Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Cours d'Analyse Fonctionnelle et EDP février 2007

Chapitre 1 - Semi-norme et introduction aux evtlcs

Dans tout ce chapitre X désigne un espace vectoriel réel. Les définitions et résultats se généralisent au cas d'un espace vectoriel complexe une fois la notion de convexité convenablement définie (...). Notre but est d'introduire les éléments de topologie permettant de définir les espaces de distributions et les topologies faibles dans les espaces de Banach.

I.1 - Semi-normes, suites convergentes et evtlcs

L'objet fondamental qui nous intéresse dans ce chapitre est le suivant.

Définition 1.1. *Semi-norme et famille de semi-normes qui sépare les points.* On dit que $p : X \to \mathbb{R}_+$ est une semi-norme si

$$(i) \qquad p(\lambda\, x) = |\lambda|\, p(x) \qquad \forall x \in X, \ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \qquad p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Remarquons que $p(0) = 0$. On dit que $\mathcal{P}$ est une famille de semi-normes qui sépare les points ou séparante (on note fsns) si

$$(iii) \qquad (\,\forall\, p \in \mathcal{P} \quad p(x) = 0\,) \qquad \text{implique} \qquad x = 0.$$

Exemples 1.1. 1) Une norme est une semi-norme qui sépare les points.
2) Dans $X := C^1([0,1])$, $p_1(u) := \|u'\|_\infty$ est une semi-norme et $\mathcal{P} := \{\delta_0, p_1\}$ sépare les points.
La notion de semi-norme devient réellement pertinente lorsque celle-ci n'est pas (équivalente à) une norme, comme c'est le cas dans les exemples suivants.
3) Dans $X := C(A;\mathbb{R})$, $\delta_a(f) = |f(a)|$ est une semi-norme pour tout $a \in A$ et $\mathcal{P} := \{\delta_a\}_{a\in A}$ est une famille de semi-normes qui sépare les points.
4) Dans $X := C(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour tout $K \subset \Omega$ compact

$$p_K(\varphi) = \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$$

est une semi-norme et $\{p_K\}_K$ sépare les points. De la même manière, soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur Ω, i.e. des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ "différentiables au sens complexe". Alors $\{p_K\}_K$ est une famille de semi-normes de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui sépare les points.
5) Soit $X := L^p_{loc}(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $p \in [1,\infty]$, l'espace vectoriel des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $K \subset \Omega$ compact on ait $f \in L^p(K)$. Alors $p_K(f) := \|f\|_{L^p(K)}$ est une semi-norme et $\{p_K\}_K$ sépare les points.
6) Dans $X := \mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $K \subset \Omega$ compact

$$p_{K,m}(\varphi) := \sup_{x\in K} \ \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^N, |\alpha|\le m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

est une semi-norme et $\{p_{K,m}\}_{K,m}$ sépare les points. Idem pour $X = C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, avec $m = k$. Pour un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on note $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_N$, $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} ... \partial^{\alpha_N}_{x_N}$ et $\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_N!$.

7) Dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ des fonctions régulières à décroissance rapide, i.e. l'espace des fonctions φ telles que pour tout $k, m \in \mathbb{N}$

$$p_{k,m}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^N,\, |\alpha|\le m} \sup_{\beta\in\mathbb{N}^N,\, |\beta|\le k} |x^\beta\, \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

les $p_{k,m}$ sont des semi-normes et $\{p_{k,m}\}_{k,m}$ sépare les points.

Exercice 1.1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par dérivation, multiplication par un polynôme, que $\mathcal{S}\,\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S} * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ (où $\mathcal{F}$ désigne l'opérateur de transformation de Fourier).

8) Dans $X := \mathcal{D}_K(\Omega) = C_0^\infty(K)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $K \subset \Omega$ compact, l'espace des fonctions régulières nulles sur la frontière de K, i.e. $\partial^\alpha \varphi \equiv 0$ sur ∂K pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, ou de manière plus précise, l'espace des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de calsse C^∞ telle que $\varphi \equiv 0$ sur $\Omega\backslash K$, $p_{K,m}$ est une semi-norme et $\{p_{K,m}\}_{m\in\mathbb{N}^N}$ sépare les points. Remarquons que dans $X := C_0^k(K)$, $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, $k \in \mathbb{N}$, $p_{K,k}$ est une norme!

