrigé de la question 3.)

III-5- 5. Variété caractéristique de l'équation des ondes

Soit l'équation des ondes

$$Lu \equiv \partial_t^2 u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0 \tag{III.30}$$

dans \mathbb{R}^2 .

1. Montrer que chaque composante du système suivant

$$\mathcal{L}U = \partial_t U + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_{x_1} U + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_{x_2} U = 0, \quad (\text{III.31})$$

où U est à valeurs dans \mathbb{R}^2 , est solution de (III.30).

2. Donner les symboles de L et \mathcal{L} .
3. Donner les variétés caractéristiques de L et \mathcal{L} .

III-5- 6. Variété caractéristique - Ensemble caractéristique

Soit

$$L = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \partial_{ij}^2 + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i + c$$

un opérateur différentiel d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ une hypersurface régulière (variété C^∞ de dimension $d-1$) de normale unitaire $\nu(x)$ en tout point $x \in \Gamma$. Si $x_0 \in \Gamma$, on a un système de coordonnées locales (x, t) représentant le point $x + t\nu(x)$ de \mathbb{R}^d pour x proche de x_0 et t proche de 0. On se donne un ouvert U décrit dans ces coordonnées par

$$x \in \Gamma, \quad |x - x_0| < \varepsilon, \quad -\varepsilon < t < 0.$$

On considère la possibilité de résoudre localement, soit dans U , l'équation $Lu = 0$ avec données de Cauchy

$$u = g_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g_1 \text{ sur } \Gamma \cap \bar{U}, \quad (\text{III.32})$$

où g_0, g_1 sont des fonctions régulières données.

1. Quel est le symbole principal σ_2 de L ? Quelle est la variété caractéristique $\text{Car}(L)$ de L ?
2. *Définition* : on dit que Γ est *non-caractéristique* (au voisinage de x_0) si $\nu(x) \notin \text{Car}(L)$ pour x au voisinage de x_0 .

Pour simplifier¹¹ on va considérer à partir de maintenant la géométrie plate

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^d; x_d = 0\}, \quad \nu(x) = -e_d, \quad x_0 = 0, \quad U = B_\varepsilon \cap \{x_d > 0\}.$$

Que signifie alors Γ non-caractéristique?

3. En notant $x = (\bar{x}, x_d)$ le point courant de \mathbb{R}^d , supposons qu'on cherche u solution de $Lu = 0$ vérifiant (III.32) sous forme de série

$$u(\bar{x}, x_d) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\bar{x})}{n!} x_d^n. \quad (\text{III.33})$$

Qu'est-ce que $u_n(\bar{x})$?

4. Montrer qu'on peut formellement calculer tous les $u_n(\bar{x})$ à partir des données de Cauchy (III.32) et de l'équation $Lu = 0$.

Remarque : l'existence, sous certaines conditions, de solution analytique d'EDP pour des données de Cauchy analytiques est l'objet du Théorème de Cauchy-Kowalevsky, voir Evans, PDE, chap. 4.6 de nouveau.

11. voir Evans, PDE, chap. 4.6 pour le cas général

III-5- 7. Direction hyperbolique

Cet exercice est une suite de l'exercice 5.6, qui montre que la détermination de solutions sous forme (III.33) n'est pas toujours satisfaisante. Soit $d = 2$ et

$$L = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2.$$

Soit $\Gamma = \{x_2 = 0\}$, $\nu = -e_2$.

1. Justifier que $-e_2$ est non-caractéristique (donc Γ non-caractéristique).
2. Montrer que $-e_2$ n'est pas une direction hyperbolique de L .
3. On prend

$$g_0(x_1) = a \sin(\alpha x_1), \quad g_1(x_1) = 0. \quad (\text{III.34})$$

Montrer que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 5.6 fournit la solution

$$u(x_1, x_2) = a \sin(\alpha x_1) \cosh(\alpha x_2).$$

4. Montrer, en admettant¹² que la mise en oeuvre de la méthode de l'exercice 5.6, définit une application $(g_0, g_1) \mapsto u$, que cette dernière n'est pas continue lorsqu'on considère la norme C^0 (au départ et à l'arrivée).

III-5- 8. Système strictement hyperbolique en dimension 1

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose le système différentiel $\partial_t u + A \partial_x u$ strictement hyperbolique (l'inconnue $u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$).

1. Qu'est-ce que cela signifie quant à A ?
2. Soit $a \in C^1(\mathbb{R})$. Donner la solution du problème

$$\partial_t u + A \partial_x u = 0 \text{ dans } (0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad (\text{III.35})$$

satisfaisant

$$u(0, x) = a(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (\text{III.36})$$

III-5- 9. Système hyperbolique symétrisable en dimension $d \geq 1$

Soit $n, d \geq 1$. L'entier d est la dimension d'espace, n nombre d'inconnue dans l'équation

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j u(t, x) = 0, \quad (\text{III.37})$$

où les matrices $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit, pour $s \geq 1$, la condition initiale

$$u(0, x) = a(x), \quad a \in H^s(\mathbb{R}^d)^n, \quad (\text{III.38})$$

où (rappel)

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^d); \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} < +\infty\}, \quad \|v\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|^2)^s |\hat{v}(k)|^2 dk.$$

Le propos de cet exercice est de résoudre le problème de Cauchy (III.37)-(III.38) dans H^s sous l'hypothèse que le système est *symétrisable*, é savoir : il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j = 1, \dots, d$, la matrice SA_j soit symétrique.

¹² on peut le justifier par des calculs et considérations sur les rayons de convergence de g_0 et g_1

1. Montrer que, si $u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$ satisfait (III.37)-(III.38), alors

$$\hat{u}(t, k) = e^{-itA(k)}\hat{a}(k), \quad \forall k \in \mathbb{R}^d, \quad \text{oé } A(k) := \sum_{j=1}^d k_j A_j. \quad (\text{III.39})$$

2. Montrer qu'on peut écrire $A(k) = P(k)D(k)P(k)^{-1}$ oé $D(k)$ est diagonale réelle et les matrices de passage $P(k)$ ont la propriété de bon conditionnement

$$\sup_{k \in \mathbb{R}^d} \|P(k)\| \|P(k)^{-1}\| < +\infty,$$

pour une norme matricielle $\|\cdot\|$ donnée. On pourra introduire la racine carrée R de S^{-1} .

3. En déduire la borne

$$\sup_{k \in \mathbb{R}^d} \|e^{iA(k)}\| < +\infty. \quad (\text{III.40})$$

4. Définir une application $S(t): a \mapsto u(t)$ de $H^s(\mathbb{R}^d)^n$ dans lui-même donnant la solution

$$u \in C(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1(\mathbb{R}_+; H^{s-1}(\mathbb{R}^d)^n)$$

de (III.37)-(III.38).

5. Montrer que $S(t)$ préserve la norme L^2 .

Remarque 1 : en introduisant la notion de solution faible (ou solution "au sens des distributions"), on pourrait résoudre (III.37)-(III.38) dans H^s pour tout $s \in \mathbb{R}$, en particulier, pour $s = 0$, dans L^2 . Une autre manière, un peu plus abstraite, de résoudre dans L^2 , est d'étendre par densité l'opérateur $S(t): H^1 \subset L^2 \rightarrow H^1 \subset L^2$ en utilisant la dernière question.

Remarque 2 : on peut montrer l'existence d'un cône de dépendance des solutions, Voir *Multi-dimensional Hyperbolic PDE*, Sylvie Benzoni-Gavage, Denis Serre, chapitre 1.3.1

III-5- 10. Équation de Hamilton-Jacobi et propagation

Soit $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x, t) \mapsto u(x, t; p) := px - H(p)t$$

est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t u + H(\partial_x u) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times]0, +\infty[. \quad (\text{III.41})$$

2. On suppose H de classe C^2 et uniformément convexe : $H'' \geq \alpha > 0$ sur \mathbb{R} . On introduit la transformé de Fenchel-Legendre

$$L(y) = \sup_{p \in \mathbb{R}} (py - H(p)).$$

Montrer que L est bien définie, de classe C^1 sur \mathbb{R} , avec $L' = H'^{(-1)}$.

3. Soit

$$v(x, t) := \sup_{p \in \mathbb{R}} u(x, t; p).$$

Exprimer v en fonction de L et montrer que v est elle aussi solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (III.41).

4. Cas $H(p) = \frac{1}{2}p^2$. Quelle est la donnée initiale associée à v ?
 5. Cas $H(p) = \frac{1}{2}p^2$. A quelle vitesse se déplacent les ensembles de niveau de v ?
 6. Cas $H(p) = \frac{1}{2}p^2$. Calculer L, v . Représenter graphiquement $x \mapsto v(x, 1)$ et $x \mapsto u(x, 1; p)$ pour quelques valeurs de p . Qu'est-ce que le graphe de $v(\cdot, 1)$ par rapport aux droites $x \mapsto u(x, 1; p)$?

III-5- 11. Propagation et équation de Hamilton-Jacobi

Soit $d \geq 1$, soit \mathbb{R}^d muni du produit scalaire euclidien $(x, y) \mapsto x \cdot y$ et de la norme associée $x \mapsto |x|$. On note B la boule unité fermée de \mathbb{R}^d . Soit M une fonction continue strictement positive sur B d'intégrale 1.

1. L'objet de cette première question est l'étude de la fonction $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie de manière implicite par l'équation

$$\int_B \frac{M(v)}{1 + H(p) - v \cdot p} dv = 1. \quad (\text{III.42})$$

- (a) Soit $p \in \mathbb{R}^d$ fixé. Justifier rapidement que

$$F: (h, p) \rightarrow \int_B \frac{M(v)}{1 + h - v \cdot p} dv$$

est bien définie, régulière, sur l'ouvert $\{(h, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; 1 + h > |p|\}$ et que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F(h, p) = 0, \quad \lim_{h \rightarrow |p|-1} F(h, p) = +\infty.$$

- (b) Montrer l'existence d'un unique $H(p) > |p|$ tel que $F(H(p), p) = 1$.

- (c) Justifier que H est de classe C^∞ .

- (d) Montrer que H est convexe.

2. Soit L l'opérateur $L^1(B) \rightarrow L^1(B)$ défini par

$$Lf(v) = \rho M(v) - f(v), \quad \rho := \int_B f(v) dv.$$

Justifier que L est un opérateur borné. Calculer e^{tL} et, en particulier, pour $f \in L^1(B)$, la limite $e^{tL}f$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

3. Soit $\varepsilon > 0$ et soit une solution régulière et positive $f^\varepsilon(t, x, v)$ de l'équation

$$\partial_t f^\varepsilon + v \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} Lf^\varepsilon. \quad (\text{III.43})$$

Ici $x \in \mathbb{T}^d$, le tore de dimension d .

- (a) Représenter pour ε petit l'évolution du graphe $(x, v) \mapsto f^\varepsilon(t, x, v)$ pour une donnée initiale de la forme

$$f^\varepsilon(0, x, v) = \exp\left[-\frac{\varphi_0(x)}{\varepsilon}\right] M(v), \quad (\text{III.44})$$

où φ est une fonction régulière positive sur \mathbb{T}^d . On se placera dans le cas $d = 1$.

- (b) On revient au cas $d \geq 1$ en considérant encore des données initiales de la forme (III.44). Pour décrire le phénomène de propagation observé dans la question précédente, on cherche f^ε sous la forme

$$f^\varepsilon(t, x, v) = \exp\left[-\frac{\varphi^\varepsilon(t, x, v)}{\varepsilon}\right] M(v). \quad (\text{III.45})$$

Ecrire l'équation vérifiée par φ^ε .

- (c) On suppose que

$$\varphi^\varepsilon(t, x, v) = \psi(t, x) + \varepsilon \eta^\varepsilon(t, x, v)$$

où ψ est régulière et η^ε est régulière, bornée avec ses dérivées bornées uniformément en ε . Montrer que ψ est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \psi + H(\nabla_x \psi) = 0, \quad (\text{III.46})$$

où H est défini par (III.42).

Remarque : cet exercice est tiré de l'article *E. Bouin, V. Calvez, A kinetic eikonal equation, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (2012)*.

IV. Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés

IV-1. Premières notions

Cette théorie, développée dans les années 40, permet de résoudre une grande classe d'équations aux dérivées partielles, sous l'hypothèse que ces équations soient linéaires et autonomes (i.e les coefficients ne dépendent pas du temps). Faisons quelques rappels sur l'exponentielle d'opérateurs linéaires bornés : si X est un espace de Banach, réel ou complexe (typiquement, X sera un espace fonctionnel où les solutions $u(t, \cdot)$ résident pour tout temps t fixé), si $A \in \mathcal{L}(X)$ est une application linéaire continue, on note $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} := \sup_{\|u\|=1} \|Au\|_X$ sa norme d'opérateur. On peut alors définir son exponentielle

$$e^A := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

car $\mathcal{L}(X)$ est une algèbre de Banach. On définit alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ou même $t \in \mathbb{C}$)

$$S(t) := e^{tA} \tag{IV.1}$$

On a alors les propriétés suivantes :

1. $S(0) = 1_{\mathcal{L}(X)}$
2. Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dt}S(t) = S(t)A = AS(t)$

Ainsi, l'application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ définie par $\psi(t) := S(t)$ est un morphisme de groupes. Le point essentiel est ici que pour tout $u_0 \in X$, l'application $u : [0; +\infty[\rightarrow X$ définie par

$$u(t) = S(t)u_0$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} u'(t) &= Au(t), t \geq 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}} \tag{IV.2}$$

L'idée serait de définir e^{tA} pour une classe d'opérateurs non nécessairement bornés, par exemple pour $A = \Delta_x$, car on pourrait alors avoir accès à la solution de l'équation de la chaleur. La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires permet de faire ceci dans une certaine mesure. Par exemple, pour Δ_x , on serait tenté de définir $e^{t\Delta_x}$ par $u(t, \cdot)$ où u est une solution de l'équation de la chaleur. On travaille à la résolution d'équations sur un demi-axe temporel.

