

WEEK-END MATHÉMATIQUE 2015

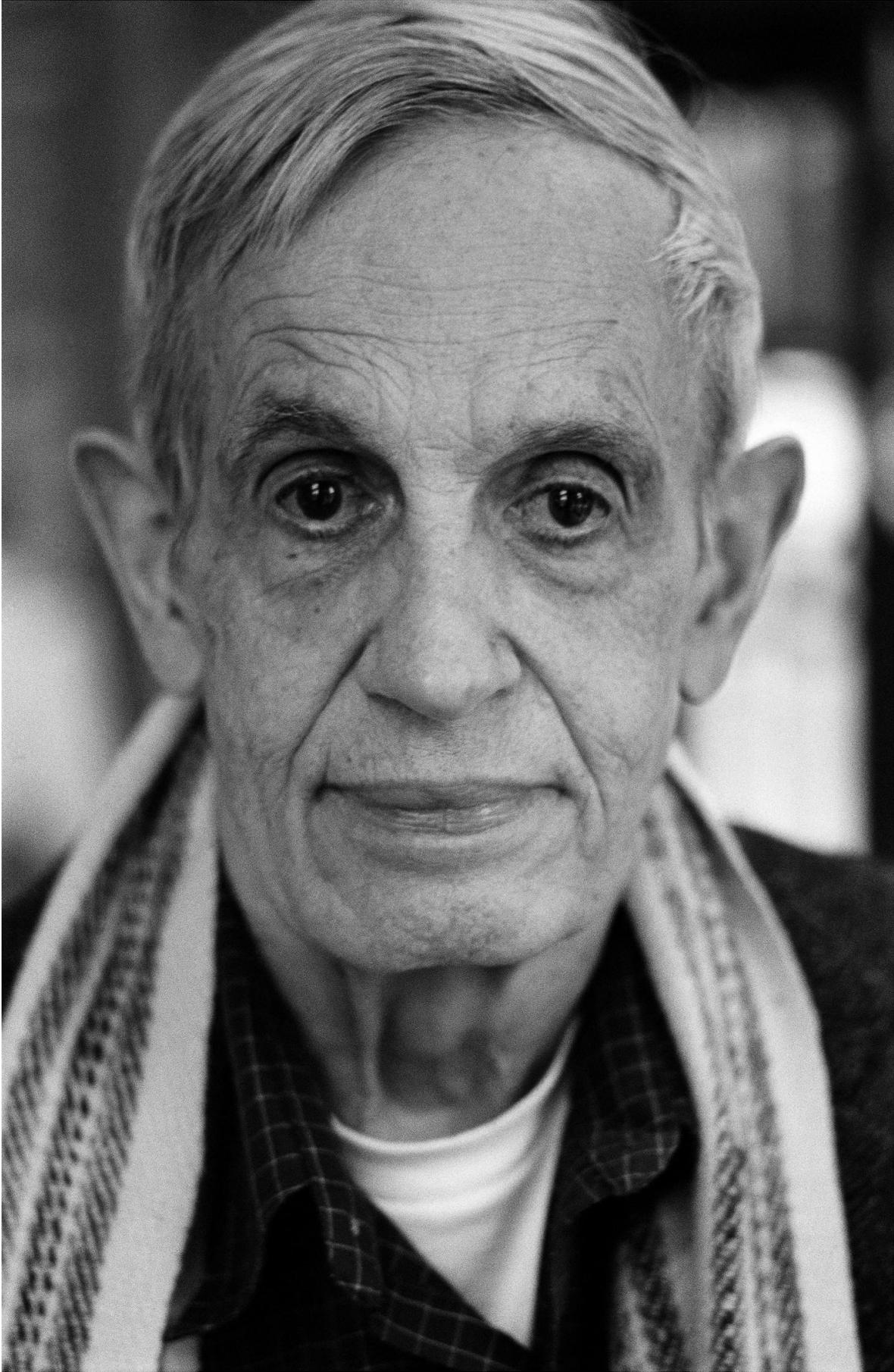
Plongements isométriques de Nash

Intervenant

CÉDRIC VILLANI

Rédacteur

IDRISS MAZARI





Un week-end au château du Goutelas

Haute tradition du département de mathématiques de l'ENS de Lyon et de l'UMPA, le week-end mathématique fêtait cette année son treizième anniversaire au château du Goutelas, sous la surveillance bienveillante de Jean Papon et en compagnie du non moins bienveillant Cédric Villani. Après une session 2014 consacrée aux théorèmes mathématiques démontrés par des méthodes physiques, les étudiants et enseignants se sont penchés en compagnie de l'orateur sur les plongements isométriques de Nash, mathématicien foudroyant de la seconde moitié du siècle dernier. Ce week-end n'aurait pas pu voir le jour sans les organisateurs (Vincent Calvez, Damien Gaboriau, Étienne Ghys, Marie Lhuissier, Grégory Miermont, Olga Romaskevich et Valentin Seigneur) ni l'investissement de C. Villani. Nous profitons de l'occasion pour tous les remercier.

Ce document tente de rendre compte, le plus fidèlement possible, du contenu des interventions de C. Villani au cours de ce week-end. Il va de soi qu'aucune des erreurs/fautes/bourdes qui peuvent subsister dans ce rapport ne saurait lui être imputée. Les photos sont celles d'Olga Romaskevich.

En vous souhaitant une agréable lecture,

I. Mazari

Table des matières

Un week-end au château du Goutelas	iii
I Exposé introductif	1
I John Nash	1
II Le problème du plongement isométrique	1
II.1 Construction de variétés riemanniennes	2
II.2 Plongements dans l'espace euclidien	3
II.3 Les équations du plongement	4
II.4 Ce que Nash prouva	5
II La démonstration du théorème de Nash	7
I Rigidité et flexibilité	7
I.1 Motivations et terminologie	7
I.2 Théorie locale	7
I.3 Théorie globale	8
I.4 Raffinements et généralisations	8
II Quelques outils et méthodes supplémentaires pour l'étude des plongements et de la rigidité	9
II.1 Les équations de Codazzi-Mainardi et l'équations de Gauss	9
II.2 Les formules de Minkowski et la rigidité de la sphère	10
III Le théorème de Nash	11
III.1 Idées et concepts de la démonstration	11
III.2 Ondulations de Nash	11
III.3 Décomposition de métriques	13
III.4 Retour à la démonstration	14
III.5 Quelques raffinements	15
III Conclusion	17

I. Exposé introductif

I-A. John Nash

Avant toute chose, remarquons que le titre « Plongements isométriques de Nash » comporte plusieurs mots sans doute inconnus à une partie de l'auditoire : Qu'est-ce qu'un plongement ? Qu'est-ce qu'une isométrie ? Qu'est-ce que Nash ? Commençons par le dernier point, sans doute plus abordable : Nash, mathématicien majeur de la seconde partie du vingtième siècle, fut un contributeur spectaculaire de la théorie des jeux et accomplit des travaux révolutionnaires en analyse géométrique ; il fascine par son histoire, tragique à maints égards, au point qu'il est le héros d'un film (*A beautiful mind*). Il est devenu un symbole du génie créatif : c'est un mathématicien qui ne se rattache à aucune école particulière, qui a reçu le prix Nobel (d'économie) sur le tard, après être sorti de l'hôpital psychiatrique, pour des travaux réalisés dans une thèse rédigée à toute allure. Entre sa thèse et son internement, justement, il trouve le temps de bouleverser de fond en comble l'analyse géométrique. Il reçoit en 2015 le prix Abel, récompense la plus prestigieuse des mathématiques ; ce prix, qui aurait notamment pu lui permettre d'enfin tourner le dos à certains problèmes, par exemple d'ordre financier, ne lui aura apporté qu'un plaisir de courte durée : il meurt trois jours après la cérémonie, dans un accident de taxi¹. Cédric Villani, membre du jury du prix Abel, aura donc été son dernier chairman.

Mais revenons au problème qui nous intéresse, celui des plongements isométriques. Nous sommes au début des années 50, Nash travaille au MIT. En 1951, alors qu'il n'a que 24 ans, il se dispute, comme d'habitude, avec son collègue Ambrose dans les couloirs de la prestigieuse institution. Les deux mathématiciens se détestent et travaillent tous les deux en géométrie différentielle : Ambrose se préoccupait des fondements du domaine, tandis que Nash s'intéressait à des questions plus spéculatives. Afin de retranscrire l'animosité qui pouvait exister entre les deux, retenons cette citation d'Ambrose :

He's a bright guy but conceited as Hell, childish as Wiener, hasty as X, obstreperous as Y, for arbitrary X and Y.

Warren Ambrose à Paul Halmos, 1953.

Ambrose, qui surnommait son jeune collègue « Gnash » (ce qui signifie « ricaner », « grincer des dents », ...), lui lance un jour un défi : « Si tu es si bon, pourquoi ne t'attaques-tu pas au problème du plongement isométrique ? » Nash s'y attelle sans rien connaître du problème et après trois années, le résout ! Émoi, joie et stupéfaction dans les cœurs de mathématiciens.

I-B. Le problème du plongement isométrique

Présent implicitement dans l'article fondateur de 1854 de Riemann et explicitement dans les travaux de Schläfli en 1873, le problème avait donc un âge plus que respectable au moment où Nash se met à travailler dessus.