DÉFINITION IV.1. Une famille $(S(t))_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés (pour tout $t \geq 0$, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$) est appelée **semi-groupe fortement continu**, que l'on abrège en **semi-groupe C_0** , si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- $S(0) = 1_{\mathcal{L}(X)}$
- Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$
- Pour tout $u_0 \in X$ l'application $t \mapsto S(t)u_0$ est continue de $[0; +\infty[$ dans X (on parle de **continuité forte**).

La troisième condition est équivalente à "pour tout $u_0 \in X$, $S(t)u_0 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} u_0$ ". On peut de même parler d'un groupe C_0 indexé par \mathbb{R} , auquel cas les éléments de $S = (S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sont tous inversibles, et on parle alors de groupe fortement continu.

LEMME IV.1. Si $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu, il existe $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. On utilise le théorème de Banach Steinhaus : la troisième condition implique alors qu'il existe $M \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall t \in [0; \varepsilon], \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

En effet, il existe sinon une suite t_n tendant vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq n$. Or le théorème de Banach-Steinhaus, qui implique que

$$\forall u_0 \in X, \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S(t_n)u_0\| \leq +\infty$$

Si $t \geq \varepsilon$, on décompose t en $t = n\varepsilon + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0; \varepsilon[$. Alors on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &\leq \|S(n\varepsilon)\| \cdot \|S(\delta)\| \\ &\leq M \|S(\varepsilon)\|^n \\ &\leq M^{1+\frac{t}{\varepsilon}} \\ &\leq Me^{\omega t} \end{aligned}$$

où $\omega := \frac{1}{\varepsilon} \log(M)$.

□

Faisons quelques rappels sur les opérateurs linéaires non bornés : X désignant toujours un espace de Banach, on appelle opérateur linéaire dans X une application linéaire $A : D(A) \rightarrow X$, où $D(A)$ est un sous-espace vectoriel de X . On l'appelle **domaine de l'opérateur** A .

DÉFINITION IV.2. On dit que A est **borné** si

$$\sup_{u \in D(A), u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} < +\infty$$

Dans le cas où A est borné, A est lipschitz, et, par les résultats d'extensions, on peut supposer (quitte à remplacer $D(A)$ par $\overline{D(A)}$) que $D(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé de X .

Pourquoi considérer des applications définies sur des sous-espaces ? Parce que typiquement, nos opérateurs différentiels seront définis sur des sous-espaces vectoriels : par exemple, on prendra $L : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Avoir un opérateur borné correspond à la situation parfaite ; malheureusement, ce n'est pas toujours possible, et l'on doit affaiblir nos demandes ; la notion pertinente de substitution est celle d'opérateur fermé :

DÉFINITION IV.3. On dit qu'un opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est fermé s'il possède la propriété suivante : pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)^\mathbb{N}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \in X$ et telle que $Au_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} v \in X$ on a $u \in D(A)$ et $Au = v$.

En d'autres termes, A est un opérateur fermé si et seulement si son graphe $G(A) := \{(x, Ax), x \in D(A)\}$ est un sous-espace fermé de $X \times X$. Il est immédiat qu'un opérateur borné est fermé par la remarque précédente si son domaine est fermé, mais la réciproque n'est pas vraie : considérons par exemple $X := \{f \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{R})\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit A l'opérateur de dérivation de

$D(A) := \mathcal{C}^1([0; 1]; \mathbb{R})$ dans X . Montrons que A est fermé mais non borné : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightarrow v \in X$ et telle que $u'_n \rightarrow v \in X$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0; 1]$ on a

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(y) dy$$

En appliquant le théorème de convergence dominée (ou même un théorème plus faible, la convergence étant uniforme) on obtient

$$u(x) = u(0) + \int_0^x v(y) dy$$

en vertu de quoi u est dérivable de dérivée v . Par ailleurs, A n'est pas borné : si on considère l'application $u_n : x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$ on voit que la suite u_n est bornée en norme $\|\cdot\|_{\infty}$ mais que $\|u'_n\|_{\infty} = n$. On en vient à notre définition essentielle de générateur d'un semi-groupe :

DÉFINITION IV.4. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 . On appelle **générateur infinitésimal** de ce semi-groupe l'opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ défini par

- $D(A) = \{u \in X, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe dans } X\}$
- Pour tout $u \in D(A)$, $Au := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}$

Une question qu'il est alors naturel de se poser est de savoir si $D(A)$ est réduit à 0 ou non. La proposition suivante permet de clarifier la situation :

PROPOSITION IV.1. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 de générateur infinitésimal A . Alors :

- i) A est fermé et $\overline{D(A)} = X$
- ii) Pour tout $u \in X$ et pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t S(\tau)u d\tau \in D(A)$, où l'intégrale est simplement une intégrale d'une fonction continue à valeurs dans un Banach, et $A(\int_0^t S(\tau)u d\tau) = S(t)u - u$
- iii) Pour tout $u_0 \in D(A)$, pour tout $t \geq 0$, $S(t)u_0 \in D(A)$ et $t \mapsto S(t)u_0 \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[; X)$. De plus, pour tout $t \geq 0$, $\frac{d}{dt}(S(t)u_0) = AS(t)u_0 = S(t)Au_0$.
- iv) Si $(S_1(t))_{t \geq 0}$ et $(S_2(t))_{t \geq 0}$ sont deux semi-groupes C_0 de même générateur infinitésimal A alors pour tout $t \geq 0$ $S_1(t) = S_2(t)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour le point ii), soit $u \in X$ et soit $t \geq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} \frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} \int_0^t S(\tau)u d\tau &= \int_0^t \frac{S(\tau + \varepsilon) - S(\tau)}{\varepsilon} u d\tau \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} \frac{S(\tau)u}{\varepsilon} d\tau - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} S(\tau)u d\tau \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S(t)u - u \end{aligned}$$

Pour le point suivant, à savoir iii), considérons $u_0 \in D(A)$, $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} (S(t)u_0) = S(t) \frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} u_0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S(t)Au_0$$

En particulier, un semi-groupe commute avec son générateur.

Or

$$\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} S(t)u_0 = \frac{S(t + \varepsilon) - S(t)}{\varepsilon} u_0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S(t)Au_0$$

Donc $t \mapsto S(t)u_0$ est dérivable à droite en tout point $t \in [0; +\infty[$ de dérivée $S(t)u_0$.

Pour i), la densité de $D(A)$ dans X n'est pas excessivement difficile : soit en effet $u \in X$. Alors par

ii) pour tout $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon S(t)u dt \in D(A)$ et tend vers u quand ε tend vers 0^+ . Ainsi $\overline{D(A)} = X$.
 Pour montrer que A est un opérateur fermé, fixons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $D(A)$ telle que $u_n \xrightarrow{X} u$ et telle que $Au_n \xrightarrow{X} v$. Utilisons *iii*) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$ $\int_0^t S(\tau)Au_n d\tau + u_n = S(t)u_n = \frac{d}{dt} S(t)u_n$, et $S(t)u_n - u_n \rightarrow S(t)u - u$ donc

$$\begin{aligned} S(t)u - u &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t S(\tau)Au_n d\tau \right) \\ &= \int_0^t S(\tau)v d\tau \end{aligned}$$

Ainsi $u \in D(A)$ et $\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)v d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} v$. Ceci termine la démonstration de *i*).

Pour montrer *iv*), il va falloir ruser : soit $u_0 \in D(A)$ et $t \geq 0$. Considérons l'application $v : [0; t] \rightarrow X$ définie par

$$v(\tau) := S_1(t - \tau)S_2(\tau)u_0$$

Dérivons v : si $\tau \in [0; t[$ et si ε est suffisamment petit, alors

$$\begin{aligned} v(\tau + \varepsilon) - v(\tau) &= S_1(t - \tau - \varepsilon)S_2(\tau + \varepsilon)u_0 - S_1(t - \tau)S_2(\tau)u_0 \\ &= S_1(t - \tau - \varepsilon)(S_2(\varepsilon) - S_1(\varepsilon))S_2(\tau)u_0 \\ &= o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Comment justifier cette dernière égalité ? En remarquant que $S_j(\varepsilon)S_2(\tau)u_0 = S_2(u_0) + \varepsilon AS_2(\tau)u_0 + o(\varepsilon)$, où $j \in \{1; 2\}$, par un petit développement limité. En particulier, v est constante. Par continuité, on conclut que $S_1 = S_2$ sur $D(A)$. Par densité de $D(A)$ dans X , les deux semi-groupes sont égaux sur tout l'espace X . □

IV-2. Deux exemples

Donnons à présent quelques exemples :

IV-2- 1. Semi-groupe des translations

Soit $X := L^1([0; 1])$. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ la famille d'opérateurs dans X définis par

$$\forall u \in X, \forall x \in [0; 1], S(t)u(x) := u(x + t)\chi_{x+t \leq 1}$$

Il s'agit d'un semi-groupe C_0 dans X , de générateur infinitésimal $Au := u'$ défini sur $D(A)$ l'ensemble des applications absolument continues nulles en 1. Rappelons qu'une application absolument continue de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} est une application u telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_n < y_n \leq 1, \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(y_i)| \leq \varepsilon$$

PROPOSITION IV.2. *u est absolument continue sur $[0; 1]$ si et seulement si pour presque tout $x \in]0; 1[$ u est dérivable en x de dérivée $u' \in L^1([0; 1])$ et*

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'$$

pour tout $x \in [0; 1]$. De façon équivalente, u est absolument continue si et seulement si elle envoie les ensembles de mesure nulle sur les ensembles de mesure nulle.

On se reportera au chapitre 7 du Rudin (*Real and Complex Analysis*) pour plus d'informations à ce sujet. L'exercice est assez instructif. On admet que ce semi-groupe est C_0 (ce qui est en fait plutôt délicat à montrer ! Il faut utiliser des propriétés de régularité de la mesure de Lebesgue, par exemple). Montrons que son générateur est bien celui qui a été annoncé.

Supposons déjà que u est absolument continue et que $u(1) = 0$. Alors pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$u(x) = - \int_1^x u'(y) dy$$

Pour tout $t > 0$, on a donc, en prolongeant u' par 0, la relation suivante :

$$\frac{S(t)u(x) - u(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_x^{x+t} u'(y) dy$$

En particulier, on a la suite d'estimations suivante :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t)u - u}{t} - u' \right\|_{L^1([0;1])} &\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 |u'(x+tz) - u'(x)| dz \right\} dx \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\left\{ \int_0^1 |u'(x+tz) - u'(x)| dx \right\}}_{\xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0}: \text{continuité de la translation dans } L^1([0;1])} dz \end{aligned}$$

Par convergence dominée, la terme de gauche dans l'inégalité tend vers 0. Ceci montre que $u \in D(A)$ et que $Au = u'$. La deuxième partie est quant à elle beaucoup plus délicate : si $u \in D(A)$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0; 1[)$ et pour tout t suffisamment petit on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{S(t) - Id}{t} u(x) \varphi(x) dx &= \int_0^1 \frac{u(t+x) - u(x)}{t} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 u(x) \left(\frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{t} \right) dx \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 \frac{S(t) - Id}{t} u(x) \varphi(x) dx \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0} \int_0^1 Au(x) \varphi(x) dx$$

et

$$\int_0^1 u(x) \left(\frac{\varphi(x-t) - \varphi(x)}{t} \right) dx \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0} - \int_0^1 u(x) \varphi'(x) dx$$

Ainsi, la dérivée de u au sens des distributions sur $]0; 1[$ est Au , et donc

$$u(x) = - \int_x^1 Au(y) dy + C$$

Il faut donc montrer que $C = 0$. Mais cela résultera du fait que si $C \neq 0$ alors $C \notin D(A)$: en effet, pour tout $x \in]0; 1[$

$$\frac{S(t)C - C}{t}(x) = \frac{-C}{t} \chi_{]1-t; 1[}(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{0} -C\delta_1$$

où la convergence est prise au sens des distributions.

IV-2- 2. Semi-groupe de la chaleur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

Ici, $X = L^2(\mathbb{R}^n)$. On considère le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$\forall t \geq 0, \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n, S(t)u(x) := \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{z^2}{4t}} u(x + \sqrt{t}z) d\mu^{(n)}(z)$$

Cet expression définit effectivement un semi-groupe C_0 de générateur A défini par

- $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$
- $Au = \Delta u$

Pour voir cela, on va travailler en Fourier (qui est un des grands intérêts de $L^2(\mathbb{R}^n)$) : en transformée de Fourier, $(S(t))_{t \geq 0}$ est défini par

$$\widehat{S(t)u}(\xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi)$$

En utilisant de la convergence dominée, on voit donc qu'il s'agit d'un semi-groupe fortement continu. Pour déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe, considérons tout d'abord $u \in D(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} \underbrace{\|Au\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}_{< +\infty} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \frac{S(t)u - u}{t} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1 - e^{-|\xi|^2 t}}{t|\xi|^2} \right|^2 |\xi|^4 |\hat{u}(\xi)|^2 d\mu^{(n)}(\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\hat{u}(\xi)|^2 d\mu^{(n)}(\xi) \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient par application du lemme de Beppo-Levi. Par caractérisation des espace de Sobolev *via* la transformée de Fourier, on en déduit que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Réciproquement, soit $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui est équivalent à dire que $\xi \mapsto |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On a alors

$$\frac{\widehat{S(t)u} - \hat{u}}{t}(\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \int_0^1 (1 - e^{-|\xi|^2 ts}) ds$$

De ceci on tire facilement

$$\left\| \frac{S(t)u - u}{t} - \Delta u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^4 |\hat{u}(\xi)|^2 \left| \int_0^1 (1 - e^{-|\xi|^2 ts}) ds \right|^2 d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

ce qui permet de montrer que $u \in D(A)$ et que $Au = \Delta u$.

IV-3. Le théorème de Hille-Yosida

IV-3- 1. Ensemble résolvant et spectre

Soit X un espace de Banach complexe et $A : D(A) \rightarrow X$ un opérateur linéaire fermé. On suppose ici que $\dim(X) \neq 0$, ce qui, convenons-en, n'est guère restrictif.

DÉFINITION IV.5. On appelle **ensemble résolvant** de A et on note $\rho(A)$ le sous-ensemble de \mathbb{C} défini par

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda Id - A) : D(A) \rightarrow X \text{ est bijectif et } (\lambda Id - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\} \quad (\text{IV.3})$$

On appelle **spectre de A** et on note $\sigma(A)$ le sous-ensemble de \mathbb{C} défini par

$$\sigma(A) := \rho(A)^c \quad (\text{IV.4})$$

Remarquons que si A n'est pas fermé alors $\rho(A) = \emptyset$. Par ailleurs, si A est fermé et si $\lambda - A : D(A) \rightarrow X$ est bijectif, alors $\lambda \in \rho(A)$ par le théorème de l'application ouverte. Attention néanmoins : $\sigma(A)$ ne se réduit pas aux valeurs propres de A , même pas dans le cas des opérateurs compacts¹³, qui sont

13. Un opérateur compact peut ne pas avoir de valeurs propres : c'est le cas de $Ku(x) = \int_x^1 e^{x-y} u(y) dy$ pris sur l'ensemble des u absolument continus sur $[0; 1]$ et qui s'annulent en 0.

pourtant à mi-chemin entre dimension finie et dimension infinie. On calculera dans peu de temps l'ensemble résolvant associé aux générateurs des deux semi-groupes étudiés précédemment.

Par ailleurs, si A est un opérateur borné, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$, où $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ est le rayon spectral de A , et cette inclusion est optimale : il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $|\lambda| = R$.

Si $\lambda > R$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et $(\lambda - A)^{-1}$ est donné par la série de Neumann :

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad (\text{IV.5})$$

En particulier, $Id - A$ est inversible si $R < 1$, donc par exemple si $\|A\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

Revenons au cas général : $\rho(A)$ est ouvert, et donc $\sigma(A)$ est fermé ; ceci vient d'un résultat de perturbation : si $\lambda \in \rho(A)$, alors pour tout μ on a

$$\lambda + \mu - A = (Id + \mu(\lambda - A)^{-1})(\lambda - A)$$

et donc si

$$|\mu| \cdot \|(\lambda - A)^{-1}\| < 1$$

$\lambda + \mu - A$ est inversible.

Enfin, avant de passer à des exemples, mentionnons l'identité fondamentale suivante :

$$\text{Si } \lambda, \mu \in \rho(A), \text{ alors } (\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \quad (\text{IV.6})$$

On l'appelle équation résolvante. En particulier, les résolvantes (i.e les $(\mu - A)^{-1}$) en des points différents commutent, et la résolvante est différentiable en le paramètre λ .

Revenons sur nos exemples :

L'opérateur de translation On trouve $\sigma(A) = \emptyset$. Pour cela, travaillons sur la résolvante : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $v \in X$, l'équation $(\lambda - A)u = v$ équivaut à $\lambda u - u' = v$, $u(1) = 0$, et cette équation possède une unique solution

$$u(x) = \int_x^1 e^{\lambda(x-y)} v(y) dy$$

qui vérifie

$$\|u\|_{L^1} \leq C(\lambda) \|v\|_{L^1}, \quad C(\lambda) < +\infty$$

et donc $\lambda \in \rho(A)$.

Le semi-groupe de la chaleur Pour ce semi-groupe, l'étude est un peu plus délicate. Mais nous allons montrer que

$$\sigma(A) =]-\infty; 0]$$

Pour cela, on procède par double inclusion :

Si $\lambda \notin \mathbb{R}_-$, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$, l'équation $(\lambda - A)u = v$, $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ possède une unique solution, pour voir cela, il faut travailler en Fourier, et on voit que

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\lambda + |\xi|^2} \hat{v}(\xi)$$

et le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, le dénominateur est minoré par $\text{dist}(\lambda, \mathbb{R}_-)$, et

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \mathbb{R}_-)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

donc $\lambda \in \rho(A)$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}_-$, soit $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda + |\xi_0|^2 = 0$. Considérons la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ par

$$\hat{u}_k(\xi) := k^{\frac{n}{2}} \chi(k(\xi - \xi_0))$$

où χ est une fonction C^∞ à support compact. Alors $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \neq 0$$

Par ailleurs, la formule de Plancherel donne également

$$\|(\lambda - \Delta)u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 - |\xi_0|^2)^2 k^n |\chi(k(\xi - \xi_0))|^2 d\mu^{(n)}(\xi)$$

et ce quantité tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Donc $] -\infty; 0] \subseteq \sigma(A)$.

IV-3- 2. Théorèmes de représentation

Ici, X désigne toujours un espace de Banach complexe. La question qui nous intéresse à présent est celle de savoir à quelle condition un opérateur fermé dans X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 . Définissons une classe en apparence plus restrictive de semi-groupes (en fait, on peut toujours y ramener le cas général) :

DÉFINITION IV.6. Soit $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 . On dit qu'il s'agit d'un **semi-groupe de contractions** si

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

Le théorème suivant, de Hille-Yosida, répond alors à la question posée :

THÉORÈME IV.1. Un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ est le générateur d'un semi-groupe C_0 de contractions si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. A est fermé et $\overline{D(A)} = X$ (on dit que A est densément défini).
2. L'ensemble résolvant de A contient la demi-droite $]0; +\infty[$ et on a

$$\forall \lambda > 0, \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

La preuve de ce théorème est longue ; nous allons pour plus de clarté faire ressortir les étapes majeures :

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

Les conditions sont nécessaires : On a déjà vu que si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 de contractions, alors il est fermé et densément défini. Pour montrer le deuxième point, le procédé est assez intéressant : pour tout $\lambda > 0$, pour tout $u \in X$, on construit la quantité (qui sera, *in fine*, la résolvante)

$$R(\lambda)u := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)u dt \tag{IV.7}$$

Comme $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe C_0 de contractions, il est assez clair que l'intégrale converge. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \|R(\lambda)u\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \|S(t)u\| dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|u\| \end{aligned}$$

et ainsi $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$

Par ailleurs, pour tout $u \in X$, $R(\lambda)u \in D(A)$: en effet, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\begin{aligned} S(\varepsilon)R(\lambda)u &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t + \varepsilon)u dt \\ &= e^{\lambda\varepsilon} \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)u dt \\ &= e^{\lambda\varepsilon} \left\{ R(\lambda)u - \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} S(t)u dt \right\} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon} R(\lambda)u = \frac{e^{\lambda\varepsilon} - Id}{\varepsilon} R(\lambda)u - \frac{e^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon} \left\{ \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} S(t)u dt \right\}$$

et

$$\frac{e^{\lambda\varepsilon} - Id}{\varepsilon} R(\lambda)u - \frac{e^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon} \left\{ \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} S(t)u dt \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda R(\lambda)u - u$$

Ainsi, $R(\lambda)u \in D(A)$ et $AR(\lambda)u = \lambda R(\lambda)u - u$, soit $(\lambda - A)R(\lambda)u = u$.

Par ailleurs, si $u \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned} R(\lambda)Au &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)A u dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(S(t)u) dt \\ &= -u + \lambda R(\lambda)u \end{aligned}$$

Ainsi,, pour tout $u \in D(A)$, $R(\lambda)(\lambda - A)u = u$ et donc

$$R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} : u \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)u dt$$

En d'autres termes, la résolvante d'un opérateur est la transformée de Laplace du semi-groupe associé. Remarquons également que l'on peut considérablement renforcer la condition 2 du théorème en

Tout complexe λ vérifiant $\Re(\lambda) > 0$ appartient à $\rho(A)$ et $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\Re(\lambda)}$

Pour générer un semi-groupe, il faut donc avoir un spectre "négatif".

Les conditions sont suffisantes Pour la réciproque, on pourrait être tenté d'inverser la transformée de Laplace, mais cela s'avère délicat... Au mieux, on peut avoir \mathcal{F}^{-1} , l'inverse de la transformée de Fourier, qui aura le bon goût d'être holomorphe, mais on ne sait pas faire grand chose sur l'axe réel uniquement : il faudrait étendre le semi-groupe à des temps complexes, ou user d'autres stratagèmes qui n'auraient en tout cas aucun caractère général. On se fixe A un opérateur linéaire vérifiant 1) et 2).

Une idée est d'utiliser les approximations de Yosida de A , qui approche A par une suite d'opérateurs linéaires bornés :

Pour tout $\lambda > 0$, on définit l'approximation de Yosida de A par

$$A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}$$

et on remarque

$$A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda \in \mathcal{L}(X)$$

comme on peut le voir en écrivant $A = A - \lambda + \lambda$.

Cette approximation jouit de propriétés miraculeuses et va nous sauver la mise dans cette preuve : començons par un lemme :

LEMME IV.2. 1. Pour tout $u \in X$, $\lambda(\lambda - A)^{-1}u \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u$.

2. Pour tout $u \in D(A)$, $A_\lambda u \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} Au$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. 1. Pour montrer ce premier point, on va utiliser la densité de $D(A)$ dans X : si $u \in D(A)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - A)^{-1}u &= (\lambda - A + A)(\lambda - A)^{-1}u \\ &= u + \underbrace{(\lambda - A)^{-1}Au}_{\|\cdot\| \leq \frac{1}{\lambda} \|Au\|} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} u \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$ $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ et donc le résultat suit.

2. Si $u \in D(A)$ alors $A_\lambda u = \lambda(\lambda - A)^{-1}Au \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} Au$.

□

Ce lemme nous incite à penser à λ comme à un paramètre de troncature. Définissons à présent le semi-groupe associé à A_λ , que l'on notera

$$(S_\lambda(t))_{t \geq 0} := (e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$$

On a alors le résultat suivant :

LEMME IV.3. 1. $(S_\lambda(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe C_0 de contractions.

2. Pour tout $t \geq 0$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ $\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. 1. Rappelons que $A_\lambda = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda$. Alors

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{t\lambda^2(\lambda - A)^{-1}}\|_{\mathcal{L}(X)} e^{-\lambda t} \\ &\leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}} \\ &\leq e^{-\lambda t} e^{\lambda t} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Les autres propriétés de groupe C_0 étant évidemment vérifiées (il s'agit de l'exponentielle d'un opérateur borné), ceci termine la démonstration du premier point.

2. Comme A commute avec sa résolvante, pour tous μ et λ réels strictement positifs et pour tout $u \in X$, on a par un calcul direct

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} u \right) ds \right\| \\ &= \left\| t \int_0^1 e^{tsA_\lambda + t(1-s)A_\mu} (A_\lambda - A_\mu) u ds \right\| \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité souhaitée.

□

Définissons alors le semi-groupe associé à A : il s'agira de $(S(t))_{t \geq 0}$ défini par

$$\boxed{\forall t \geq 0, \forall u \in X, S(t)u := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda(t)u} \quad (\text{IV.8})$$

On doit alors vérifier trois choses :

$(S(t))_{t \geq 0}$ est bien défini : Pour tout $u \in D(A)$, pour tous $\lambda, \mu > 0$ on a

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\|_X \leq t (\|(A_\lambda - A)u\|_X + \|(A_\mu - A)u\|_X) \xrightarrow{\lambda, \mu \rightarrow +\infty} 0$$

Donc la suite $(S_\lambda(t)u)_{\lambda > 0}$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une limite, notée $S(t)u$. En outre, le calcul précédent fait apparaître que la convergence est uniforme en t sur les intervalles bornés. Comme

$$\|S_\lambda(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$$

donc pour tout $u \in X$ la suite $(S_\lambda(t)u)_{\lambda > 0}$ converge, et la convergence est localement uniforme en temps.

$(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe C_0 de contractions : Le fait qu'il s'agisse de contractions est évident. La propriété de semi-groupe est également vérifiée : pour tous $t_1, t_2 > 0$, pour tout $u \in X$ on a

$$S(t_1+t_2)u = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \underbrace{S_\lambda(t_1)(S_\lambda(t_2) - S(t_2))u}_{\rightarrow 0 \text{ car le semi-groupe est uniformément borné}} + S_\lambda(t_1)S(t_2)u = S(t_1)S(t_2)u$$

Enfin, l'application $t \mapsto S(t)u$ est continue sur $[0; +\infty[$ comme limite localement uniforme de fonctions continues.

Le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$ est A : Remarquons dans un premier temps qu'on a l'identité suivante : pour tout $\lambda > 0$, pour tout $t \geq 0$, pour tout $u \in X$

$$S_\lambda(t)u - u = \int_0^t S_\lambda(\tau)A_\lambda u d\tau$$

Si $u \in D(A)$, on peut prendre la limite $\lambda \rightarrow +\infty$ et on trouve, par la même astuce que précédemment, l'identité :

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)A u d\tau$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{S(t) - Id}{t}u = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)A u d\tau$$

Ainsi, si B est le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$, on a $D(A) \subseteq D(B)$ et B et A sont égaux sur $D(A)$; en d'autres termes, B est une extension de A . Remarquons alors que A n'admet pas d'extension non triviale : si $\lambda > 0$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ et donc $\lambda - B$ est bijectif de $D(B)$ dans X , de même que $\lambda - A$ est bijectif de $D(A)$ dans X : il faut nécessairement avoir l'égalité $D(A) = D(B)$, et donc A est bien le générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$. Ceci conclut la démonstration du théorème de Hille-Yosida.

□

On peut reformuler le théorème de Hille-Yosida dans un cadre parfois plus commode ; en analyse fonctionnelle, les espaces de Hilbert constituent ce cadre plus commode : soit X un espace de Hilbert sur \mathbb{C} .

DÉFINITION IV.7. Un opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est dit **dissipatif** si

$$\forall u \in D(A), \Re(\langle Au|u \rangle) \leq 0$$

On a la caractérisation suivante des opérateurs dissipatifs :



FIGURE 6 – Yosida

LEMME IV.4. *Un opérateur $A : D(A) \rightarrow X$ est dissipatif si et seulement si*

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \|(\lambda - A)u\| \geq \lambda \|u\|$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Si A est dissipatif, alors pour tout $u \in D(A)$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\lambda \|u\|^2 \leq \Re(\langle (\lambda - A)u | u \rangle) \leq |\langle (\lambda - A)u | u \rangle| \leq \|u\| \cdot \|(\lambda - A)u\|$$

□

d'où l'inégalité recherchée.