Riemann, dans *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, avait défini une notion de **variété riemannienne lisse**, aussi appelée **géométrie non-euclidienne**. De manière un peu lâche, une variété riemannienne est une collection de morceaux de \mathbb{R}^n déformés puis recollés ensemble, sans que cette géométrie soit nécessairement définie comme une sous-géométrie d'un certain \mathbb{R}^k . Cette définition faisait suite à certains travaux du dix-neuvième siècle qui s'intéressaient notamment aux surfaces dans \mathbb{R}^3 , ou aux sous-variétés de manière plus générale. La question était donc de savoir si cette nouvelle manière de faire de la géométrie était réellement plus générale que l'ancienne manière, c'est-à-dire en se plaçant au sein d'un espace, d'une géométrie de référence. Dorénavant, nous noterons \mathbb{E}^n l'espace \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne canonique.

Un exemple naturel de géométrie non-euclidienne est la géométrie sur la sphère $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{E}^3$: par exemple, les êtres humains habitent sur une sphère, la Terre. Remarquons que nous n'avons pas besoin d'aller dans l'espace pour mesurer les distances à la surface de la planète : les géographes ont pour cela des cartes, c'est-à-dire des représentations planes de la surface du globe qui ne sont pas exactes, mais déformées par rapport à la réalité : pour mesurer une distance, il faut donc imaginer une échelle qui varie d'un point à l'autre de la carte. L'idée de Riemann était de généraliser cela et de l'adapter à des géométries arbitraires sans évoquer un espace euclidien de référence \mathbb{E}^k dans lequel la géométrie est plongée.

1. C. Villani : « Il n'aura rien fait comme personne. Vous en connaissez beaucoup, vous, des gens qui meurent dans des accidents de taxi ? »

I-B- 1. Construction de variétés riemanniennes

Donnons à présent deux constructions équivalentes de géométries non-euclidiennes :

Première méthode : définir un calcul différentiel. On part d'un espace métrique (\mathcal{X}, d) très gentil : complet, localement compact. On souhaiterait définir sur cet espace métrique une notion de vecteurs tangents et de longueur de ces vecteurs. Pour munir \mathcal{X} d'une structure de calcul différentiel, on utilise la notion de **carte**. Une carte, c'est un couple (U, φ) , où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $\varphi : U \rightarrow \mathcal{X}$ est un homéomorphisme. C'est une manière de représenter localement notre espace métrique. Il est en revanche illusoire d'espérer avoir en général une carte globale : pour la Terre, il faut au moins deux ouverts pour avoir une carte. En effet, si on avait accès à une représentation globale de la Terre, le pôle sud serait éclaté. Pour la Terre, on peut choisir la technique traditionnelle de projection stéréographique : les deux cartes sont \mathbb{S}^2 privée de son pôle Nord et \mathbb{S}^2 privée de son pôle Sud. On impose de plus une condition de compatibilité : si (U, ψ) et (V, φ) sont deux cartes, il faut que l'application $\varphi^{-1} \circ \psi : U \rightarrow V$ soit une application de classe \mathcal{C}^∞ . Cette structure permet d'avoir des coordonnées locales et de faire du calcul différentiel : une application $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ peut se voir, localement, comme une application $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ grâce aux cartes locales ; on pourra donc parler de ses dérivées partielles. Ceci nous permet alors d'introduire la notion de **vecteur tangent** : on se place en $x \in \mathcal{X}$ et on prend une carte locale (U, φ) autour de x . Un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$ peut être vu comme une façon de dériver les fonctions, c'est-à-dire que l'on peut lui associer l'opérateur

$$D_\xi : f \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \bar{f}(x + t\xi),$$

opérateur défini sur les fonctions différentiables de M dans \mathbb{R}^k . C'est ce que l'on appelle un vecteur tangent à \mathcal{X} en x . On note $T_x \mathcal{X}$ l'espace tangent à \mathcal{X} en x ; c'est un espace vectoriel de dimension n . Remarquons que cette définition coïncide avec la notion usuelle de vecteur tangent, pour la sphère par exemple.

L'étape suivante est d'associer des longueurs à ces vecteurs. Dans \mathbb{E}^n , pour mesurer des vecteurs, on utilise une forme quadratique sur \mathbb{R}^n , le produit scalaire usuel. De même, dans (\mathcal{X}, d) , on associe à tout point x une forme quadratique g_x sur $T_x \mathcal{X}$ définie positive et qui varie de manière lisse en x : on a donc un produit scalaire sur chaque plan tangent, qui permet de définir, pour $\xi \in T_x \mathcal{X}$, sa longueur comme

$$|\xi| := \sqrt{g_x(\xi, \xi)}. \quad (\text{I.1})$$

Vues dans \mathbb{R}^n , les g_x sont des matrices symétriques définies positives, que l'on peut représenter par leurs coordonnées : $g_x = \{g_{i,j}(x)\}_{i,j \in \mathbb{N}_n}$, où les $g_{i,j}$ sont des fonctions lisses sur \mathcal{X} , de sorte que

$$\forall \xi \in T_x \mathcal{X}, \quad g_x(\xi) = \sum_{i,j} g_{i,j}(x) \xi^i \xi^j.$$

Cette « métrique » n'est pas euclidienne ; en revanche, si on gèle la variable x , on retombe sur une géométrie euclidienne : cette géométrie est donc « tangente », en un sens qu'il faudrait préciser, à la géométrie euclidienne.

Deuxième méthode : la méthode métrique. Cette méthode s'appuie sur l'étude des distances. Supposons vouloir aller de New-York à Paris. Comment définir la distance entre les deux villes ? On a remarqué que pour calculer la distance grâce à une carte, il faut prendre gare au fait que l'échelle varie continûment d'un point à l'autre. En chaque point de la courbe, la longueur du vecteur vitesse en ce point sera donc donnée en tenant compte de la distorsion des longueurs en ce point. De manière plus générale, si V est un ouvert de \mathbb{R}^n , la donnée d'une forme quadratique définie positive dépendant de manière lisse du point g sur un voisinage de V permet de définir une **distance géodésique** associée à g : en notant, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma(u, v)$ l'ensemble des courbes continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R}^n joignant u à v , on note

$$d_g(u, v) := \inf_{\gamma \in \Gamma(u, v)} \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Pour revenir aux variétés riemanniennes, on repart, comme dans la première méthode, d'un espace métrique (\mathcal{X}, d) complet et localement compact, et on suppose que pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe un

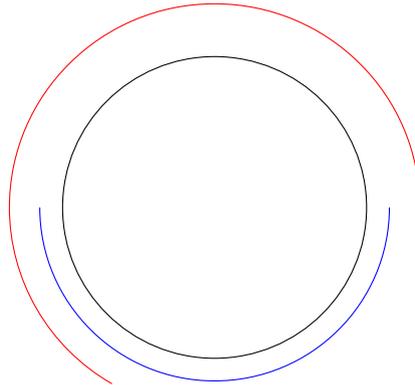
un voisinage U de x , un ouvert V de \mathbb{R}^n et une forme quadratique g définie positive et lisse sur un voisinage de V tels que (U, d) soit isométrique à (V, d_g) où d_g est la distance induite par g .

En d'autres termes, se donner une géométrie non-euclidienne, c'est choisir, de manière complètement arbitraire, une façon de mesurer localement les distances.

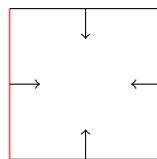
Ces deux constructions sont équivalentes. Pour explorer plus avant ce point de vue métrique, la lectrice pourra se reporter au traité de Burago et Ivanov, *A course in metric geometry*.

I-B- 2. Plongements dans l'espace euclidien

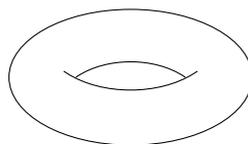
Quelques exemples de géométries plongées Un des exemples les plus simples est celui de la sphère $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{E}^2$ défini par $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui n'est pas isométrique à \mathbb{R} . Si on prend le premier point de vue, on peut choisir les cartes suivantes (en rouge et en bleu) :



Un autre exemple, qui nous sera utile plus tard, est le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Cette géométrie correspond à la géométrie du PacMan : il s'agit du carré unité dans \mathbb{R}^2 où l'on identifie les côtés opposés comme suit :



de sorte qu'après avoir recollé les bords identiques, on obtient le tore/donut/bouée



Plongements dans \mathbb{E}^k La question est la suivante : étant donnée une variété riemannienne (M, g) de dimension n , peut-on la réaliser comme une sous-géométrie d'un espace euclidien \mathbb{E}^k via un plongement isométrique? Rappelons qu'un plongement isométrique est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme Φ qui est une isométrie de (M, g) dans $\Phi((M, g))$; essentiellement, cela signifie que mesurer les vitesses dans M ou dans \mathbb{E}^k revient exactement au même. Avec la première construction, on devrait donc avoir :

$$\forall \xi \in T_x M, \quad \|d_x \Phi \cdot \xi\|_{\mathbb{E}^k} = \sqrt{g_x(\xi, \xi)}. \tag{I.2}$$

Avec la seconde méthode, Φ doit être une isométrie de (M, d_g) dans $\Phi(M)$ muni de la distance

$$d : (u, v) \mapsto \inf_{\gamma \in \Gamma(u, v), \gamma \in \Phi(M)} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbb{E}^k} dt. \tag{I.3}$$

Dans cette seconde méthode, on ne mesure plus les distances dans une carte locale mais, pour reprendre l'analogie avec la Terre, comme si l'on travaillait avec deux punaises et un bout de ficelle reliant ces deux punaises et plaqué sur la mappemonde. Cela peut sembler anodin, mais certains débats houleux

sont issus d'une incompréhension de la manière de mesurer les distances : aux États-Unis, au moment de la construction des premières mosquées, la question se posait de savoir dans quelle direction il fallait orienter les mosquées pour qu'elles pointent vers la Mecque. Quand on travaille avec la distance géodésique depuis New-York, il faut se tourner vers le Nord! ce qui semblait absurde à certaines personnes.