Réciproquement, si pour tout $u \in D(A)$ et pour tout $\lambda > 0$ l'inégalité

$$\lambda^2 \|u\|^2 \leq \|(A - \lambda)u\|^2 = \lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda \Re(\langle Au | u \rangle) + \|Au\|^2$$

est vérifiée alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\Re(\langle Au | u \rangle) \leq \frac{1}{2\lambda} \|Au\|^2$$

d'où la dissipativité de A en passant à la limite $\lambda \rightarrow +\infty$.

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le théorème de Hille-Yosida version Hilbert, le théorème de Lumer-Phillips :

THÉORÈME IV.2. *Soit X un espace de Hilbert complexe et soit $A : D(A) \rightarrow X$ un opérateur linéaire densément défini (et qui n'est même pas supposé fermé). Alors A est le générateur d'un semi-groupe C_0 de contractions dans X si et seulement si*

1. A est dissipatif.
2. Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $(\lambda_0 - A) : D(A) \rightarrow X$ est surjectif.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. L'idée est de réussir à se ramener au théorème de Hille-Yosida : si A génère un semi-groupe C_0 de contractions dans X , alors par Hille-Yosida :

- $\forall \lambda > 0, (\lambda - A) : D(A) \rightarrow X$ est bijectif.
- $\forall \lambda > 0 \|(\lambda - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1}$ donc pour tout $u \in D(A) \|(A - \lambda)u\| \geq \lambda \|u\|$.

La réciproque est moins immédiate : si les deux conditions du théorème sont vérifiées, fixons-nous un λ_0 comme dans 2. Alors pour tout $u \in D(A)$ on a l'inégalité

$$\|(\lambda_0 - A)u\| \geq \lambda_0 \|u\|$$

par dissipativité de A . Donc $\lambda_0 - A$ est injectif, et par conséquent $\lambda_0 \in \rho(A)$. Par ailleurs, A est fermé. Pour appliquer le théorème de Hille-Yosida, il faut montrer la condition sur le spectre de A . Soit donc

$$\Lambda := \{\lambda > 0; \lambda \in \rho(A)\}$$

Si $\lambda \in \Lambda$ alors

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \lambda^{-1} \text{ par dissipativité}$$

et $\lambda + \mu \in \Lambda$ dès que

$$\mu \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$$

donc en particulier dès que $|\mu| < \lambda :]0; 2\lambda[\subset \Lambda$. Ainsi, $\Lambda =]0; +\infty[$ et pour tout $\lambda > 0 \|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$. On peut donc appliquer le théorème de Hille-Yosida.

□

EXEMPLE 2. Soit Ω un ouvert borné de classe \mathcal{C}^2 et L un opérateur elliptique d'ordre 2 mis sous la forme

$$Lu = -\partial_i(a^{i,j}\partial_j u) + b^i\partial_i u + cu$$

où les $a^{i,j}$ sont symétriques et de classe \mathcal{C}^1 sur $\overline{\Omega}$ et les b^i sont continus sur $\overline{\Omega}$. On considère L comme un opérateur sur $X = L^2(\Omega)$ de domaine de définition $D(L) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (c'est-à-dire que l'on introduit une condition de Dirichlet). Déjà, L est densément défini. Par ailleurs, avec les mêmes notations qu'en 2, pour tout $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ on a

$$\Re(\langle Lu|u \rangle) \geq \frac{\theta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Donc l'opérateur $A = -L - \gamma$ est dissipatif. Par ailleurs, pour tout $\mu > 0$ on a vu que l'équation $(\mu - A)u = f$ possède une unique solution $u \in D(L)$ pour tout $f \in L^2(\Omega)$. Par le théorème de Lumer-Phillips, A génère un semi-groupe C_0 de contractions dans X , donc $-L$ génère dans X un semi-groupe C_0 $(S(t))_{t \geq 0}$ tel que pour tout $t \geq 0$ on ait l'inégalité

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\gamma t}$$

On obtient donc l'existence de solutions pour les opérateurs paraboliques de type

$$\partial_t + L$$

Cependant, il nous reste un point à clarifier : comment se ramener du cas général au cas d'un semi-groupe C_0 de contractions? Reprenons nos considérations sur la "taille" d'un semi-groupe, à savoir l'estimée obtenue en IV.1 : on se donne $S = (S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe C_0 , et on sait que l'on peut choisir $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}$$

Pour se ramener au théorème de Hille-Yosida, on effectue deux transformations :

Première transformation : se ramener au cas $\omega = 0$ On définit un nouveau semi-groupe $S_1(t) := S(t)e^{-\omega t}$ pour tout $t \geq 0$. On vérifie que S_1 est un semi-groupe C_0 et, si A désigne le générateur de S , le générateur de S_1 est $A - \omega Id$. Par construction, on a

$$\forall t \geq 0, \|S_1(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

Cette transformation est également connue sous le nom de translation spectrale (tout du moins M. Gallay l'appelle-t-il ainsi).

Deuxième transformation : se ramener au cas $M = 1$ Pour se ramener à $M = 1$, on va introduire une nouvelle norme sur X , définie à partir du semi-groupe S_1 : soit $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ la norme définie par

$$\forall u \in X, |u| := \sup_{t \geq 0} \|S_1(t)u\|$$

Il est immédiat que ceci définit bien une norme, puisque S_1 est uniformément borné et que $S_1(0) = Id$. De même, on a immédiatement les inégalités suivantes :

$$\|\cdot\| \leq |\cdot| \leq M \|\cdot\|$$

Les deux normes sont donc équivalentes, et $|\cdot|$ munit donc X de la même structure de Banach que $\|\cdot\|$. Par construction, pour tout $u \in X$ on a

$$\begin{aligned} |S_1(t)u| &= \sup_{t \geq 0} \|S_1(t+t')u\| \\ &\leq \sup_{t' \geq 0} \|S_1(t')u\| \\ &\leq |u| \end{aligned}$$

Ainsi, S_1 est un semi-groupe de contractions dans $(X, |\cdot|)$. On aboutit, en remontant toutes ces étapes, au théorème général suivant :

THÉORÈME IV.3. *Un opérateur linéaire $A : D(A) \rightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C_0 $(S(t))_{t \geq 0}$ vérifiant l'estimée*

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$$

où $M \geq 1$ et ω sont des réels fixés si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. A est fermé et densément défini.
2. $]\omega; +\infty[\subseteq \rho(A)$ et

$$\forall \lambda > \omega, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(\lambda - \omega)^{-n}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Elle est laissée à titre d'exercice. □

Le « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ » est le prix à payer pour le changement de norme, et c'est une condition très compliquée à vérifier en pratique ; c'est donc un théorème peu commode.

Quelques commentaires sur l'inversion de la transformée de Laplace Comme nous l'avions déjà mentionné dans la preuve du théorème de Hille-Yosida, on aimerait obtenir une représentation du semi-groupe sous la forme d'une transformée de Laplace, c'est-à-dire que l'on aimerait avoir

$$S(t) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

où $\lambda_0 > \omega$ et où S vérifie l'estimée

$$\forall t \geq 0, \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$$

Rappelons que $\{\Re(z) > \omega\} \subseteq \rho(A)$. C'est une demande irréaliste, mais on aimerait au moins avoir une formule de la forme

$$\forall u \in X, S(t)u = \frac{1}{2i\pi} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} u d\lambda$$

Le problème, c'est que rien ne garantit, a priori, la convergence de l'intégrale, qui ne converge en général pas pour tout $u \in X$. En revanche, si l'opérateur A a un spectre vérifiant une condition angulaire, ce sera la cas, ce qui motive la définition suivante :

DÉFINITION IV.8. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire densément défini. On dit que A est **sectoriel** s'il existe $\varphi \in]0; \frac{\pi}{2}[$ tel qu'en définissant*

$$\Delta_\varphi := \left\{ z \in \mathbb{C}^*, \frac{-\pi}{2} - \varphi \leq \arg(z) \leq \varphi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

avec une définition de $\arg(z)$ modulo 2π , on ait

$$\omega + \Delta_\varphi \subseteq \rho(A)$$

Si cette condition est vérifiée **faire le schéma**, alors A génère un semi-groupe C_0 représenté par

$$\boxed{\forall u \in X, S(t)u = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} u d\lambda} \quad (\text{IV.9})$$

On voit bien dans cette formule que les problèmes de convergence ont disparu : $\Re(\lambda)$ tend vers $-\infty$, que l'on parcourt Γ dans un sens ou dans l'autre. En fait, le semi-groupe obtenu est même mieux que C_0 : $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe analytique.

Malheureusement, il n'y a à notre connaissance aucun procédé constructif général pour démontrer le théorème de Hille-Yosida.

IV-4. Exercices

IV-4- 1. Fermeture d'un opérateur non borné

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A: D(A) \rightarrow H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On suppose que A est *symétrique* :

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle, \quad (\text{IV.10})$$

pour tout $u, v \in D(A)$.

1. Soit

$$\text{Gr}(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset H \times H$$

le graphe de A . Montrer que la fermeture $\overline{\text{Gr}(A)}$ de $\text{Gr}(A)$ dans $H \times H$ est encore un graphe¹⁴.

2. On définit $(\bar{A}, D(\bar{A}))$ comme l'opérateur non-borné de graphe $\overline{\text{Gr}(A)}$. Montrer que \bar{A} est fermé, symétrique, et étend¹⁵ l'opérateur A .
3. Montrer que A est dissipatif¹⁶ si, et seulement si, \bar{A} l'est.

IV-4- 2. Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert

Soit H un espace de Hilbert muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit $A: D(A) \rightarrow H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On munit $H \times H$ du produit hermitien

$$((u, v), (w, z)) \mapsto \langle u, w \rangle + \langle v, z \rangle$$

et on définit U , l'opérateur unitaire "rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ " sur $H \times H$ par

$$U(u, v) = (v, -u).$$

1. Soit

$$\text{Gr}(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\} \subset X \times X$$

le graphe de A . Soit $\text{Gr}^* = U(\text{Gr}(A)^\perp)$. Montrer que Gr^* est un graphe fermé. Cela définit un opérateur $(A^*, D(A^*))$ qu'on appelle l'adjoint de A .

2. Montrer que $v \in D(A^*)$ si, et seulement si, l'application $T_v: u \mapsto \langle Au, v \rangle$ est continue sur $D(A)$ muni de la norme $\| \cdot \|$. Dans ce cas T_v s'étend en une forme linéaire continue sur H . En vertu du Théorème de Riesz, T_v peut être représenté par un élément de H : quel est ce dernier ?
3. Montrer que A est symétrique si, et seulement si, A^* étend A .
4. On suppose A symétrique. On note \bar{A} la fermeture de A (voir Exercice 4.1). Justifier $A^{**} = \bar{A}$ et $A^* = (\bar{A})^*$.
5. On suppose de plus A fermé. Justifier $A = A^{**}$. Montrer l'identité

$$\text{Ker}(A) = (\text{Im}(A^*))^\perp.$$

En déduire les identités suivantes

$$\text{Ker}(A^*) = (\text{Im}(A))^\perp, \quad (\text{Ker}(A))^\perp = \overline{\text{Im}(A^*)}, \quad (\text{Ker}(A^*))^\perp = \overline{\text{Im}(A)}.$$

14. Rappel : $E \subset H \times H$ est un graphe si une ligne verticale ne rencontre qu'un point de E au plus, à savoir : pour tout $z, z' \in E$, $p_1(z) = p_1(z')$ implique $p_2(z) = p_2(z')$ où p_1 est la projection sur la première composante et p_2 la projection sur la deuxième composante. Dans le cas où E est un espace vectoriel il suffit de montrer que $p_1(z) = 0$ implique $p_2(z) = 0$.

15. Rappel : $(B, D(B))$ étend $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(B)$ et B est égal à A en restriction à $D(A)$. Autrement dit, $\text{Gr}(A) \subset \text{Gr}(B)$.

16. Rappel : cela signifie $\text{Re}\langle Au, u \rangle \leq 0$ pour tout $u \in D(A)$

IV-4- 3. Adjoint d'un opérateur non-borné sur un Hilbert (suite)

Soit $A: D(A) \rightarrow H$ un opérateur non borné de domaine *dense*. On dit que

- A est *auto-adjoint* si $A = A^*$ (noter que cela implique que A est symétrique et fermé),
- A est *essentiellement auto-adjoint* si A est symétrique et sa fermeture \overline{A} est auto-adjoint.

1. Soit $A: D(A) \rightarrow H$ un opérateur non borné de domaine dense, symétrique, qui est maximal dissipatif, *i.e.* A est dissipatif :

$$\operatorname{Re}\langle Au, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A),$$

et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\operatorname{Im}(\lambda_0 - A) = H$.

- (a) Montrer que $R(\lambda_0) = (\lambda_0 - A)^{-1}$ est auto-adjoint.
 - (b) Montrer que A est auto-adjoint.
2. Soit $A_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_0) = H_0^1 \cap H^2(0, 1)$ sur $H = L^2(0, 1)$. Montrer que A_0 est auto-adjoint (on pourra appliquer la question précédente).
 3. Soit maintenant $A_1 = -\frac{d^2}{dx^2}$, $D(A_1) = C_c^2(0, 1)$ sur $H = L^2(0, 1)$ (attention à la différence de domaine!).
 - (a) Montrer que A_1 est symétrique et que $-A_1$ est dissipatif. Déterminer la fermeture $\overline{A_1}$. Justifier que $D(\overline{A_1})$ est un sous ensemble strict de $D(A_0)$.
 - (b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $u_z: z \mapsto e^{zx}$ est dans $D(A_1^*)$ et que $A_1^* u_z = -z^2 u_z$. En déduire que A_1^* n'est pas symétrique, que $-A_1^*$ n'est pas dissipatif, puis que A_1 n'est pas essentiellement auto-adjoint.

IV-4- 4. Semi-groupe et inégalité d'interpolation

1. Soit A le générateur d'un semi-groupe de contraction $S(t)$ sur un espace de Banach X . On définit

$$D(A^2) = \{u \in D(A); Au \in D(A)\}.$$

Montrer que si $u \in D(A^2)$, alors

$$\|Au\|^2 \leq 4\|A^2u\|\|u\|. \quad (\text{IV.11})$$

On commencera par justifier l'identité

$$S(t)u - u = tAu + \int_0^t (t-s)S(s)A^2u ds. \quad (\text{IV.12})$$

2. Soit X l'ensemble des fonctions bornées uniformément continues sur \mathbb{R} , muni de la borne du sup. Soit $S(t)$ défini par

$$S(t)f(x) = f(x+t).$$

Montrer que $S(t)$ est un semi-groupe de contraction sur X , déterminer A , puis détailler (IV.11) dans ce cas.

IV-4- 5. Ensembles spectraux d'opérateurs non bornés

1. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0, 1)$, $Au = u'$, $D(A) = H^1(0, 1)$. Justifier d'autre part que A est fermé.
2. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = L^2(0, 1)$, $Au = u'$,

$$D(A) = \{u \in H^1(0, 1); u(0) = 0\}.$$

3. Déterminer le spectre de $(A, D(A))$ sur $X = l^2(\mathbb{N})$, $(Au)_n = \mu_n u_n$, $D(A)$ étant l'ensemble des u tels que $Au \in l^2(\mathbb{N})$. Ici (μ_n) est une suite arbitraire de nombres complexes. Justifier d'autre part que A est fermé. Déduire de cet exemple que tout fermé de \mathbb{C} est l'ensemble spectral d'un opérateur non borné.

V. Introduction aux équations d'évolution semi-linéaires

On se place toujours dans un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ et l'on considère des équations d'évolution abstraites qui peuvent se reformuler en termes d'équations aux dérivées partielles. On établit dans ce chapitre quelques résultats d'existence et d'unicité pour certaines de ces équations.

V-1. Solutions classiques et intégrales d'équations d'évolution

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire dans X . Soit F une application continue de X dans X qui sert à introduire la non-linéarité dans le problème. On considère l'équation d'évolution suivante :

$$\boxed{\frac{du}{dt} = Au(t) + F(u(t)), t \geq 0} \quad (\text{V.1})$$

Typiquement, X sera un espace L^p . On fait par ailleurs les hypothèses suivantes :

- (H1) : A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $C_0(S(t))_{t \geq 0}$ dans X .
- (H2) : F est lipschitzienne sur les bornés de X .

Dès que X est de dimension infinie, la condition de lipschitzianité sur les bornés et strictement plus forte que la lipschitzianité locale : Dieudonné a construit, sur $c_0(\mathbb{N})$, une application continue et localement lipschitzienne qui n'est même pas bornée sur les bornés.

De même que dans les équations aux dérivées partielles, il peut être utile de chercher en quel sens on cherche à résoudre V.1. C'est l'objet de la définition suivante :

DÉFINITION V.1. Soient $T > 0$ et $u \in C^0([0; T]; X)$. On dit que :

- u est solution classique de V.1 si $u \in C^1([0; T]; X) \cap C^0([0; T]; D(A))$ et si

$$\forall t \in [0; T], \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t))$$

- u est solution intégrale de V.1 avec donnée initiale $u_0 \in X$ si

$$\forall t \in [0; T], u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \quad (\text{V.2})$$

On prendra bien garde au fait que la quantité $\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$ n'est pas nécessairement dérivable en la variable t .

Le grand avantage de la formulation intégrale et que seule la continuité de u est requise. Dans la définition de solution classique, on munit $D(A)$ de la norme du graphe, qui lui confère une structure banachique (et c'est mieux pour y faire du calcul différentiel!). On appelle la formule intégrale la formule de Duhamel associée à V.1. Étudions un peu plus le lien entre ces deux formulations :

PROPOSITION V.1. 1. Toute solution classique avec donnée initiale u_0 (i.e $u(0) = u_0$) est solution intégrale.

2. Si $u \in C^0([0; T]; X)$ est solution intégrale de V.1, alors

$$u \in C^1([0; T]; X) \Leftrightarrow u \in C^0([0; T]; D(A))$$

et dans ce cas u est solution classique de V.1.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Pour montrer le premier point, considérons u une solution classique de V.1 avec donnée initiale u_0 . Fixons $t \in]0; T[$ et considérons la fonction v définie sur $[0; t]$ par

$$v(s) := S(t-s)u(s)$$

On vérifie que v est continue à valeurs dans X . Par ailleurs, si $\tau \in [0; t[$ et si $\varepsilon \in]0; t - \tau]$ alors

$$\begin{aligned} v(\tau + \varepsilon) &= S(t - \tau - \varepsilon)u(\tau + \varepsilon) \\ &= S(t - \tau - \varepsilon) \{u(\tau + \varepsilon) - u(\tau)\} + S(t - \tau - \varepsilon)u(\tau) \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \frac{v(\tau + \varepsilon) - v(\tau)}{\varepsilon} &= S(t - \tau - \varepsilon) \left\{ \frac{u(\tau + \varepsilon) - u(\tau)}{\varepsilon} - \frac{S(\varepsilon)u(\tau) - u(\tau)}{\varepsilon} \right\} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} S(t - \tau)(u'(\tau) - Au(\tau)) \\ &= S(t - \tau)(F(u(\tau))) \end{aligned}$$

Ainsi, v est en tout point dérivable à droite de dérivée à droite continue. Par un argument classique d'analyse, on en déduit que v est de classe \mathcal{C}^1 . Ainsi, une fonction dérivable étant l'intégrale de sa dérivée, on obtient

$$\forall t \in [0; T], \underbrace{v(t)}_{=u(t)} = \underbrace{v(0)}_{=S(t)u_0} + \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau))d\tau$$

et u est donc solution intégrale.

Montrons le deuxième point : soit u une solution intégrale de V.1 avec donnée initiale $u_0 \in X$. Pour tout $t \in [0; T[$ et pour tout $\varepsilon \in]0; T - t]$ on a la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} u(t + \varepsilon) &= S(t + \varepsilon)u_0 + \int_0^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau \\ &= S(t + \varepsilon)u_0 + \int_0^t S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau + \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau \\ &= S(\varepsilon) \left\{ S(t)u_0 + \int_0^t S(t - \tau)F(u(\tau))d\tau \right\} + \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau \end{aligned}$$

en vertu de quoi on a

$$\frac{u(t + \varepsilon) - u(t)}{\varepsilon} = \frac{S(\varepsilon) - Id}{\varepsilon}u(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau$$

Le dernier terme, $\frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - \tau)F(u(\tau))d\tau$ tend vers $F(u(t))$ quand ε tend vers 0. Le terme de gauche a une limite si et seulement si u est dérivable à droite, et le premier terme du membre de gauche a une limite si et seulement si u est à valeurs dans $D(A)$. Sa dérivée à droite est alors $Au(t)$, qui est continue sur $[0 : T]$. Ceci permet de conclure la démonstration, en utilisant le résultat rappelé plus haut (si u admet en tout point une dérivée à droite et que cette dérivée est continue, alors u est en fait de classe \mathcal{C}^1) et en remarquant que par le caractère fermé de A , si $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0 : T[$, alors $u(T) \in D(A)$. Les détails techniques sont laissés à la discrétion du lecteur.

Bon. Nous avons au moins posé un cadre de travail propre. Montrons à présent que la résolution de l'équation V.1 est un problème bien posé :

PROPOSITION V.2. *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées, alors pour tout $r > 0$ il existe $\tilde{T} = \tilde{T}(r) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in B_X(0; r)$ l'équation intégrale V.2 admette une unique solution u continue sur $[0; \tilde{T}]$ à valeurs dans X .*

La philosophie de ce résultat, c'est qu'une borne supérieure sur la taille de la condition initiale donne une borne inférieure pour le temps d'existence de la solution.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit donc $r > 0$ et soit $u_0 \in X$, $\|u_0\| \leq r$. Soit $L(r)$ la constante de Lipschitz de f sur $B(0; r)$. Définissons, pour tout $t \geq 0$, les trois quantités suivantes :

- $M(t) := \sup_{\tau \in [0; t]} \|S(\tau)\|_{\mathcal{L}(X)}$
- $R(t) := 2M(t)r$
- $N_0 := \|F(0)\|$

On choisit $\tilde{T} = \tilde{T}(r)$ suffisamment petit pour que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\tilde{T}(r) \left(R \left(\tilde{T}(r) \right) L \left(R \left(\tilde{T}(r) \right) \right) + N_0 \right) \leq r \quad (*)$$

Finalement, on note $\tilde{R} = R(\tilde{T})$ et $\tilde{M} := M(\tilde{T})$. Ensuite, un peu comme dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz, on applique un théorème de point fixe : soit $Y := \mathcal{C}^0([0; \tilde{T}]; X)$ muni de la norme

$$\|u\|_Y := \sup_{t \in [0; \tilde{T}]} \|u(t)\|_X$$

Cette norme fait de Y un espace de Banach. Définissons ensuite l'application $\Phi : Y \rightarrow Y$ par

$$\Phi(u) : t \mapsto S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau$$

Résoudre le problème intégral qui nous est posé, c'est donc trouver un point fixe de Φ . Pour cela, on définit $\tilde{B} := \{u \in Y, \|u\|_Y \leq \tilde{R}\}$. On va prouver que \tilde{B} est stable par Φ , puis que Φ est une contraction sur \tilde{B} .

\tilde{B} est stable par Φ : Soit $u \in \tilde{B}$. Alors pour tout $t \in [0; \tilde{T}]$ on a

$$\begin{aligned} \|\Phi u(t)\| &\leq \|S(t)u_0\| + \left\| \int_0^t S(t-\tau) (F(u(\tau)) - F(0)) d\tau \right\| + \left\| \int_0^t S(t-\tau)F(0)d\tau \right\| \\ &\leq \tilde{M}\|u_0\| + \int_0^t \tilde{M}L(\tilde{R})\|u(\tau)\|d\tau + \int_0^t \tilde{M}N_0 \text{ par croissance de } t \mapsto M(t) \\ &\leq 2\tilde{M}r \text{ en appliquant } (*) \\ &\leq \tilde{R} \text{ par construction} \end{aligned}$$

ce qui est bien ce que nous voulions établir.

Φ est une contraction de \tilde{B} dans \tilde{B} : Soient u et v deux éléments de \tilde{B} . Alors pour tout $t \in [0; \tilde{T}]$ on a

$$(\Phi u - \Phi v)(t) = \int_0^t S(t-\tau) (F(u(\tau)) - F(v(\tau))) d\tau$$

d'où l'on tire, en majorant brutalement, l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|(\Phi u - \Phi v)(t)\| &\leq \tilde{T}\tilde{M}L(\tilde{R})\|u - v\|_Y \\ &\leq \frac{\|u - v\|}{2} \text{ par } (*) \end{aligned}$$

Φ admet donc un unique point fixe dans \tilde{B} qui est, par construction, solution du problème posé. Il reste à vérifier l'unicité de la solution. Soit $v \in Y$ une fonction continue de $[0; \tilde{T}]$ à valeurs dans X telle que $v(0) = u_0$ et solution du problème intégral. Notons

$$K := \max \left(\tilde{R}, \|v\|_Y \right)$$

Alors on a, pour tout $t \in [0; \tilde{T}]$

$$\|(u - v)(t)\| \leq \int_0^t \tilde{M}L(K)\|(u - v)(\tau)\|d\tau$$

Par le lemme de Grönwall, $\|(u - v)(t)\| = 0$. Ceci montre l'unicité.

V-2. Recollement, explosion et dépendance en la condition initiale

Dans la théorie des équations différentielles ordinaires, on aime prolonger les solutions de l'équation. Remarquons, dans le cadre qui nous occupe ici, le principe de continuation : soit $u(t) := S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$ sur $[0; T_1]$ et $v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds$ sur $[0; T_2]$ où $T_1, T_2 > 0$. Si $v(0) = u(T_1)$, alors la concaténée de u et de v définie sur $[0; T_1 + T_2]$ par

$$w(t) := \chi_{[0; T_1]}(t)u(t) + \chi_{]T_1; T_1+T_2]}(t)v(T_1 - t) \quad (**)$$

est une solution intégrale sur $[0; T_1 + T_2]$. Par contre, on peut avoir explosion de la solution en temps fini, et il faut bien faire attention lorsque l'on souhaite étendre une solution ! Soit désormais $T^*(u_0)$ la quantité définie par

$$T^*(u_0) := \sup\{T > 0, (V.2) \text{ admette une solution continue jusqu'en } T \text{ à valeurs dans } X\} \in]0; +\infty]$$

DÉFINITION V.2. • On dit que la solution de V.2 est **définie globalement** si $T^*(u_0) = +\infty$.

• On dit que la solution de V.2 **explose en temps fini** si $T^*(u_0) < +\infty$.

Si F n'est pas lipschitz on peut voir surgir des solutions pathologiques : par exemple, on peut avoir une solution bornée et qui pourtant vérifie $T^*(u_0) < +\infty$ (un DM de Julien Vovelle met en évidence ce problème : le sujet se trouve à l'adresse <http://math.univ-lyon1.fr/~vovelle/DM2.ps>). Ici, le terme « explosion » est justifié par le lemme suivant :

LEMME V.1. Si $T^*(u_0) < +\infty$ alors

$$\|u(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow T^*(u_0)]{} +\infty$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Par l'absurde, si tel n'est pas le cas, alors $\liminf_{t \rightarrow T^*(u_0)} \|u(t)\| < +\infty$ et il existe une suite croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0; T^*(u_0)[^{\mathbb{N}}$ et $r > 0$ telle que $t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} T^*(u_0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u(t_n)\| \leq r,$$

Par existence locale d'une solution de V.2, il existe une solution sur $[0; t_n + \tilde{T}(r)]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $t_n + \tilde{T}(r) > T^*(u_0)$ pour n assez grand, ce qui contredit la définition de $T^*(u_0)$.