Il est, certes, plus agréable de travailler de cette manière, mais on a besoin de plus de dimensions!

Une remarque : historiquement, les mathématiciens (Euler et Gauss, notamment) ont commencé par l'étude des géométries plongées, et plus particulièrement par l'étude des surfaces plongées dans \mathbb{E}^3 . Ils ne pensaient d'ailleurs pas aux surfaces comme nous en avons l'habitude aujourd'hui mais plus comme à des bords de solides pleins. Mais beaucoup de surfaces ne sont pas des bords! Il suffit de penser au ruban de Möbius. Ce n'est qu'ensuite que les mathématiciens se sont affranchis de ce point de vue pour fonder la géométrie intrinsèque.

La géométrie hyperbolique Aussi appelé géométrie de Lobatchevski, c'est une géométrie d'une importance fondamentale, tant sur le plan mathématique qu'historique. Il s'agit de l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, muni de la métrique

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, g_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

On le note \mathbb{H}^2 . C'est une des géométries non-euclidiennes où l'on peut accéder aux équations explicites des géodésiques (qui sont des droites verticales ou des arcs de cercles, qui est homogène (il n'y a pas de point privilégié) et qui est également un espace modèle. C'est une géométrie de dimension 2, en vertu de quoi une question naturelle est : peut-on la plonger isométriquement dans \mathbb{E}^3 ? La réponse est non! Ce théorème délicat est dû à David Hilbert. Localement, l'espace hyperbolique se comporte comme le col d'une selle de cheval; on pourrait donc tenter de tricoter un ensemble de selles de cheval ensemble. Cette méthode, bien qu'ayant l'avantage de fournir une agréable activité manuelle s'avère impossible, et le tricoteur dépité finit par avoir une espèce de salade tourmentée entre ses mains. Bon, admettons ce résultat de Hilbert. Peut-on plonger \mathbb{H}^2 dans \mathbb{E}^{30} ? Alors là, oui, et il n'est même pas nécessaire d'aller jusqu'en dimension 30! \mathbb{H}^2 se plonge isométriquement dans \mathbb{E}^6 (c'est le **théorème de Blanusa**, qui date des années 50). En revanche, on ne connaît toujours pas la dimension optimale. C'est un problème typique du domaine. Ce qui est sûr, c'est qu'on sait immerger le plan hyperbolique dans \mathbb{E}^5 (immersion : on autorise les auto-intersections). Apparemment, Gromov propose dans un de ses livres de plonger \mathbb{H}^2 dans \mathbb{E}^5 comme exercice. On revient donc à notre question initiale : peut-on plonger isométriquement une géométrie (M, g) dans un espace euclidien \mathbb{E}^m pour m assez grand? Cette question n'a pas d'intérêt pratique (on sait à peu près travailler de manière intrinsèque), mais c'est un point fondamental, ne serait-ce que dans un souci de cohérence intellectuelle.

I-B- 3. Les équations du plongement

On travaille ici avec une variété riemannienne (M, g) de dimension n . Afin d'avoir une expression sur laquelle travailler, nous allons essayer d'établir une équation aux dérivées partielles qui caractérise les plongements isométriques. En revenant à la manière dont nous avons introduit les variétés riemanniennes, on se souvient qu'un plongement $\Phi : M \rightarrow \mathbb{E}^N$ doit vérifier, pour être une isométrie,

$$\forall x \in M, \forall \xi \in T_x M, \|d\Phi_x \cdot \xi\|_{\mathbb{E}^N}^2 = g_x(\xi, \xi).$$

En écrivant $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^m)$, on voit que cette condition se réécrit en

$$\forall x \in M, \forall \xi \in T_x M, \sum_{i,j} g_{i,j}(x) \xi^i \xi^j = \sum_{i,j} \left\{ \sum_{\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^j}(x) \right\} \xi^i \xi^j.$$

On peut désormais identifier les coefficients de la forme quadratique. Malheureusement, cette condition ne suffit pas, et il faut rajouter l'hypothèse d'injectivité de Φ . Un difféomorphisme Φ doit donc vérifier les deux conditions suivantes :

$$\Phi \text{ est injective et} \tag{PI1}$$

$$\forall x \in M, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \sum_{\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^i}(x) \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^j}(x) = g_{i,j}(x). \tag{PI2}$$

On est donc passé à un véritable problème d'analyse. Pendant longtemps, on avait pensé que la réponse à cette question viendrait d'une méthode abstraite, d'une astuce de sioux. Regardons un peu la deuxième condition : par symétrie, il y a $s_n := \frac{n(n+1)}{2}$ équations pour N fonctions inconnues. Il est donc intuitif de chercher un plongement dans \mathbb{E}^{s_n} . Ainsi, pour $n = 2$, on pourrait tenter de chercher des plongements dans \mathbb{E}^3 , et pour $n = 3$ des plongements dans \mathbb{E}^6 . Le cas des surfaces ($n = 2$) a sollicité énormément d'énergie. Donnons quelques-uns des théorèmes les plus frappants du domaine (on travaille avec des surfaces lisses).

- Toute surface se plonge localement dans \mathbb{E}^4 .
- Certaines surfaces ne se plongent pas globalement dans \mathbb{E}^4 .
- Toute surface se plonge globalement dans \mathbb{E}^{10} .

Une conjecture qui tient encore aujourd'hui est que toute surface se plonge localement dans \mathbb{E}^3 . Avant Nash, il y avait deux résultats majeurs :

Le théorème de Janet-Cartan Ce théorème date de 1926/1927, et énonce que toute variété analytique M de dimension n se plonge localement isométriquement analytiquement dans \mathbb{E}^{s_n} , et cette dimension est optimale.

Le théorème de Whitney Ce théorème, qui date de 1936, énonce que toute variété lisse M de dimension n se plonge, non isométriquement, dans \mathbb{R}^{2n} . La preuve de ce théorème est très jolie et ne demande pas d'effort analytique considérable. On pensait pouvoir adapter ce genre de raisonnement pour les plongements isométriques.

I-B- 4. Ce que Nash prouva

Nash a prouvé trois résultats majeurs :

Le théorème de plongement peu lisse Ce résultat date de 1954 et a été amélioré par Kuiper en 1955. Il énonce que si une variété riemannienne (M, g) de dimension n se plonge non isométriquement dans un certain \mathbb{R}^N avec $N \geq n + 1$, alors (M, g) se plonge isométriquement dans \mathbb{E}^{N+2} , mais le plongement isométrique donné par ce théorème est uniquement de classe \mathcal{C}^1 . Il n'est nul part deux fois dérivable. Ce résultat est donc un résultat en très basse codimension. On peut exhiber des exemples où le plongement n'est pas de classe \mathcal{C}^2 .

Ainsi, le tore \mathbb{T}^2 se plonge isométriquement dans \mathbb{E}^3 , mais pas par le plongement canonique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi x)(1 + r \cos(2\pi y)) \\ \sin(2\pi x)(1 + r \cos(2\pi y)) \\ r \sin(2\pi y) \end{pmatrix}.$$

Le plongement isométrique est en fait celui du tore plat, conceptuellement impressionnant, et que l'on a pu réaliser grâce aux impression 3d. On voit (peut-être) sur le photo que cet objet a une structure quasiment fractale, faite d'ondulations et de replis. En fait, Nash montre même qu'un tel plongement isométrique est possible dans une boule $\mathbb{B}(0, \varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Voici une réalisation visuelle d'une étape de la construction du tore plat plongé par V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, D. Rohmer et B. Thibert :



Le théorème de plongement lisse C'est un théorème de 1956. Nash réussit à prouver que pour toute variété riemannienne (M, g) de dimension n , il existe un plongement isométrique Φ lisse de (M, g) dans un espace \mathbb{E}^N . À vrai dire, Nash avait prouvé ce théorème avec $N = 3s_n + 4n$ si M est compacte et avec $N = (3n + 11)s_n$ si M est non-compacte. En fait, sa preuve du cas non-compact était fautive. Gromov a réussi à descendre à $N = s_n + 3n + 5$. Enfin, Gunther, avec une méthode différente, passe à $N = s_n + n + \max(n, 5)$. Gromov n'a jamais accepté la preuve de Gunther.

Le théorème de plongement analytique Prouvé dans un des moments de lucidité de Nash entre des séjours en hôpital psychiatrique, en 1966, il énonce que pour toute variété analytique (M, g) de dimension n , il existe un plongement isométrique analytique Φ de (M, g) dans un certain \mathbb{E}^N pour un N assez grand.

Les enseignements à tirer de ces théorèmes Plusieurs points sont à retenir :

- La réponse à la question de Schläfli est positive.
- Le point le plus important de l'histoire, ce sont les méthodes introduites par Nash dans l'étude de ce problème, qui sont au nombre de deux : une méthode pour la basse régularité du plongement, qui a donné naissance à l'**intégration convexe**, et la **théorie de Nash-Moser**, l'arme fatale en ce qui concerne les approches perturbatives.
- Le plongement donné dépend de manière cruciale de la régularité cherchée, ce qui n'est pas évident a priori : en effet, les conditions sur le plongement ne dépendent que des dérivées premières ! On observe également qu'il y a un monde entre la haute et la basse régularité : en régularité \mathcal{C}^1 , il y a une grande souplesse et une grande richesse de plongement. En régularité supérieure ou égale à 2, il y a une grande rigidité et une faible diversité de plongements. Nous en reparlerons.

Ce qu'il se passe, dans ces théorèmes, ce qui intervient de manière cruciale, c'est un des principaux invariants par isométrie de classe \mathcal{C}^2 des variétés riemanniennes : la courbure. Cette dépendance en la régularité de l'isométrie pose encore des questions aujourd'hui : quelle est la régularité minimale à avoir pour préserver la courbure ? On suppose que la séparation se fait pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Un fait compris récemment est que la courbure est invariante pour des isométries de classe $\mathcal{C}^{1,\frac{2}{3}}$, au moins en courbure positive.

II. La démonstration du théorème de Nash

II-A. Rigidité et flexibilité

II-A-1. Motivations et terminologie

Nous nous sommes demandé, lors de l'exposé précédent, s'il était possible de réaliser des plongements isométriques. Maintenant, une nouvelle question est : s'il existe, un tel plongement est-il unique ? Posée comme ceci, la réponse à cette question est évidemment négative : il suffit d'appliquer n'importe quelle isométrie euclidienne à l'image du plongement pour obtenir un nouveau plongement isométrique. La question sera donc plutôt : s'il existe, un tel plongement est-il unique à isométrie euclidienne près ? La réponse est toujours non : prenons une feuille de papier, plions la de différentes manières. Le problème est qu'une feuille de papier est flexible. Évidemment, cette notion d'unicité dépend de manière cruciale de la dimension du plongement : si on essaye de plonger \mathbb{S}^2 dans \mathbb{E}^4 par une application de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ a(x_1) \\ b(x_2) \\ \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \end{pmatrix},$$

la seule condition pour qu'il y ait plongement isométrique est que $(a')^2 + (b')^2 = 1$. On a donc un nombre prodigieux de plongements possibles ! La morale-évidente- est que plus l'on rajoute de dimensions au plongement, plus on a de marge pour modifier ce plongement. La question de l'unicité est donc plus pertinente lorsque l'on considère le plongement dans un espace euclidien de dimension optimale. Pour la sphère, c'est par exemple dans \mathbb{E}^3 .

Ce genre de considérations nous amène aux définitions suivantes :

DÉFINITION II.1. *On dit qu'une variété riemannienne (M, g) de dimension n se plonge isométriquement **rigidement** dans un espace euclidien \mathbb{E}^N si pour tous plongements isométriques Φ, Φ' de M dans \mathbb{E}^N , il existe une isométrie euclidienne I de \mathbb{E}^N telle que*

$$\Phi' = I \circ \Phi.$$

Noter que I peut renverser l'orientation.

En d'autres termes, les plongements isométriques se déduisent les uns des autres par des isométries euclidiennes.

DÉFINITION II.2. *Un plongement isométrique Φ d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n dans un espace euclidien \mathbb{E}^N est dit **indéformable** si pour tout plongement isométrique Φ' proche de Φ (en topologie C_{loc}^r par exemple), Φ' est conjuguée à Φ par une isométrie ambiante.*

Cette définition n'est pas universelle, et on la trouve aussi sous la forme plus faible : un plongement Φ est indéformable si pour tout chemin \mathcal{C}^r d'isométries Φ_t tel que $\Phi_0 = \Phi$ et Φ_t est un plongement isométrique, pour tout $t \geq 0$, il existe une isométrie euclidienne I_t telle que $\Phi_t = I_t \circ \Phi$. Déjà, un plongement rigide est indéformable. Heuristiquement, un plongement déformable est un plongement que l'on peut déformer de manière continue (par un chemin continu d'isométries) et un plongement rigide est un plongement que l'on peut déformer, mais pas forcément de manière continue. On va s'intéresser à la question de la rigidité et de l'indéformabilité dans plusieurs cas : les polyèdres, les variétés analytiques et les variétés lisses, question qui peut s'étudier soit de manière locale (sur un bout de la variété) soit de manière globale.

II-A-2. Théorie locale

L'idée, dans la théorie locale, est de considérer une géométrie riemannienne (M, g) , un point $x \in M$ et de regarder si on peut déformer un petit voisinage de ce point. On distingue plusieurs cas :

Le cas des polyèdres

- Si x est sur une arête mais n'est pas un sommet, on a la flexibilité et la déformabilité (comme pour un livre que l'on ouvrirait).
- Si x est un sommet, on distingue deux cas : si ce sommet consiste en la rencontre de trois faces, on a la rigidité. Si ce sommet consiste en la rencontre de 4 faces ou plus, on a la déformabilité.

Le cas analytique Dans ce cadre, les choses commencent à se gâter :

- Un résultat positif : Toute surface analytique se plonge localement analytiquement déformablement dans \mathbb{E}^3 (le plongement donné par le théorème de Janet-Cartan est déformable).
- Un résultat négatif : Il existe des plongements locaux analytiques qui sont indéformables pour la topologie analytique ou pour une déformation \mathcal{C}^∞ : il est impossible de déformer cette surface par une famille analytique (qui dépend analytiquement d'un paramètre) de surfaces analytiques. Il s'agit du **théorème d'Efimov**, qui date de 1948. Ce résultat, qui est un résultat de rigidité locale, personne n'y pensait avant Efimov. Les plongements qu'il construit sont de la forme $z = (x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}} f(x, y)$, où n est un entier assez grand qui évite certaines valeurs et où f est une fonction convenablement choisie.

Le cas lisses Dans ce cas-là, il y a des méthodes systématiques pour construire des plongements locaux déformables qui marchent souvent. Dans certains cas. Globalement, il s'agit de résoudre le problème à l'étude d'une équation aux dérivées partielles, de trouver des solutions approchées au voisinage d'un point, trouver des estimations a priori sur la régularité d'une solution éventuelle et, enfin, établir l'existence, soit grâce à des méthodes de point fixe, soit via des procédés de Nash-Moser. Cette méthode fonctionne au moins en courbure strictement positive, en courbure strictement négative (ponctuellement), en un point où la courbure κ s'annule, mais où $\nabla\kappa \neq 0$, et en courbure négative ou nulle avec des conditions sur le lieu des points d'annulation de la courbure (il faut au moins que la courbure change de signe de manière nette).

À l'opposé, en basse régularité, typiquement \mathcal{C}^1 ou $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour α petit, on a toujours déformabilité.

II-A- 3. Théorie globale

On considère (M, g) une surface complète. Peut-on la plonger de manière rigide? Un premier résultat est un théorème de Cauchy de 1813, qui stipule qu'un polyèdre convexe est rigide dans la classe des polyèdres convexes. À l'exact opposé, Connelly prouvait en 1977 qu'il existe des polyèdres déformables ; on sait aujourd'hui en réaliser à 9 sommets, et on les appelle des flexaèdres.

Dans le cas lisse, on distingue deux résultats emblématiques :

- En courbure de Gauss $\kappa > 0$: la sphère \mathbb{S}^2 est rigide dans \mathbb{E}^3 . C'est le **théorème de Liebmann**, qui remonte au début du vingtième siècle. Il y a au moins trois preuves : une étrange, une miraculeuse et une mystérieuse. Nous y reviendrons dans quelques instants.
- En courbure de Gauss $\kappa < 0$: l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 ne se plonge pas dans \mathbb{E}^3 . Ce résultat est dû à Hilbert.

Mentionnons enfin une conjecture rageante : on ne sait toujours pas s'il existe une surface compacte déformable.

II-A- 4. Raffinements et généralisations

En courbure de Gauss strictement positive, le **théorème de Cohn-Vossen** donne un résultat primordial : le bord d'un convexe est rigide. En particulier, quelque soit la métrique sur \mathbb{S}^2 , pour peu que cette métrique soit à courbure $\kappa > 0$, \mathbb{S}^2 est rigide. Attention cependant, cette rigidité n'intervient que de manière globale.

Un autre problème célèbre est le **problème de Weyl** : étant donnée une métrique g de courbure de Gauss $\kappa > 0$ sur \mathbb{S}^2 , peut-on plonger isométriquement (\mathbb{S}^2, g) dans \mathbb{E}^3 ? La réponse est oui : Levy, dans les années 30, en donne une preuve dans le cas analytique, avant que Pogorelov en 1952 et Nirenberg en 1953 ne tordent le cou à cette question pour des métriques suffisamment régulières.

En ce qui concerne la courbure négative $\kappa < 0$, le résultat principal est le **théorème d'Efimov** : si (Σ, g) est une surface telle qu'il existe $\alpha < 0$ tel que la courbure de Gauss associée vérifie $\kappa < \alpha < 0$,

alors (Σ, g) ne se plonge pas isométriquement dans \mathbb{E}^3 . Notons que personne ne maîtrise la preuve, fort délicate. Une question qui est alors naturelle est de savoir si, quand on retire un petit morceau d'une surface, la surface obtenue est rigide ou déformable.

II-B. Quelques outils et méthodes supplémentaires pour l'étude des plongements et de la rigidité

On travaille ici dans le cas des surfaces. On rappelle que l'on note I (respectivement II) la première (respectivement la seconde) forme fondamentale d'une surface (Σ, g) . On s'intéresse à des plongements de ces surfaces dans l'espace euclidien \mathbb{E}^3 ; dans toute la suite, on aura donc $n = 2$.

II-B-1. Les équations de Codazzi-Mainardi et l'équations de Gauss

La première forme fondamentale d'une surface (Σ, g) définit la métrique de la surface, c'est-à-dire la manière de mesurer les distance, c'est-à-dire que I est la matrice $(g_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. Si l'on cherche un plongement isométrique Φ de la surface, il faut donc que $(\langle \partial_i \Phi | \partial_j \Phi \rangle)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ soit égale à I . On a l'habitude de noter $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dans le cas d'une surface.