Il nous reste une dernière étape à expliciter : la dépendance en la condition initiale, qui fait l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION V.3. Soit $u_0 \in X$ et soit $T \in]0; T^*(u_0)[$. Soit $u \in \mathcal{C}^0([0; T]; X)$ une solution de V.2. Alors il existe K et δ deux réels strictement positifs tels que

$$\forall v_0 \in X, \|v_0 - u_0\| < \delta \Rightarrow T^*(v_0) > T$$

et la solution intégrale de l'équation avec donnée initiale v_0 vérifie la borne

$$\forall t \in [0; T], \|u(t) - v(t)\| \leq K \|u_0 - v_0\|$$

On en déduit le corollaire suivant (dont une application intéressante sera vue en exercice) :

COROLLAIRE V.1. L'application $T^* : u_0 \mapsto T^*(u_0)$ est semi-continue inférieurement, i.e

$$\forall u_0 \in X, \liminf_{v \rightarrow u_0} T^*(v) \geq T^*(u_0)$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. La démonstration fait de nouveau appel au lemme de Grönwall. Fixons $T \in]0; T^*(u_0)[$. Définissons plusieurs quantités :

$$M := \sup_{t \in [0; T]} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq 1, \quad R := 2 \sup_{t \in [0; T]} \|u(t)\| + 1 < +\infty, \quad \delta := \frac{R}{2M} e^{-ML(R)T} \leq \frac{R}{2}$$

où $L(R)$ désigne ici encore la constante de Lipschitz de F sur $B(0; R)$. Soit $v_0 \in X$ tel que $\|u_0 - v_0\| \leq \delta$. Introduisons finalement le réel $T_R(v_0)$ défini par

$$T_R(v_0) := \sup\{t \in]0; T^*(v_0)[: \forall \tau \in [0; t], v(\tau) \in B(0; R)\}$$

Alors pour $t \in [0; \min\{T; T_R(v_0)\}]$ on a

$$u(t) - v(t) = S(t)(u_0 - v_0) + \int_0^t S(t - \tau) \{F(u(\tau)) - F(v(\tau))\} d\tau$$

d'où l'on tire l'estimation suivante, valable pour tout $t \in [0; \min\{T; T_R(v_0)\}]$:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq M\|u_0 - v_0\| + ML(R) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \\ &\leq M\delta + ML(R) \int_0^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall implique alors que pour tout $t \in [0; \min\{T; T_R(v_0)\}]$ on a

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M\delta e^{ML(R)T} \leq \frac{R}{2}$$

Ceci implique que pour tout $t \in [0; \min\{T; T_R(v_0)\}]$

$$\|v(t)\| \leq \|u(t)\| + \frac{R}{2} < R$$

Donc $v(t)$ ne s'approche pas du bord de $B(0; R)$ pour tout $t \in [0; z]$, $z < T$. Ainsi, $T_R(v_0) = T$ et donc $T^*(v_0) > T$. Ceci conclut la démonstration.

Mentionnons un dernier résultat, qui peut s'obtenir par des techniques similaires mais un peu plus lourdes :

PROPOSITION V.4. *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées, si $u_0 \in D(A)$, considérons u une solution intégrale de V.2 avec donnée initiale u_0 . Si X est un espace de Banach réflexif ou si F est de classe \mathcal{C}^1 alors u est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; T]$ et est à valeurs dans $D(A)$; c'est une solution classique.*

L'idée, c'est qu'il faut que le terme intégral soit de classe \mathcal{C}^1 en la variable temporelle. Pour la démonstration, on pourra se reporter au livre de Pazy : on commence par montrer que le terme intégral est lipschitzien en temps ; il est donc dérivable presque partout et de dérivée bornée. Notons que la preuve utilise encore le lemme de Grönwall.

V-3. L'équation de la chaleur non linéaire

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On considère l'équation parabolique semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \Delta u(x, t) + f(u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0; +\infty[\\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Notons que l'on a déjà évoqué le semi-groupe de la chaleur, associé à l'opérateur $A = \Delta$ dans $X = \mathcal{L}^2$. Ici, on change d'espace fonctionnel, et l'on introduit

$$X := \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), u \text{ est uniformément continue}\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. X est un sous-espace vectoriel fermé de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. On introduit également $(S(t))_{t \geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur dans X défini pour tout $t > 0$ et pour tout $u_0 \in X$ par

$$S(t)u_0 : x \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} u_0(y) d\mu^{(n)}(y)$$

La définition de X a été faite de sorte que ce semi-groupe soit fortement continu; cette propriété nécessite l'uniforme continuité des applications considérées : par exemple, sans la continuité uniforme, on pourrait considérer $u_0 : x \mapsto \sin(x^2)$. Si $t \in]0; \varepsilon]$, où ε est petit, que le semi-groupe de la chaleur moyenne à 0. Donc pour tout $t > 0$ $\|S(t)u_0 - S(0)u_0\|_\infty = 1$, ce qui ne nous convient pas.

On note $A : D(A) \rightarrow X$ la générateur infinitésimal de $(S(t))_{t \geq 0}$. On vérifie que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ est tel que $\nabla^2 u \in X$, alors $u \in D(A)$ et $Au = \Delta u$. $D(A)$ peut être plus grand que cela, mais ces informations nous suffisent largement. On définit $F : X \rightarrow X$ par

$$\forall u \in X, F(u) : x \mapsto f(u(x))$$

Attention à bien faire la différence entre f et F , qui sont deux objets différents. On dit parfois que F est l'opérateur de substitution associé à f . On vérifie que F est de classe C^1 dans X et qu'elle est lipschitzienne sur les bornés. L'équation V.3 se met alors sous la forme

$$\boxed{\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(u(t))} \quad (\text{V.4})$$

Adjoignons-lui une donnée initiale u_0 . Par les résultats précédemment établis, on sait essentiellement trois choses :

- (1) L'équation V.4 possède une unique solution maximale intégrale $u \in C^0([0; T^*(u_0)]; X)$ et, si $T^*(u_0) < +\infty$ alors

$$\|u(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow T^*(u_0)]{} +\infty$$

- (2) Cette solution dépend continûment de la condition initiale u_0 et cette dépendance est uniforme sur les compacts de $[0; T^*(u_0)[$.

- (3) Si $u_0 \in D(A)$, alors u est une solution classique de V.4.

Ce qu'on peut faire dans des cas particuliers, c'est étudier le temps d'existence des solutions. Ce qu'il y a de magique, c'est que l'on peut utiliser des informations relatives aux solutions de l'équation différentielle

$$u' = F(u)$$

pour en déduire des informations sur les solutions de V.3. Rappelons qu'en une dimension, c'est le signe et la croissance de F qui déterminent l'explosion (ou non) et le comportement en temps grands des solutions de l'EDO : par exemple, les solutions des EDO

$$\dot{u} = -u^2, \quad \dot{u} = u^2$$

ont des comportements différents. Introduisons l'EDO

$$\dot{v} = f(v), \quad t > 0 \quad (\text{V.5})$$

Certaines solutions constantes en espace vérifient V.5 par unicité de telles solutions. On va utiliser une propriété des équations paraboliques scalaires, le principe du maximum, qui implique des principes de comparaison proprement invraisemblables.

DÉFINITION V.3. Si $u, v \in X$, on note $u \geq v$ la relation d'ordre (partielle) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) \geq v(x)$$

Le principe de comparaison suivant va fournir la base de notre étude :

LEMME V.2. Soient $u, v \in C^0([0; T]; X)$ deux solutions intégrales de V.4 avec données initiales respectives u_0 et v_0 . Si $u_0 \geq v_0$, alors pour tout $t \in [0; T]$ on a

$$u(t) \geq v(t)$$

En d'autres termes, la relation d'ordre \geq est préservée par la flot de l'équation différentielle.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On le démontre à la main : introduisons

$$\begin{cases} w(t) &= u(t) - v(t) \\ w_0 &= u_0 - v_0 \end{cases}$$

w est solution de l'équation intégrale

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\tau) \{F(u(\tau)) - F(v(\tau))\} d\tau$$

sur $[0; T]$. On la réécrit sous la forme

$$w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-\tau)G(u(\tau), v(\tau))w(\tau)d\tau$$

où G est l'opérateur de substitution associé à

$$g := \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \int_0^1 f'(y + t(x-y))dt \end{cases}$$

On remarque que si $x \neq y$ alors

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

G est continue et bornée sur les bornés de $X \times X$.

Supposons dans un premier temps que f soit une fonction croissante, i.e $f' \geq 0$, et en particulier $g \geq 0$. Par positivité du noyau de la chaleur, $S(t)w_0 \geq 0$. Décomposons ensuite sur $[0; T]$ w en partie négative et partie positive :

$$w(t) = w_+(t) - w_-(t)$$

Comme $S(t-\tau)G(u(\tau), v(\tau))w_+(\tau) \geq 0$ pour $\tau \in [0; t]$, on en déduit l'inégalité

$$\forall t \in [0; T], w(t) \geq - \int_0^t S(t-\tau)G(u(\tau), v(\tau))w_-(\tau)d\tau$$

et de cette inégalité on tire une estimation de w_- :

$$\forall t \in [0; T], 0 \leq w_-(t) \leq \int_0^t S(t-\tau)G(u(\tau), v(\tau))w_-(\tau)d\tau$$

En se rappelant que le semi-groupe de la chaleur est un semi-groupe de contractions et en introduisant $K := \sup_{t \in [0; T]} \|G(u(\cdot), v(\cdot))\|$ on a finalement

$$\forall t \in [0; T], 0 \leq \|w_-(t)\| \leq K \int_0^t \|w_-(\tau)\|d\tau$$

En appliquant le lemme de Grönwall, il vient donc

$$\forall t \in [0; T], w_-(t) = 0$$

et ainsi

$$\forall t \in [0; T], w(t) \geq 0$$

Maintenant, que se passe-t-il si f' est de signe quelconque ? On observe que pour tout $\lambda > 0$ u et v sont également des équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u &= (A - \lambda)u + (F(u) + \lambda u) \\ \frac{d}{dt}v &= (A - \lambda)v + (F(v) + \lambda v) \end{cases}$$

On choisit alors λ suffisamment grand pour que $f' + \lambda$ soit positif sur tous les points visités par u et v sur $[0; T]$. Cela est toujours possible, puisque f' est continue.

On voit donc que les distinctions évoquées lors de la démonstration du lemme de Hopf n'ont plus lieu dans le monde parabolique.

COROLLAIRE V.2. Soit $u_0 \in X$ et v_+, v_- les solutions de V.5 avec données initiales respectives

$$v_-(0) := \inf u_0, \quad v_+(0) = \sup u_0$$

Alors si u est solution intégrale de V.4 avec donnée initiale u_0 , on a

$$\forall t \in [0; \min\{T^*(v_-(0)), T^*(v_+(0))\}], \quad v_-(t) \leq u(t) \leq v_+(t)$$

Ainsi, si toutes les solutions de l'équation différentielle sont globales, toutes les solutions de l'équation aux dérivées partielles le sont.

Ce genre d'équations est parfois appelée « équation de réaction-diffusion ».

V-4. L'équation des ondes non-linéaire

Soit Ω un ouvert régulier borné de \mathbb{R}^n . Ici, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, on suppose $n \in \{1, 2, 3\}$. Pour simplifier, on va considérer que la non-linéarité est introduite par

$$f : x \mapsto -x^3$$

On considère l'équation aux dérivées partielles semi-linéaire suivante :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= \Delta u(x, t) - u(x, t)^3, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= v_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}} \quad (\text{V.6})$$

On se ramène facilement au cadre abstrait *via* plusieurs identifications : on pose

$$v := \frac{\partial u}{\partial t}$$

et

$$w := (u, v)$$

On réécrit V.6 sous la forme

$$\frac{dw}{dt}(t) = Aw(t) + F(w(t)), \quad t \geq 0$$

où l'on a défini

$$A : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -u^3 \end{pmatrix}$$

Autant pour la chaleur nous avons toute latitude pour le choix de l'espace fonctionnel X , autant ici il faut une certaine cohérence : il nous faut une dérivée en plus sur la première composante que sur la deuxième. Ceci nous incite à poser

$$X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

On munit par ailleurs X du produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \int_{\Omega} \{\nabla u_1 \cdot \nabla \bar{u}_2 + \bar{v}_2 v_1\} d\mu^{(n)}$$

La norme associée est donc

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|_X = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

L'opérateur A a pour domaine

$$D(A) = \{H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\} \times \{H_0^1(\Omega)\}$$

On laisse cela à titre d'exercice. On se trouve dans le cadre qui nous intéresse, puisque l'on a le lemme suivant :

LEMME V.3. 1. $(A, D(A))$ est le générateur d'un groupe C_0 d'opérateurs linéaires dans X .

2. Le groupe associé $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ est formé d'opérateurs unitaires dans X (i.e il est formé d'isométries bijectives).

Ce résultat fait en fait référence au théorème de Stone, introduit dans les années 30 et qui est sans doute le premier théorème de représentation : la deuxième partie du lemme équivaut à dire que A est anti-auto-adjoint ou, en d'autres termes, que iA est auto-adjoint. C'est un résultat utile en mécanique quantique.

DÉMONSTRATION DU LEMME. Vu le cadre dans lequel on se place, c'est le moment de faire appel au théorème de Lummer-Philipps : montrons que $+A$ et $-A$ vérifient les hypothèses de ce théorème. Déjà, il est clair que A est densément défini, et il faut donc démontrer qu'il est dissipatif. Mais si $w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ alors

$$\begin{aligned} \Re \langle Aw | w \rangle &= \Re \int_{\Omega} \{\nabla \bar{v} \cdot \nabla u + \Delta \bar{u} v\} d\mu^{(n)} \\ &= \Re \int_{\Omega} \{\nabla \bar{v} \cdot \nabla u - \nabla \bar{u} \cdot \nabla v\} d\mu^{(n)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Enfin, il faut trouver $\lambda > 0$ tel que $\lambda - A$ soit bijectif de $D(A)$ dans X . Soit $\lambda \in \{-1; 1\}$. L'équation

$$(\lambda - A)w = h$$

où l'inconnue est $w \in D(A)$ et où $h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in X$ est fixée équivaut, en l'étudiant composante par composante, au système :

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \\ \lambda v - \Delta u = g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \Delta u = \lambda f + g \\ v = \lambda u - f \end{cases}$$

Vu l'étude menée dans le deuxième chapitre, la première composante de ce système a une unique solution $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et la seconde équation montre que $v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, $\lambda - A$ est bijectif de $D(A)$ dans X . Par le théorème de Lummer-Philipps, A génère un groupe C_0 de contractions dans X , noté $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\|S(t)\| = 1$. Un calcul comme celui que nous ferons ci-dessous montre que pour tout $\omega \in W$ on a

$$\|S(t)\omega\| = \|\omega\|$$

et $S(t)$ est donc un opérateur unitaire dans X . L'évolution linéaire préserve donc la norme.