De même, on introduit les coefficients $h_{i,j}$ de la deuxième forme fondamentale². Un plongement Φ , pour être une isométrie, devrait également vérifier $(\langle \partial_i \mathcal{N} | \partial_j \Phi \rangle)_{i,j \in \mathbb{N}_n} = (h_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. Puisque l'on cherche un plongement dans l'espace à trois dimensions, on cherche trois fonctions Φ^1, Φ^2 et Φ^3 .

Les deux conditions explicitées ci-dessus font qu'a priori on a 6 équations; le système est donc trop contraint. Cependant, trois équations régissent les liens entre les coefficients de I et de II ; on aura donc trois équations pour trois inconnues. Il s'agit de l'**équations de Gauss** et des **équations de Meinardi-Codazzi**. Un peu de notations : on introduit, de manière générale, pour une métrique riemannienne g , $(g^{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ l'inverse de la matrice g et on introduit les **coefficients de Christoffel** :

$$\forall (i, j, k) \in \mathbb{N}_n^3, \Gamma_{j,k}^i := \frac{1}{2} \sum_{\ell} g^{i,\ell} \{ \partial_j g_{\ell,k} + \partial_k g_{\ell,j} - \partial_{\ell} g_{j,k} \}. \quad (\text{II.1})$$

Les équations de Meinardi-Codazzi s'énoncent alors comme suit :

$$\left\{ \partial_k h_{i,j} - \partial_j h_{i,k} = \sum_{\ell} \Gamma_{k,\ell}^i h_{\ell,j} - \Gamma_{i,j}^{\ell} h_{\ell,k} \right\} \quad (\text{II.2})$$

L'équation de Gauss exprime la courbure...de Gauss sous la forme

$$\kappa = \frac{\det(h)}{\det(g)}. \quad (\text{II.3})$$

Ce que l'on nomme parfois théorème fondamental du plongement, c'est que lorsque ces conditions sur Φ et h sont vérifiées, on peut réaliser le plongement.

Un autre outil important est la **Méthode de Darboux**, emblématique de cette manière de faire qui consiste à résoudre le plongement en raisonnant localement par une méthode d'équation aux dérivées

partielles. On prend par exemple $e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^3$ et on regarde, pour un plongement éventuel Φ d'une

surface (Σ, g) dans \mathbb{E}^3 , la fonction

$$\Psi : x \mapsto \langle \Phi(x) | e \rangle.$$

Sous des hypothèses de régularité *ad hoc*, Ψ vérifie l'équation

$$\det(\nabla^2 \Psi) = \kappa \left(1 - |\nabla \Psi|_g^2 \right) \det(g).$$

2. Rappelons la définition de la deuxième forme fondamentale : si Σ est une surface orientée de classe \mathcal{C}^2 , on dispose de l'application de Gauss $:N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ qui à un point associe le vecteur normal en ce point (on fixe une orientation). La seconde forme fondamentale de la surface est alors la forme symétrique (ce qui n'est pas immédiat au vu de la définition) définie en un point $p \in \Sigma$ par $II_p : T_p \Sigma \times T_p \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $II_p(v, w) := -\langle dN_p(v), w \rangle$, avec dN la différentielle de l'application de Gauss.

Cette équation est non-linéaire et du deuxième ordre en Ψ . Les problèmes qui consistent à essayer d'approcher Ψ , d'en trouver des propriétés intéressantes constituent une large classe de problèmes, regroupés sous l'appellation **équation de Monge-Ampère**, qui apparaît dans de nombreux autres domaines (on peut par exemple penser au transport optimal).

II-B- 2. Les formules de Minkowski et la rigidité de la sphère

Les derniers outils que nous allons présenter sont des équations/ relations intégrales fondées sur des théorèmes de divergence. On en connaît déjà une, la **formule de Gauss-Bonnet** : pour une surface Σ de genre $g(\Sigma)$ et munie d'une métrique g de courbure de Gauss associée κ_g , on a

$$\int_{\Sigma} \kappa_g(p) dp = 4\pi (1 - g(\Sigma)). \quad (\text{II.4})$$

C'est extrêmement contraignant, puisque le membre de droite ne dépend que la topologie de la surface, hors de toute considération d'ordre riemannien : on aura beau modifier l'échelle de longueur sur \mathbb{S}^2 , quelle que soit la métrique considérée, l'intégrale de la courbure devra toujours valoir 4π . Ce genre de propriétés intervient de manière importante en ce qui concerne la théorie de la rigidité et de la déformabilité.

Arrêtons-nous un instant sur les théorèmes de type divergence extrinsèque : le théorème de Stokes dit que, lorsque l'on intègre une divergence sur une surface sans bord, le résultat est 0. Soit (Σ, g) une surface et $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}^3$ un plongement isométrique. On se donne également un champ de vecteurs v sur $\Phi(\Sigma)$, a priori non tangent. On étend v en un champ de vecteurs (localement en tout cas) \bar{v} en le prenant constant dans la direction définie par la normale \mathcal{N} : en d'autres termes, pour t petit, pour $x \in \Phi(\Sigma)$, on définit $\bar{v}(x + t\mathcal{N}(x)) := v(x)$. La divergence vue de la surface est alors définie comme

$$\operatorname{div}_{\Sigma} v := \operatorname{div}_{\mathbb{E}^3} \bar{v}. \quad (\text{II.5})$$

On a alors la formule suivante, la **formule de la divergence extrinsèque** :

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} v = -2 \int_{\Sigma} (v \cdot \mathcal{N}) H, \quad (\text{II.6})$$

où H désigne la courbure moyenne de la surface. On retrouve bien le résultat connu si v est tangent à la surface. Observons maintenant que si $v = \mathcal{N}$, alors la formule de la divergence extrinsèque donne

$$-2 \int_{\Sigma} H = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(\mathcal{N}),$$

ce qui permet d'interpréter la courbure moyenne (à un facteur multiplicatif près) comme une variation de l'aire quand la surface se déforme dans la direction normale.

Une autre formule mystérieuse est la suivante : si on se place en un point x , notons $e_1(x), e_2(x)$ les vecteurs définissant les lignes de courbures associées respectivement à la plus grande valeur propre k_1 de $d\mathcal{N}$ et à la plus petite k_2 ($\kappa = k_1 k_2$). Alors si v est un champ de vecteurs comme précédemment, on a

$$\int_{\Sigma} \{k_2 dv_{e_1}(e_1) + k_1 dv_{e_2}(e_2)\} = -2 \int_{\Sigma} (v \cdot \mathcal{N}) \kappa. \quad (\text{II.7})$$

Cette formule correspond à une variation seconde de l'aire. On trouve comme corollaire les formules de Minkowski : pour cela, on considère, pour un plongement Φ de la surface, le champ de vecteurs v défini sur Σ par $v(\Phi(x)) = \Phi(x)$ que l'on prolonge ensuite par le même procédé dans la direction normale, de sorte que $\operatorname{div}_{\mathbb{E}^3}(v) = 2$. Les **formules de Minkowski** s'énoncent sous la forme suivante : pour un plongement Φ

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \{1 + (\Phi \cdot \mathcal{N}) H\} = 0, \\ \int_{\Sigma} \{H + (\Phi \cdot \mathcal{N}) \kappa\} = 0. \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Sans rien savoir de plus, on va pouvoir démontrer la rigidité de la sphère : on considère une surface Σ plongée dans \mathbb{R}^3 à courbure de Gauss constante $\kappa > 0$. Par un théorème de Hadamard, Σ est le bord

d'un convexe. Soit \mathcal{N} la normale orientée vers l'intérieur (afin d'avoir une courbure moyenne positive). Par les formules de Minkowski, on a

$$\int_{\Sigma} \left\{ \frac{H}{\sqrt{\kappa}} + (\Phi \cdot \mathcal{N}) \sqrt{\kappa} \right\} = 0,$$

de sorte que, en combinant cette équation avec la première, on obtient

$$\int_{\Sigma} \left\{ \frac{H}{\sqrt{\kappa}} - 1 \right\} \{1 - (\Phi \cdot \mathcal{N}) \sqrt{\kappa}\} = 0.$$

Or, vu la définition du champ de vecteurs et l'orientation de la normale, on a $\Phi \cdot \mathcal{N} \leq 0$, donc $1 - (\Phi \cdot \mathcal{N}) \sqrt{\kappa} > 0$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $H \geq \sqrt{\kappa}$, donc l'intégrande est positif d'intégrale nulle. L'intégrande est donc nulle. Il en résulte qu'en tout point on a $\sqrt{\kappa} = H$, donc que tout point est ombilical (c'est-à-dire que $k_1 = k_2$). La conclusion est alors assez facile.

Cette preuve, miraculeuse, agit directement globalement. Par ailleurs, ce sont des méthodes lisses, et c'est pour cela que le premier articles de Nash sur le problème du plongement isométrique a provoqué de si grandes réactions : pourquoi diable utiliser des techniques peu lisses ? Les ingrédients de sa démonstration sont radicalement différents de ceux présentés jusqu'ici.

II-C. Le théorème de Nash

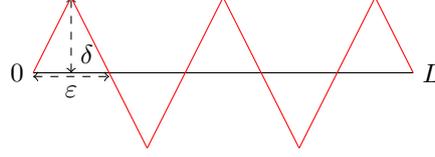
II-C- 1. Idées et concepts de la démonstration

Nash a développé (ou fondé) deux théories de résolution des équations aux dérivées partielles : la théorie de Nash-Moser (méthode perturbative de résolution d'équations de la forme $F(u) = 0$ où F est un opérateur différentiel différentiable, de différentielle inversible, avec éventuellement perte de régularité ; typiquement, F ira d'un \mathcal{C}^{r+k} dans un \mathcal{C}^r .) et l'intégration convexe (méthode pour résoudre une équation de la forme $Lu \in \mathcal{O}$ où \mathcal{O} est le bord d'un ensemble convexe.). C'est sur cette seconde méthode que nous allons nous attarder.