Une dernière chose : la non-linéarité. Des espaces tels que X ne sont pas des algèbres, mais on peut

utiliser la conservation de l'énergie. Ceci nous montrera des résultats sur le temps d'existence des solutions. Déjà, il faudrait montrer que F soit bien à valeurs dans X , et ceci explique notre restriction à $n \in \{1, 2, 3\}$: $u_3 \in L^2(\Omega)$ équivaut à $u \in L^6(\Omega)$, ce qui est le cas si $u \in H_0^1(\Omega)$ par les injections de Sobolev si $n \leq 3$. Il faut ensuite montrer que F est lipschitzienne sur les bornés : par les injections de Sobolev et par l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C_S > 0$ telle que :

$$\forall w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \|F(w)\|_X = \|u\|_{L^6(\Omega)}^3 \leq C_S \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^3 \leq C_S \|w\|^3$$

et

$$\|F(w_1) - F(w_2)\|_X \leq C_S \|w_1 - w_2\|_X 2 \max\{\|w_1\|_X^2, \|w_2\|_X^2\}$$

F est donc lipschitzienne sur les bornés de X . Par les résultats généraux, on a donc existence et unicité locale des solutions intégrales associées à V.6. Mais ici, on va montrer que les solutions intégrales sont définies en tout temps, grâce à une estimation d'énergie : soit $w \in C^0([-T; T]; X)$ une solution intégrale associée à V.6, $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. On introduit l'énergie de la solution intégrale au temps t , que l'on note $E(t)$, par

$$E(t) := \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |v(t)|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4} \|u(t)\|^4 \right\}$$

Alors si w est une solution classique

$$\boxed{\forall t \in [-T; T], E(t) = E(0)}$$

Pour voir cela, on calcule brutalement la dérivée. Le calcul ne présente aucune subtilité. Pour passer à des solutions classiques, on utilise la densité.

COROLLAIRE V.3. $T^*(u_0)_+ = +\infty$ et $T^*(u_0)_- = -\infty$.

Ce résultat se voit immédiatement : si, disons, $T^*(u_0)_+ < +\infty$ alors la norme de w explose, mais

$$\frac{1}{2} \|w(t)\|^2 \leq E(t) = E(0)$$

.

V-5. Exercices

V-5- 1. Equations de la chaleur non-linéaires

Soit $d \geq 1$. Soit U un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d . Pour $T > 0$, on note $Q_T = U \times (0, T)$.

1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\partial_t u - \Delta u = - \left[\int_U |u|^2 dx \right] u \text{ dans } Q_T \quad (\text{V.7a})$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial U \times (0, T), \quad (\text{V.7b})$$

$$u = u_0 \text{ sur } U \times \{0\}, \quad (\text{V.7c})$$

où $u_0 \in L^2(U)$. Que dire de (V.7)? On introduira l'opérateur non-borné $A = \Delta$ de domaine $H_0^1(U) \cap H^2(U)$ et le semi-groupe associé (en justifiant l'existence de ce dernier). On discutera en particulier la question de l'existence globale des solutions.

2. Soit $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^2 à dérivées bornées et à divergence nulle. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\partial_t u - \Delta u = - \left[\int_U |u|^2 dx \right] F \cdot \nabla u \text{ dans } Q_T \quad (\text{V.8a})$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial U \times (0, T), \quad (\text{V.8b})$$

$$u = u_0 \text{ sur } U \times \{0\}, \quad (\text{V.8c})$$

où $u_0 \in L^2(U)$.

- (a) On introduit l'opérateur non-borné $A = \Delta$ de domaine $H_0^1(U) \cap H^2(U)$ et on note $S(t)$ le semi-groupe de contraction associé. Justifier l'existence de $S(t)$.
 (b) Montrer que, pour tout $u_0 \in L^2(U)$, pour tout $t > 0$,

$$\|\nabla S(t)u_0\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{t^{1/2}} \|u_0\|_{L^2(U)}. \quad (\text{V.9})$$

Il y a plusieurs façons de montrer (V.9) : une possibilité est de faire les estimations d'énergie adéquates (pour $u_0 \in D(A^2)$ par exemple), une autre possibilité est d'exprimer $S(t)u_0$ à l'aide d'une base hilbertienne de $L^2(U)$ constituée de valeurs propres du Laplacien.

- (c) On pose $\Sigma(t)u = S(t)(F \cdot \nabla u)$. Montrer que, pour tout $u \in L^2(U)$,

$$\|\Sigma(t)u\|_{L^2(U)} \leq M \left(\frac{1}{t^{1/2}} + 1 \right) \|u\|_{L^2(U)}, \quad (\text{V.10})$$

où M est une certaine constante.

- (d) On réécrit (V.8) comme une équation de point fixe $u = \Phi(u)$ dans

$$Y = C([0, T]; L^2(U)),$$

avec

$$(\Phi u)(t) = S(t)u_0 - \int_0^t \Sigma(t-s)G[u](s)ds, \quad G[u] := \|u\|_{L^2(U)}^2 u. \quad (\text{V.11})$$

Montrer l'existence locale de solutions par le théorème du point fixe de Banach (*cf.* cours)

- (e) Montrer que, si $u_0 \in D(A)$, alors la solution obtenue est dans $C^1([0, T]; L^2(U))$ et $C([0, T]; D(A))$ et est solution classique. Une démonstration possible repose sur la convergence de l'itération $u^{n+1} = \Phi(u^n)$, $u^0 = u_0$, vers le point fixe $u = \Phi(u)$.
 (f) Discuter l'existence globale.

V-5- 2. Equation de la chaleur non-linéaire - Exposant critique de Fujita

Soit $d \geq 1$. Soit

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

le noyau de la chaleur sur \mathbb{R}^d et soit, pour $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $t \geq 0$, $S(t)u = K_t * u$. On admet (propriété des gaussiennes)

$$K_t * K_s = K_{t+s}, \quad t, s \geq 0.$$

Soit X l'espace des fonctions bornées uniformément continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} muni de la norme du sup.

1. Montrer que $(S(t))$ induit un semi-groupe de contraction sur X . Quel est son générateur (opérateur et domaine) ?
2. Soit $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Justifier

$$S(t)\varphi(u) \geq \varphi(S(t)u), \quad (\text{V.12})$$

pour tout $u \in X$, pour tout $t \geq 0$.

3. Soit $p \geq 1$. On considère le problème de Cauchy

$$\partial_t u - \Delta u = |u|^{p-1}u \text{ dans } \mathbb{R}^d \times (0, T) \quad (\text{V.13a})$$

$$u = u_0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}, \quad (\text{V.13b})$$

pour $u_0 \in X$. Justifier l'existence-unicité d'une solution intégrale maximale $u \in C([0, T^*(u_0)]; X)$.

4. On suppose que $u_0 \in X$ est une fonction positive : $u_0(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il en est de même de u . On pourra utiliser (V.12) avec $\varphi(u) = u^-$.
5. On suppose toujours $u_0 \in X$ positive. Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$u(t) \geq \frac{t^{1+p+\dots+p^{n-1}}}{(1+p)^{p^{n-2}}(1+p+p^2)^{p^{n-3}} \dots (1+p+\dots+p^{n-1})} [S(t)u_0]^{p^n}, \quad (\text{V.14})$$

pour $0 \leq t < T^*(u_0)$. On pourra utiliser (V.12) avec $\varphi(u) = |u|^p$.

6. En déduire

$$t^{\frac{1}{p-1}} S(t)u_0 \leq C(p), \quad (\text{V.15})$$

pour $0 \leq t < T^*(u_0)$, où $C(p)$ est une constante finie.

7. Justifier $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{d/2} S(t)u_0(x) = (4\pi)^{-d/2} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
8. On définit l'exposant critique de Fujita par

$$p_F = 1 + \frac{2}{d}.$$

Montrer que, si $1 < p < p_F$, alors $T^*(u_0) < +\infty$ pour tout $u_0 \in X \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ positive non identiquement nulle.

VI. Examens et partiels

VI-1. Examen partiel du 13 mars 2015

Un opérateur hypoelliptique et son flot parabolique

Première partie Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, on ait l'inégalité

$$\|u' + \lambda x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_1 |\lambda|^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (1)$$

où u' est la dérivée de u et $x^2 u$ la fonction $x \mapsto x^2 u(x)$.

1. Par un argument de changement d'échelle, montrer qu'il suffit d'établir l'inégalité (1) dans le cas particulier où $\lambda = 1$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et notons $f = u' + x^2 u$. En résolvant l'équation différentielle, établir une formule intégrale exprimant u en termes de f .
3. Dédurre de cette formule qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$. Conclure.

Deuxième partie On considère à présent l'opérateur différentiel L dans \mathbb{R}^2 défini par

$$(Lu)(x) = -\partial_{x_1}^2 u(x) - x_1 \partial_{x_2} u(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (2)$$

1. Calculer le symbole et le symbole principal de L . Cet opérateur est-il elliptique ?
2. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et notons $f = Lu$. Par une estimation d'énergie, montrer que

$$\|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (3)$$

3. Si $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ désigne la transformée de Fourier de u et \hat{f} celle de f , vérifier que

$$\hat{f}(\xi) = \xi_1^2 \hat{u}(\xi) + \xi_2 \partial_{\xi_1} \hat{u}(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

4. On fixe maintenant $\xi_2 \in \mathbb{R}$ et on considère (4) comme une relation dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la variable étant $\xi_1 \in \mathbb{R}$. En utilisant la première partie du problème, vérifier que

$$C_1^2 |\xi_2|^{4/3} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1, \quad (5)$$

et en déduire que

$$C_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\xi_2|^{4/3} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (6)$$

5. En combinant (3) et (6), montrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + |\xi_1|^2 + |\xi_2|^{4/3}\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2 \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2\right). \quad (7)$$

L'inégalité (6) implique que, si $Lu = f$, on peut estimer la norme de la solution u dans l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{2/3}(\mathbb{R}^2)$ en termes des normes L^2 de f et de u .

6. *Question subsidiaire* Vérifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et une constante $C > 0$ tels que, si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $f = Lu$, on ait

$$\|u\|_{H^n(\mathbb{R}^2)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right).$$

En déduire que l'opérateur L est hypoelliptique.

Troisième partie On considère dans cette dernière partie l'équation parabolique

$$\partial_t u(x, t) = -(Lu)(x, t) = \partial_{x_1}^2 u(x, t) + x_1 \partial_{x_2} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

avec donnée initiale $u(\cdot, 0) = u_0$, où $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On suppose que la solution u est une fonction C^1 du temps à valeurs dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

1. On définit $v(x, t) = u(x_1, x_2 - x_1 t, t)$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et tout $t \geq 0$. Vérifier que

$$\partial_t v(x, t) = (\partial_{x_1} + t \partial_{x_2})^2 v(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

2. Déterminer l'équation d'évolution vérifiée par la transformée de Fourier partielle

$$\hat{v}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}^2} v(x, t) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

En déduire, pour tout $t \geq 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^2$, l'expression de $\hat{v}(\xi, t)$ en termes de $\hat{u}_0(\xi)$.

3. En inversant la transformation de Fourier, montrer que la solution de (9) avec donnée initiale u_0 s'écrit

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (10)$$

où $\Phi(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{t} + \frac{3x_1 x_2}{t^2} - \frac{3x_2^2}{t^3}\right)$. On rappelle que

$$\sqrt{\lambda} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda \xi^2} e^{i\xi x} d\xi = \sqrt{\pi} e^{-x^2/(4\lambda)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

4. Exprimer la solution $u(x, t)$ de (8) en termes de la donnée initiale u_0 .
5. Pourquoi la solution fondamentale $\Phi(x, t)$ de (9) est-elle strictement positive et vérifie-t-elle $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, t) dx = 1$ pour tout $t > 0$? Quel est le support singulier de la distribution $H(t)\Phi(x, t)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$, où H est la fonction de Heaviside?

Rappel $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{i\xi x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$, $\xi \in \mathbb{R}$.

VI-2. Corrigé de l'examen partiel du 13 mars 2015

Première partie

1. L'inégalité (1) étant évidente si $\lambda = 0$, on suppose désormais que $\lambda \neq 0$. Étant donné $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par la relation $u(x) = v(\lambda^{1/3}x)$, $x \in \mathbb{R}$. On a alors l'identité

$$u'(x) + \lambda x^2 u(x) = \lambda^{1/3} \left(v'(y) + y^2 v(y) \right) \Big|_{y=\lambda^{1/3}x}.$$

Si l'on admet que l'inégalité (1) est vraie lorsque $\lambda = 1$, on en déduit que

$$\|u' + \lambda x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} = |\lambda|^{1/6} \|v' + y^2 v\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_1 |\lambda|^{1/6} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_1 |\lambda|^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui établit l'inégalité (1) dans le cas général.

2. La solution générale de l'équation différentielle $u' + x^2 u = f$ s'écrit

$$u(x) = e^{-x^3/3} \left(A + \int_{-\infty}^x e^{y^3/3} f(y) dy \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

où A est une constante arbitraire. Comme $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par hypothèse, en multipliant les deux membres par $e^{x^3/3}$ et en faisant tendre x vers $-\infty$ on trouve que $A = 0$.

3. En utilisant la représentation ci-dessus et en appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient la majoration $|u(x)| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \phi(x)$ où

$$\phi(x) = e^{-x^3/3} \left(\int_{-\infty}^x e^{2y^3/3} dy \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est régulière, et une étude asymptotique (où l'on pourra utiliser par exemple la règle de L'Hôpital) révèle que

$$\phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}|x|}, \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty.$$

En particulier, $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, donc $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, ce qui montre l'inégalité (1) lorsque $\lambda = 1$.