On se donne une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n et on cherche un plongement isométrique $\Phi : M \rightarrow \mathbb{E}^N$. En d'autres termes, on veut que $d_x \Phi$ soit une isométrie en tout point x . Regardons l'ensemble des matrices M telle que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|M\xi\| \leq \|\xi\|$, c'est-à-dire telles que ${}^t M M \leq I_n$. C'est un ensemble convexe, et on exige que $d_x \Phi$ appartienne au bord de ce convexe pour tout x , et même que ce soit un point extrémal de ce convexe. L'idée de Nash est de partir d'une sous-solution grossière (c'est-à-dire que qui contracte strictement les distances) et d'ensuite augmenter peu à peu les distances pour arriver à une isométrie. Est-il facile d'avoir un plongement qui contracte les distances ? Bien sûr, dès que l'on a un plongement : il suffit de contracter l'espace. Nash prouve en fait le fait suivant : étant donné un plongement Φ_0 d'une variété riemannienne (M, g) dans \mathbb{E}^N qui contracte les distances, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un plongement isométrique Φ de M dans \mathbb{E}^{N+2} qui vérifie $\|\Phi - \Phi_0\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$. Mais cela semble au premier abord paradoxal : on peut plonger une sphère ou un tore dans une boule de rayon $10^{-100000}m$. Et ce alors que la sphère est rigide ! C'est le **paradoxe de Nash-Kuiper**. Mais ce paradoxe n'est qu'apparent, puisque le plongement isométrique obtenu est juste de classe \mathcal{C}^1 . De même, on pourrait voir une contradiction (du moins en apparence) avec le théorème egregium : soit Φ un plongement isométrique du tore \mathbb{T}^2 dans $\mathbb{B}(0, 1)$. On rapproche $\Phi(\mathbb{T}^2)$ du bord de la boule jusqu'à avoir un point de tangence. En ce point, la courbure de Gauss de $\Phi(\mathbb{T}^2)$ devrait être strictement positive, mais le théorème egregium implique qu'elle devrait être nulle... Ici encore, cela vient du fait que Φ est de classe \mathcal{C}^1 uniquement. Cet aspect apparaît même dans la construction du plongement : comme dans l'exemple de la fonction de Weierstrass (continue nul part dérivable) $f(x) = \sum_{n \geq 0} a^n \cos(\beta^n x)$, que l'on construit en empilant des oscillations de plus en plus rapide, ce plongement sera construit en ajoutant des oscillations très rapides et de petite amplitude. C'est pour cela que, sur l'exemple du tore plat, on voit apparaître ces corrugations.

II-C- 2. Ondulations de Nash

Il est logique de commencer par un plongement qui contracte strictement les distances : augmenter les distances est bien plus aisé que de les diminuer. Donnons un exemple en dimension 1 : on suppose s'être donné un segment $[0; L]$ et on veut le tordre pour augmenter le temps de parcours entre l'origine et le point L . Pour cela, on rajoute N pics, de largeurs δ et d'amplitude ε .



La longueur du zigzag ainsi obtenu est $L_N = 2\delta N \left(1 + \left(\frac{L}{2\delta N}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, qui tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$, aussi petits que soient δ et ϵ . On voit ici apparaître la nécessité de dimensions supplémentaires. C'est ce genre de constructions qu'utilisent Nash et Kuiper.

Nash introduit les **ondulations de Nash**. Plutôt que de considérer des zigzag, comme nous venons de le faire, il construit des oscillations de plus en plus fines, sous forme de tortillons. Cette situation est représentée sur le schéma ci-dessous :



Pour avoir suffisamment de marges pour utiliser ces tortillons, qui, rappelons-le, restent proches du plongement initial en topologie \mathcal{C}^0 mais allongent les distances, Nash a besoin de deux dimensions supplémentaires (d'où le $N + 2$ du théorème).

Plus explicitement, soit $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ une courbe tracée dans notre variété riemannienne compacte (M, g) . Soient η et ζ deux champs de vecteurs le long de γ tels que

$$\dot{\gamma} \perp \eta, \quad \dot{\gamma} \perp \zeta, \quad \text{et} \quad \zeta \perp \eta.$$

On remplace à l'aide de ces deux champs de vecteurs γ par

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(t) + \delta(\zeta(t) \cos(\lambda \xi t) + \eta(t) \sin(\lambda \xi t)),$$

où λ est une fréquence, $\delta > 0$ une amplitude et la notation $\eta(t)$ est un abus de notation pour $\eta(\gamma(t))$. On fait la même chose pour un plongement ; déjà, on travaille dans une carte (on verra plus loin comment recoller de manière globale). Étant donné Φ_0 un plongement (strictement contractant) de (U, g) dans \mathbb{E}^N , avec U une carte de M on remplace Φ_0 par $\tilde{\Phi}_0$ défini par

$$\forall x \in M, \quad \tilde{\Phi}_0(x) := \Phi_0(x) + \frac{\delta(x)}{\lambda} \{\zeta \sin(\lambda x \cdot \xi) + \eta \cos(\lambda x \cdot \xi)\}, \quad (\text{II.9})$$

où

- ξ est un vecteur de norme 1 fixé de la carte,
- δ est une fonction strictement positive,
- λ est un réel strictement positif,
- ζ et η sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1,
- et ζ et η sont orthogonaux à $\partial_i \Phi_0$ pour tout i .

Étudions la métrique induite par ce nouveau plongement pour voir si nous sommes sur la bonne voie, c'est-à-dire qu'il nous faut comparer

$$\sum_{\alpha} \partial_i \Phi_0^{\alpha} \partial_j \Phi_0^{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \partial_i \tilde{\Phi}_0^{\alpha} \partial_j \tilde{\Phi}_0^{\alpha},$$

avec $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. Un rapide calcul montre que pour tout i , pour tout α on a

$$\partial_i \tilde{\Phi}_0^{\alpha} = \partial_i \Phi_0^{\alpha} + \zeta^{\alpha} \delta(x) \xi_i \cos(\lambda x \cdot \xi) - \eta^{\alpha} \delta(x) \xi_i \sin(\lambda x \cdot \xi) + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Ainsi, en tirant parti des relations d'orthogonalité imposées sur les champs de vecteurs, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \partial_i \tilde{\Phi}_0^{\alpha} \partial_j \tilde{\Phi}_0^{\alpha} &= \sum_{\alpha} \partial_i \Phi_0^{\alpha} \partial_j \Phi_0^{\alpha} + \delta(x)^2 \xi_i \xi_j \{\cos(x)^2 + \sin(x)^2\} + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \partial_i \Phi_0^{\alpha} \partial_j \Phi_0^{\alpha} + \delta(x)^2 \xi_i \xi_j + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît dans $\xi_i \xi_j$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice $\xi \otimes \xi$ (que l'on peut comprendre comme une projection orthogonale dans la direction ξ). De manière condensée, en notant g_{eucl} la métrique euclidienne et $\Phi^* g_{eucl}$ la métrique induite par un plongement Φ , on obtient l'identité

$$\tilde{\Phi}_0^* g_{eucl} = \Phi_0^* g_{eucl} + \delta^2 \xi \otimes \xi + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right). \quad (\text{II.10})$$

Comme $\xi \otimes \xi$ est symétrique positive, cette équation permet de dire que l'on peut augmenter les distances dans la direction ξ . Il faut cependant faire attention à ne pas les faire trop augmenter (on ne voudrait pas overshooter). Rappelons, quitte à nous répéter, que l'on cherche un plongement Φ de (M, g) dans \mathbb{E}^{N+2} vérifiant

$$\Phi^* g_{eucl} = g.$$

II-C- 3. Décomposition de métriques

Nous nous intéressons ici à la question suivante : étant donnée une matrice M symétrique et définie positive, peut-on l'écrire comme une somme de $\xi_k \otimes \xi_k$ (avec $\|\xi_k\| = 1$) ? Si la matrice M est indépendante de l'endroit où l'on se trouve, la réponse est oui, et c'est le contenu du **théorème spectral** : il existe un n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) tels que

$$M = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \otimes e_k.$$

Manque de bol, dans le problème qui nous intéresse, les coefficients λ_k dépendent du point où l'on se place, et il nous faudrait donc un ensemble de vecteurs $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qui marcherait pour tout point x de la carte. C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME II.1. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et g une métrique lisse sur U . Il existe*

- *Une famille $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires,*
- *un entier m ne dépendant que de n ,*
- *une famille $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions lisses telles que pour tout $x \in U$ au plus m des quantités $\{a_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ soient non nulles*

tels que

$$g = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(x)^2 \xi_k \otimes \xi_k.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Nous ne donnons ici qu'une esquisse de preuve. Le but est de montrer qu'il existe une famille $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ de vecteurs unitaires et des fonctions $\{\beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ lisses telles que, une si A est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k(A) \xi_k \otimes \xi_k.$$

On effectue une première réduction en se ramenant au cas compact : on suppose $tr(A) = 1$, car l'ensemble des matrices symétriques positives de trace 1 est compact. Par ailleurs, l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ de trace 1 forme un espace (affine) de dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. On travaille ainsi dans un ouvert convexe de cet espace, l'ensemble des matrices positives symétriques de trace 1.