Deuxième partie

1. Le symbole de L est $\sigma(x, \xi) = \xi_1^2 - ix_1\xi_2$ et son symbole principal $\sigma_2(x, \xi) = \xi_1^2$. L'opérateur L n'est donc elliptique en aucun point $x \in \mathbb{R}^2$, car $\sigma_2(x, \xi) = 0$ si $\xi = (0, \xi_2)$, quel que soit $\xi_2 \in \mathbb{R}$.
2. Si $f = Lu$, on trouve en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \Re \int_{\mathbb{R}} f \bar{u} dx &= \Re \int_{\mathbb{R}} \left(-\partial_1^2 u - x_1 \partial_2 u \right) \bar{u} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(|\partial_1 u|^2 - \frac{x_1}{2} \partial_2 |u|^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u|^2 dx \end{aligned}$$

La majoration (3) s'ensuit en appliquant l'inégalité de Hölder au membre de gauche.

3. La transformation de Fourier "remplace" ∂_{x_1} par $i\xi_1$, ∂_{x_2} par $i\xi_2$, et x_1 par $i\partial_{\xi_1}$. L'expression (4) s'en déduit aisément.
4. Si $\xi_2 = 0$, l'inégalité (5) est évidente. Si $\xi_2 \neq 0$, on déduit de (4) que

$$\partial_{\xi_1} \hat{u}(\xi) + \frac{1}{\xi_2} \xi_1^2 \hat{u}(\xi) = \frac{1}{\xi_2} \hat{f}(\xi).$$

En appliquant l'inégalité (1) à la fonction $\xi_1 \mapsto \hat{u}(\xi_1, \xi_2)$, notée $\hat{u}(\cdot, \xi_2)$, on trouve donc

$$\frac{1}{|\xi_2|} \|\hat{f}(\cdot, \xi_2)\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_1 \frac{1}{|\xi_2|^{1/3}} \|\hat{u}(\cdot, \xi_2)\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui montre (5). L'inégalité (6) s'en déduit en intégrant par rapport à ξ_2 .

5. L'inégalité (3) implique que

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi_1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

En combinant cette inégalité avec (6), on obtient facilement (7).

6. En multipliant l'inégalité (5) par $|\xi_2|^{2\ell-4/3}$ et en intégrant sur ξ_2 , on obtient pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$

$$\|\partial_2^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} |\xi_2|^{2\ell-4/3} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C \left(\|\partial_2^{\ell-1} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\partial_2^\ell f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right). \quad (*)$$

Pour contrôler les dérivées de u par rapport à x_1 , on dérive l'équation $Lu = f$ pour parvenir à l'identité

$$L(\partial_1^k u) = \partial_1^k f + k\partial_1^{k-1}\partial_2 u, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (**)$$

En prenant d'abord $k = 1$ et en appliquant (*), on trouve pour $\ell \in \mathbb{N}^*$

$$\|\partial_1 \partial_2^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \left(\|\partial_1 \partial_2^{\ell-1} f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_1 \partial_2^\ell f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_2^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\partial_2^{\ell+1} u\|_{L^2(\mathbb{R})} \right).$$

On prend ensuite successivement $k = 2, 3, \dots$, et on montre ainsi par induction que

$$\|\partial_1^k \partial_2^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{H^{k+\ell}(\mathbb{R})}, \quad k, \ell \in \mathbb{N}^*.$$

En utilisant en outre (7), on arrive à l'inégalité voulue, qui montre que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u \in H^n(\mathbb{R})$ si $f \in H^n(\mathbb{R})$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$. Enfin, un argument de localisation (non détaillé ici) permet de conclure que L est hypoelliptique.

Troisième partie

1. Par calcul direct, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t v(x_1, x_2, t) &= (\partial_t u - x_1 \partial_2 u)(x_1, x_2 - x_1 t, t) \\ &= \partial_1^2 u(x_1, x_2 - x_1 t, t) \\ (\partial_1 + t\partial_2)v(x_1, x_2, t) &= \partial_1 u(x_1, x_2 - x_1 t, t) \\ (\partial_1 + t\partial_2)^2 v(x_1, x_2, t) &= \partial_1^2 u(x_1, x_2 - x_1 t, t) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. La transformée de Fourier partielle $\hat{v}(\xi, t)$ vérifie l'équation

$$\partial_t \hat{v}(\xi, t) = (i\xi_1 + it\xi_2)^2 \hat{v}(\xi, t) = -(\xi_1^2 + 2t\xi_1\xi_2 + t^2\xi_2^2) \hat{v}(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

En intégrant cette équation différentielle, et en remarquant que $v(\cdot, 0) = u_0$, on trouve

$$\hat{v}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \exp\left(-\left[\xi_1^2 t + \xi_1 \xi_2 t^2 + \frac{1}{3}\xi_2^2 t^3\right]\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0.$$

3. En inversant la transformation de Fourier, on trouve l'expression (10) avec

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\left[\xi_1^2 t + \xi_1 \xi_2 t^2 + \frac{1}{3}\xi_2^2 t^3\right]\right) e^{i\xi \cdot x} d\xi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} \exp\left(-\frac{x_1^2}{t} + \frac{3x_1 x_2}{t^2} - \frac{3x_2^2}{t^3}\right), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la seconde, on peut (par exemple) écrire

$$\xi_1^2 t + \xi_1 \xi_2 t^2 + \frac{1}{3}\xi_2^2 t^3 = t\left(\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 t\right)^2 + \frac{1}{12}\xi_2^2 t^3,$$

et intégrer d'abord sur ξ_1 puis sur ξ_2 , en utilisant l'identité rappelée dans l'énoncé.

4. On conclut que

$$\begin{aligned} & u(x, t) \\ &= v(x_1, x_2 + x_1 t, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x_1 - y_1, x_2 + x_1 t - y_2, t) u_0(y_1, y_2) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x - y, t) u_0(y_1, y_2 + x_1 t) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \end{aligned}$$

5. Le principe du maximum parabolique s'applique à l'équation (8) ou (9), et implique que la solution est strictement positive pour tout $t > 0$ si la donnée initiale est positive et non identiquement nulle. Cette propriété équivaut à la positivité stricte de la solution fondamentale $\Phi(x, t)$. Par ailleurs, la fonction $v(x, t) \equiv 1$ est manifestement solution de (9), et ceci implique que $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x, t) dx = 1$ pour tout $t > 0$. Enfin, le support singulier de la distribution $H(t)\Phi(x, t)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ est réduit à l'origine, comme dans le cas de l'équation de la chaleur.

VI-3. Examen final du 19 mai 2015

On considère dans ce problème l'équation de Schrödinger non linéaire

$$i\partial_t u(x, t) + \Delta_x u(x, t) = \lambda |u(x, t)|^{2\alpha} u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où $i = \sqrt{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, et $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

Première partie On étudie pour commencer l'équation linéaire obtenue en posant $\lambda = 0$ dans (1). Soit $X = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R}^n , à valeurs complexes, muni du produit scalaire usuel

$$(u, v)_X = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}(x)v(x)dx.$$

Étant donné $t \geq 0$, on définit un opérateur linéaire $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ par la formule

$$\widehat{(S(t)u)}(\xi) = e^{-i|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi), \quad u \in X, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

où \hat{u} désigne la transformée de Fourier de u . On utilise les conventions suivantes pour la transformation de Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi.$$

1. Vérifier que $S(t)$ est un opérateur unitaire dans X pour tout $t \geq 0$.
2. Montrer que la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu dans X .
3. Soit $A : D(A) \rightarrow X$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Vérifier que $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ et que $Au = i\Delta u$ pour tout $u \in D(A)$.

Rappel Pour tout $s \geq 0$, on désigne par $H^s(\mathbb{R}^n) \subset X$ l'espace de Sobolev muni de la norme définie par

$$\|u\|_{H^s}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

4. Déterminer le spectre de l'opérateur A , et majorer la norme de la résolvante $(z - A)^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.
5. Si u appartient à la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vérifier que

$$(S(t)u)(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4it}\right) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

où l'on utilise la détermination principale de la racine carrée, telle que $\sqrt{\pm i} = e^{\pm i\pi/4}$. En déduire l'estimation de dispersion

$$\|S(t)u\|_{L^\infty} \leq \frac{\|u\|_{L^1}}{(4\pi t)^{n/2}}, \quad t > 0.$$

Indication : Pour tout $t > 0$ fixé, on pourra observer que $S_\epsilon(t)u$ converge vers $S(t)u$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0+$, où $S_\epsilon(t) \in \mathcal{L}(X)$ est défini par

$$\widehat{(S_\epsilon(t)u)}(\xi) = e^{-(i+\epsilon)|\xi|^2 t} \hat{u}(\xi), \quad u \in X, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Deuxième partie On suppose désormais que $\lambda \neq 0$, et on fixe un réel $s > n/2$. On note $X_s = H^s(\mathbb{R}^n) \subset X$.

1. Pour tout $t \geq 0$, on note encore $S(t) \in \mathcal{L}(X_s)$ l'opérateur linéaire défini sous (2). Justifier brièvement le fait que la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de contractions dans X_s , et déterminer le générateur infinitésimal de ce semi-groupe.
2. Étant donné $u \in X_s$, on définit la fonction $F(u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$(F(u))(x) = |u(x)|^{2\alpha} u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Vérifier que $F(u) \in X_s$, et que l'application $F : X_s \rightarrow X_s$ ainsi construite est lipschitzienne sur les bornés de X_s .

Rappel L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre (pour le produit point par point) lorsque $s > n/2$. Il existe donc une constante $C_s > 0$ telle que, pour tout $u, v \in X_s$, on ait l'inégalité $\|uv\|_{X_s} \leq C_s \|u\|_{X_s} \|v\|_{X_s}$.

3. Soit $u_0 \in X_s$. On considère dans X_s l'équation intégrale

$$u(t) = S(t)u_0 - i\lambda \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Si $u_0 \in X_{s+2}$ et si $u \in C^1([0, T], X_s) \cap C^0([0, T], X_{s+2})$ est une solution de l'équation intégrale (3), écrire l'équation différentielle vérifiée par u , et comparer le résultat avec l'équation aux dérivées partielles (1).

4. En invoquant un résultat du cours, montrer que le problème de Cauchy pour l'équation intégrale (3) est localement bien posé dans l'espace X_s . En particulier, si $\|u_0\|_{X_s} \leq r$, on donnera une minoration du temps d'existence de la solution en termes des seules quantités r, λ, α et C_s .
5. Étant donné $u_0 \in X_s$, on note $T^*(u_0) \in]0, +\infty]$ le temps maximal d'existence de la solution de (3). Si $T^*(u_0) < \infty$, expliquer pourquoi la solution $u \in C^0([0, T^*(u_0)[, X_s)$ de l'équation intégrale (3) vérifie $\|u(t)\|_{X_s} \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T^*(u_0)$.

Troisième partie Dans cette dernière partie, on se restreint au cas de la dimension un d'espace ($n = 1$), et on travaille dans l'espace de Sobolev $X_1 = H^1(\mathbb{R})$ ($s = 1$). Étant donné $u_0 \in X_1$, on note $u \in C^0([0, T^*(u_0)[, X_1)$ la solution maximale de l'équation (3) avec donnée initiale u_0 . Pour $0 \leq t < T^*(u_0)$, on définit la charge

$$Q(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 dx,$$

ainsi que l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2\alpha+2} \|u(t)\|_{L^{2\alpha+2}}^{2\alpha+2} \equiv \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} |u_x(x, t)|^2 + \frac{\lambda}{2\alpha+2} |u(x, t)|^{2\alpha+2} \right\} dx.$$

1. Vérifier que $Q(t) = Q(0)$ pour tout $t \in [0, T^*(u_0)[$. Indication : On pourra supposer d'abord que $u \in C^1([0, T^*(u_0)[, X) \cap C^0([0, T^*(u_0)[, X_2)$ et calculer dans ce cas la dérivée $Q'(t)$; on conclura ensuite par un argument de densité.
2. Montrer de même que $E(t) = E(0)$ pour tout $t \in [0, T^*(u_0)[$.
3. On se place dans le cas "défocalisant" où $\lambda > 0$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que la norme $\|u(t)\|_{H^1}$ est majorée pour tout $t \in [0, T^*(u_0)[$ par une quantité ne dépendant que de la donnée initiale. En déduire que $T^*(u_0) = +\infty$ pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.
4. On considère désormais le cas "focalisant" où $\lambda < 0$. Établir dans ce cas la minoration

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 - \frac{|\lambda|}{2\alpha+2} \|u_x(t)\|_{L^2}^\alpha \|u(t)\|_{L^2}^{2+\alpha}, \quad 0 \leq t < T^*(u_0). \quad (4)$$

Indication : On admettra l'inégalité $\|u\|_{L^\infty}^2 \leq \|u_x\|_{L^2} \|u\|_{L^2}$, valable pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$.

5. Si $\alpha = 1$, déduire de (4) que

$$E(t) \geq \frac{1}{4} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\lambda^2}{16} \|u(t)\|_{L^2}^6, \quad 0 \leq t < T^*(u_0),$$

et en conclure que $T^*(u_0) = +\infty$ pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.

6. Si $\alpha = 2$, montrer de même que

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \|u_x(t)\|_{L^2}^2 \left(1 - \frac{|\lambda|}{3} \|u(t)\|_{L^2}^4\right), \quad 0 \leq t < T^*(u_0),$$

et en déduire que $T^*(u_0) = +\infty$ pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0\|_{L^2} < (3/|\lambda|)^{1/4}$.

7. Si $\alpha \geq 3$, déduire de (4) que

$$\|u_x(t)\|_{L^2}^2 \leq \|(u_0)_x\|_{L^2}^2 + \frac{|\lambda|}{\alpha+1} \|u_x(t)\|_{L^2}^\alpha \|u_0\|_{L^2}^{2+\alpha}, \quad 0 \leq t < T^*(u_0).$$

En conclure que, si $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ vérifie une condition de petitesse de la forme

$$|\lambda| \|u_0\|_{L^2}^{\alpha+2} \|(u_0)_x\|_{L^2}^{\alpha-2} \leq c(\alpha),$$

où $c(\alpha)$ est une constante strictement positive, alors $T^*(u_0) = +\infty$.