Le premier théorème qui vient à l'esprit quand on parle de convexité et de dimension finie, c'est le **théorème de Carathéodory**. Il implique que toute matrice A symétrique définie positive de trace 1 peut se représenter comme une somme

$$A = \sum \beta_k A_k,$$

où chaque β_k est positif, la somme des β_k vaut 1 (en d'autres termes, $(\beta_1, \dots, \beta_{\frac{n(n+1)}{2}-1}) \in \Delta_{\frac{n(n+1)}{2}}$, qui désigne le simplexe en dimension $\frac{n(n+1)}{2}$) et où k varie dans un ensemble d'au plus $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ éléments (les matrices A_k dépendent de A). Si on fixe les matrices A_k , l'ensemble $\left\{ \sum_k \beta_k A_k, (\beta_1, \dots, \beta_{\frac{n(n+1)}{2}}) \in \Delta_{\frac{n(n+1)}{2}} \right\}$

est un polygone convexe dont les points extrémaux sont les matrices A_k . On fait ensuite confiance aux topologues pour recouvrir notre convexe par un ensemble dénombrable de tels polygones convexes d'intersection localement finie (toute matrice n'appartient qu'à un nombre fini de ces polygones, et ce nombre peut être choisi comme dépendant uniquement de la dimension). Si on se place dans un des polygones, la matrice A a un jeu de coordonnées barycentriques qui varient de manière lisse dans l'intérieur du polygone. Il faut donc passer des coordonnées dans un polygone à des coordonnées dans un autre polygone de manière lisse. Pour cela, on utilise une partition de l'unité subordonnée aux intérieurs de ces polygones : on a des Ξ_i lisses de support inclus dans les polygones C_i , telles que la somme $\sum \Xi_i^2$ soit constante égale et telles que pour tout x seul un nombre fini de Ξ_i soit non nuls. Par ailleurs, si on se place dans un polygone C_i décrit par A_i^1, \dots, A_i^k , si note $\{\gamma_i^k\}$ les coordonnées barycentriques associées, alors les $\Xi_i \sqrt{\gamma_i^k}$ sont des fonctions lisses (le seul problème se pose au bord du polygone, mais cela est un faux problème puisque les Ξ_i sont des fonctions à supports compacts dans les C_i). Par ailleurs, dans un polygone C_i décrit par $\{A_i^1, \dots, A_i^k\}$, on note $\{\lambda_i^{k,l}\}$ les valeurs propres de A_k et $\xi_i^{k,l}$ les vecteurs propres associés. On écrit alors la décomposition recherchée : si A est une matrice symétrique définie positive de trace 1

$$A = \sum_{i \in \mathbb{N}, k \in \frac{n(n+1)}{2}, \ell \in \mathbb{N}_n} \Xi_i^2(A) \gamma_i^k(A) \lambda_i^{k,\ell} \xi_i^{k,\ell} \otimes \xi_i^{k,\ell}.$$

On passe sans problème au cas général en remplaçant A par $\frac{A}{\text{tr}(A)}$.

□

II-C- 4. Retour à la démonstration

Allons-y pour la démonstration de Nash ! On prend Φ_0 un plongement strictement contractant et on va utiliser un procédé itératif pour l'améliorer. Il va y avoir deux niveaux d'itération, puisqu'au sein d'une même itération nous allons procéder par salve. Pour contrôler l'erreur, introduisons

$$\Delta := g - \Phi_0^* g_{eucl} = (g_{i,j} - \partial_i \Phi_0 \cdot \partial_j \Phi_0)_{i,j \in \mathbb{N}_n}.$$

On décompose, grâce à la section précédente (et puisque l'on travaille pour le moment en carte locale) Δ sous la forme

$$\Delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(x)^2 \xi_k \otimes \xi_k.$$

On suppose sans restriction que x évolue dans un compact On a une borne M sur le nombre de $a_k(x)$ non nuls en un point x . On va définir m étapes au sein d'une salve : on va passer de Φ_0 à P_1 en améliorant la métrique dans la direction ξ_1 (quitte à renuméroter), de Φ_1 à Φ_2 en améliorant dans la direction $\xi_2 \dots$. On parle de salve issue de Φ_0 .

Il existe $\delta > 0$ tel que $\Delta \geq \delta I_N$. Soit $k \in \llbracket 0; m-1 \rrbracket$. On définit Φ_{k+1} par

$$\Phi_{k+1}(x) = \Phi_k(x) + \sqrt{1-\delta} \frac{a_k(x)}{\lambda_k} (\sin(\lambda_k x \cdot \xi_k) \zeta^k + \cos(\lambda_k x \cdot \xi_k) \eta^k),$$

où λ_k désigne ici une fréquence et ζ et η vérifient les mêmes conditions d'orthogonalité que précédemment. Si la fréquence λ_k est suffisamment grande, on a

$$\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_{C^0} \leq \frac{\delta}{2m}, \quad (\text{II.11})$$

mais un calcul du même genre que celui de la section précédente permet d'aboutir à

$$\Phi_{k+1}^* g_{eucl} = \Phi_k^* g_{eucl} + (1-\delta) a_k^2 \xi_k \otimes \xi_k + \mathcal{O}_{\lambda_k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right),$$

de sorte que pour λ_k suffisamment grand on a

$$\|\Phi_{k+1}^* g_{eucl} - (\Phi_k^* g_{eucl} + (1-\delta) a_k^2 \xi_k \otimes \xi_k)\|_{C^0} \leq \frac{\delta^2}{2m}. \quad (\text{II.12})$$

Une dernière estimation utile :

$$\|d\Phi_{k+1} - d\Phi_k\| \leq \|a_k\| + \mathcal{O}_{\lambda_k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} \right).$$

Or $tr(\Delta) = \sum a_k^2$, de sorte que pour tout k $\|a_k\|^2 \leq tr(\Delta) \leq \|g - \Phi_0^* g_{eucl}\|$ pour une certaine norme matricielle.

On a suffisamment d'estimées. Quand on fait les comptes, on obtient, au bout d'une salve,

- $\|\Phi_m - \Phi_0\| \leq \frac{\delta}{2}$.
- $\left\| \Phi_m^* g_{eucl} - \Phi_0^* g_{eucl} - (1 - \delta) \sum_{k=0}^{m-1} a_k^2 \xi_k \otimes \xi_k \right\| \leq \frac{\delta^2}{2}$.
- $\|d\Phi_0 - d\Phi_m\| \leq m \|g - \Phi_0^* g_{eucl}\|_{\mathcal{C}^0}^{\frac{1}{2}} +$ un terme très petit.

À la fin de la salve, on obtient donc

$$\|\Phi_m^* g_{eucl} - g\| \leq \frac{\delta^2}{2} + \delta \|\Delta\| = \mathcal{O}(\delta),$$

et on a, pour un ε que l'on fixe arbitrairement petit (en jouant avec δ et les fréquences)

- $\|g - \Phi_m^* g_{eucl}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$,
- $\|d\Phi_m - d\Phi_0\|_{\mathcal{C}^0} \leq C \sqrt{\|g - \Phi_0^* E\|_{\mathcal{C}^0}}$ (cette estimation devient très bonne dès la deuxième itération),
- $\|\Phi_0 - \Phi_m\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon$,
- $\Phi_m^* g_{eucl} < g$.

On itère ensuite cette construction : on se fixe une suite $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k < +\infty \text{ et } \sum_{k \in \mathbb{N}} \sqrt{\varepsilon_k} < +\infty.$$

On désigne par $\Phi_{(1)}$ le résultat de la première salve. On note, plus généralement, $\Phi_{(k)}$ le résultat de la salve issue de $\Phi_{(k-1)}$ avec contrôle d'ordre ε_k :

- $\left\| g - \Phi_{(k)}^* g_{eucl} \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon_k$,
- $\left\| d\Phi_{(k+1)} - d\Phi_{(k)} \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq C \sqrt{\varepsilon_k}$,
- $\left\| \Phi_{(k+1)} - \Phi_{(k)} \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon_{k+1}$.

Comme les séries $\sum \varepsilon_k$ et $\sum \sqrt{\varepsilon_k}$ convergent, les suites $\{\Phi_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{d\Phi_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\Phi_{(\infty)}$ et ψ respectivement. La convergence est uniforme, donc $\Phi_{(\infty)}$ est de classe \mathcal{C}^1 et $d\Phi_{(\infty)} = \psi$. De plus,

$$g = \Phi_{(\infty)}^* g_{eucl}. \quad (\text{II.13})$$

II-C- 5. Quelques raffinements

Passer de la carte à la variété Ce point ne pose pas de problème ! On écrit M comme une union d'ouverts associés à des cartes et on introduit une partition de l'unité $(\chi_i)_{i \in I}$ subordonnée à cette partition de M en ouverts. On décompose la métrique Δ dans cette partition : si $M = \cup O_r$, alors

$$\Delta = \sum_r \sum_k \chi_r^2 a_{k,r}^2 \xi_{k,r} \otimes \xi_{k,r},$$

avec des notations transparentes. On utilise ensuite le même procédé.

Montrer que $\Phi_{(\infty)}$ est un plongement Évidemment, $\Phi_{(\infty)}$ ne sera un plongement que si les δ_k sont suffisamment petits et les λ_k sont suffisamment grands. En fait, il faut montrer qu'il n'y a pas d'auto-intersection. L'idée sous-jacente est que $\Phi_{(\infty)}$ est très proche, en topologie \mathcal{C}^0 , du plongement initial. Si défaut d'injectivité il y a, ce défaut d'injectivité ne peut que se réaliser pour deux points très proches. On va faire une estimation pour essayer de montrer que $\|\Phi_{(\infty)}(x) - \Phi_{(\infty)}(y)\| \geq K\|x - y\|$. Dieu merci, nous pouvons faire des développements limités et écrire, au sein d'une salve

$$\begin{aligned} \|\Phi_{k+1}(x) - \Phi_k(y)\|^2 &\approx \|\nabla \Phi_{k+1}(x) \cdot (x - y)\|^2 \\ &\gtrsim \langle \nabla \Phi_0^t \nabla \Phi_0(x) \cdot (x - y), x - y \rangle \\ &\gtrsim K\|x - y\|^2 + \text{une petite erreur pour } \delta \text{ suffisamment petit et } \lambda_k \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Passer de la codimension 2 à la codimension 1 Cette étape est due à Kuiper. L'idée est ici de faire osciller dans une direction normale et dans une direction tangente. Dans le cas d'une droite, par exemple, la première idée serait de réaliser des oscillations sinusoïdales autour de la droite, mais cela ne marche malheureusement pas. On introduit donc la notion d'**oscillation de Kuiper** (dont plusieurs variantes existent). Pour se fixer les idées, regardons ce qu'il se passe en dimension 1 : on considère une courbe paramétrée dans le plan $t \mapsto f_0(t)$. On fixe η un champ de vecteurs tangents à la courbe et ζ un champ de vecteurs normal à la courbe. On définit alors

$$e^{i\alpha} := \cos(\alpha)\eta + i \sin(\alpha)\zeta.$$

On définit une fonction f par

$$f'(t) := f'_0(t) + r(t)e^{i\alpha(t)\cos(2\pi\lambda t)}, \text{ avec } \alpha(t) = J_0^{-1}\left(\frac{\|f'_0(t)\|}{r(t)}\right).$$

Ici,

$$J_0(\alpha) := \int_0^1 \cos(\alpha \cos(2\pi u)) du$$

désigne une fonction de Bessel. Le fait d'avoir un cosinus itéré constitue la spécificité, la marque de fabrique, de ces oscillations. L'idée sous-jacente est de remplacer f par une sorte de moyenne $\int_0^t h(s, \lambda s) ds$, avec h une fonction périodique en la seconde variable (seconde variable que l'on prend donc dans \mathbb{S}^1) et $\lambda \gg 1$. On aurait alors envie d'écrire, comme avec des sommes de Riemann, que

$$\int_0^t h(s, \lambda s) ds \approx \int_0^t \int_{\mathbb{S}^1} h(s, u) ds du.$$

On va adapter ce genre de formulation au cas des surfaces. De même que celle de Nash, la construction de Kuiper se fait par salves successives. Le procédé utilise un vecteur normal \mathcal{N} à la surface et un vecteur tangent ζ . On va cependant spécifier certaines conditions sur ζ : si on veut allonger dans la direction ξ , alors on prend (avec toujours un plongement Φ strictement contractant)

$$\zeta := \frac{\nabla\Phi(\nabla\Phi^t\nabla\Phi)^{-1}\xi}{\left\|\nabla\Phi(\nabla\Phi^t\nabla\Phi)^{-1}\xi\right\|^2}.$$

On introduit également un vecteur η défini par

$$\eta := \frac{1}{\left\|\nabla\Phi(\nabla\Phi^t\nabla\Phi)^{-1}\xi\right\|^2}\mathcal{N}.$$

On modifie alors le plongement par

$$\tilde{\Phi}(x) := \Phi(x) + \frac{1}{\lambda}(g_{\perp}(x, \lambda x \cdot \xi)\eta + g_{\parallel}(x, \lambda x \cdot \xi)\zeta),$$

où g_{\perp} et g_{\parallel} (qui correspondent respectivement aux oscillations orthogonales et tangentielles) sont deux fonctions à déterminer. Après des calculs du même tonneau que ceux de la démonstration pour la méthode de Nash, en notant $\dot{g} := \frac{\partial g}{\partial u}(x, u)$, on trouve

$$\tilde{\Phi}^*g_{eucl} = \Phi^*g_{eucl} + \frac{1}{\|\zeta\|^2} \{2g_{\perp} + g_{\perp}^2 + g_{\parallel}^2\} \xi \otimes \xi + \mathcal{O}_{\lambda \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (\text{II.14})$$

On se fixe une fonction a à valeurs réelles. On aimerait bien, finalement, que $2g_{\perp} + g_{\perp}^2 + g_{\parallel}^2$ soit égal à a^2 pour pouvoir utiliser ensuite le même genre de raisonnement. Il faudrait donc que g_{\perp} et g_{\parallel} soit périodique en u , ce qui est équivalent à demander que leurs dérivées soit périodiques de moyenne u . On doit donc chercher des solutions $(g_{\perp}, g_{\parallel})$ à

$$\begin{cases} 2g_{\perp} + g_{\perp}^2 + g_{\parallel}^2 = a^2, \\ \int_{\mathbb{S}^1} g_{\perp} = \int_{\mathbb{S}^1} g_{\parallel} = 0, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Ce cas est typique des techniques d'intégration convexe : il faut déterminer à chaque étape des conditions géométriques que d'éventuelles solutions doivent satisfaire et trouver des solutions en tenant compte de ces contraintes.

III. Conclusion

Nous avons donc réussi à construire des plongements \mathcal{C}^1 de la sphère \mathbb{S}^2 dans des boules de rayons arbitrairement petits. Ces plongements sont en fait mieux que \mathcal{C}^1 , mais leur régularité dépend de manière cruciale du nombre d'étapes par salve, et, grossièrement, les solutions sont de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ avec

$$\alpha \approx \frac{1}{2(\text{nombre d'étapes par salve}) + 1}.$$

Il faut être un peu plus malins pour obtenir une telle estimation.

De Lellis et Székelyhidi ont montré qu'il existe en dimension 2 des plongements de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha < \frac{1}{5}$. Nous avons tout à l'heure évoqué le théorème de Gauss et les questions d'exposant critique β_c pour qu'une isométrie $\mathcal{C}^{1,\beta}$ préserve la courbure de Gauss si $\beta > \beta_c$ et ne la préserve pas si $\beta < \beta_c$. On conjecture qu'il existe en fait β_c tel que

- Si $\alpha < \beta_c$, il existe des plongements de Nash-Kuiper de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$,
- Si $\alpha > \beta_c$, on a rigidité des plongements.

Comment Cédric Villani en est-il venu à s'intéresser à ce problème? Par la mécanique des fluides. Considérons l'équation d'Euler, le plus ancien modèle (1755) de mécanique des fluides :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot (u) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

où $u : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne le champ de vitesses, p est la pression du fluide et, si $M \in M(n; \mathbb{R})$, on définit

$$\nabla \cdot M := \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial m_{i,j}}{\partial x_j} \right)_{i \in \mathbb{N}_n} \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'agit de l'équation qui modélise un fluide incompressible non visqueux. L'incompressibilité implique la condition $\text{div}(u) = 0$. Notons qu'il y a, si on oublie la pression, $n+1$ équations pour n inconnues. Le système est donc surdéterminé, d'où l'ajout d'une nouvelle inconnue, la pression p , qui permet d'avoir $n+1$ équations pour $n+1$ inconnues. En quel sens doit-on comprendre cette équations? Quelle est la bonne notion de solution? Aujourd'hui encore, nous n'en savons rien. On aimerait imposer un critère de sélection correspondant à une propriété physique du système (exactement ce que l'on fait lorsque l'on parle de solutions entropiques pour les équations de transport). Ici, la quantité physiquement pertinente est l'énergie cinétique, que l'on aimerait voir conservée au cours de l'évolution. Si u est une solution de classe \mathcal{C}^2 de l'équation d'Euler, on a effectivement

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx \right) \equiv 0.$$

Par contre, il n'est sans doute pas raisonnable de demander une régularité \mathcal{C}^2 . Un mathématicien (physicien lauréat du prix Nobel) du nom d'Onsager a conjecturé que la régularité typique d'une solution de cette équation devrait être $\mathcal{C}^{\frac{1}{3}}$. Cette conjecture a pendant longtemps été oubliée, jusqu'à ce que Vladimir Scheffer construise des solutions à support compact en espace et en temps!! C'est un résultat terrifiant, tant par ses implications que par sa démonstration. Scheffer a construit sa solution grâce à un procédé qui rappelle les méthodes de l'intégration convexe. Shnirelman simplifie sa démonstration, mais la communauté des mathématiciens continue à ne considérer ces solutions que comme des anomalies, comme des plaies. Cependant, De Lellis et Székelyhidi comprennent que ce problème peut s'attaquer par la théorie moderne de l'intégration convexe, et que le bord du convexe sous-jacent est

$$\left\{ (v, M) \in \mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}), M = v \otimes v - \frac{|v|^2}{n} \right\}.$$

Ils en déduisent une manière élémentaire de construire des solutions très oscillantes de l'équation d'Euler en partant de sous-solutions. Ils ont par exemple construit une solution telle que pour $t \in]\varepsilon; \delta[$, le fluide soit extrêmement agité dans $\mathbb{B}(0,1)$ et telle que le fluide soit au repos pour $t \in]\varepsilon; \delta]^c$ ou

$x \in \mathbb{B}(0; 1)^c$. Cette solution n'est évidemment pas régulière, mais on peut construire de telles solutions paradoxales avec une régularité \mathcal{C}^α avec $\alpha < \frac{1}{3}$, qui violent évidemment la conservation de l'énergie cinétique. On a une réponse, partielle certes, à la question d'Onsager.

Les autres tentatives de sélection de solutions à partir de propriétés physiques ont échoué. Contacté par Bourbaki en 2008 pour donner un exposé sur ces solutions paradoxales, Cédric Villani refuse dans un premier temps, avant d'accepter, ce qui l'a conduit à se plonger dans les travaux de Nash.

Morale de l'histoire : Ne jamais refuser de faire un exposé sur un domaine qui nous est a priori inconnu.