9) Soit E un e.v.n. et f une forme linéaire continue sur E, on note $f \in E'$. Alors $p_f(x) := |f(x)| = |\langle f, x\rangle|$ est une semi-norme et on montrera, à l'aide de la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, que $\{p_f\}_{f\in E'}$ sépare les points.

10) Dans E' le dual topologique d'un e.v.n. E, $q_x(f) := |\langle f, x\rangle|$ est une semi-norme pour tout $x \in E$, et $\{q_x\}_{x\in E}$ sépare les points.

A l'aide d'une famille de semi-normes on peut définir une notion de convergence et également une topologie. De plus lorsque cette famille est dénombrable on peut lui associer une distance. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Définition 1.2. *Semi-normes et suites convergentes.* Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes qui sépare les points. On dit qu'une suite (x_n) de X converge vers x au sens de $\mathcal{P}$, on note $x_n \to x$ au sens de $\mathcal{P}$ ou $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, si

$$\forall\, p \in \mathcal{P} \quad p(x_n - x) \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty. \tag{1.1}$$

On remarque que, lorsqu'elle existe, la limite ainsi définie est unique. (Ind. Utiliser (ii) et (iii).)

Définition 1.3. *Semi-normes et boules ouvertes.* Soit $\mathcal{P} = (p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes qui sépare les points. Pour tout $x \in X$, $r > 0$ et $J \subset I$ fini, on définit la boule ouverte (ou ouvert élémentaire)

$$B_J(x, r) = B_{(p_j)_{j\in J};r}(x) := \{y \in X;\, p_j(y - x) < r \ \ \forall\, j \in J\}.$$

On note $B_{(p_j)_{j\in J};r} = B_{(p_j)_{j\in J};r}(0)$ les boules centrées en 0 et on remarque que $B_{(p_j)_{j\in J};r}(x) = x + B_{(p_j)_{j\in J};r}$.

Exercice 1.3. Montrer que pour tout $J \subset I$ fini, la boule $B_J(0, 1)$ est un ensemble convexe, équilibré et aborbant et que $(B_J(0, 1))_{J fini,\, J\subset I}$ est séparant (voir la Proposition 1.5 pour les définitions).

Définition 1.4. *Evtlcs.* On appelle espace vectoriel topologique localement convexe séparé un espace vectoriel X muni d'une topologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ telle que

- $\mathcal{T}$ est compatible avec la structure d'e.v.:
(iv) $X \times X \to X$, $(x, y) \to x + y$ est continue,
(v) $\mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda\, x$ est continue;
- $\mathcal{T}$ est localement convexe, i.e. admet une base de voisinages convexes:
(vi) $\forall\, x \in X$, $\forall\, U \in \mathcal{T}$, $x \in U$, il existe $V \in \mathcal{T}$ convexe tel que $x \in V \subset U$;
- $\mathcal{T}$ est séparée:
(vii) pour tout $x \neq y \in X$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Il est également possible de définir la notion d'espace vectoriel topologique (ce sont ceux vérifiant les axiomes (iv) et (v)). Dans la pratique les espaces rencontrés en analyse ont une structure beaucoup plus riche (au minimum celle d'evtlcs), et nous ne développerons donc pas la notion d'evt ici. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Vi,Ru].

Proposition 1.5. *Deuxième définition d'un evtlcs.* Soit X espace vectoriel et $\mathcal{T}$ une topologie sur X. Alors $(X, \mathcal{T})$ est un evtlcs si, et seulement si, $\mathcal{T}$ admet pour base de voisinages les ensembles

$$\{x + t\,B;\ \ x \in X,\, t > 0,\, B \in \mathcal{B}\}$$

où la "base de boules ouvertes centrées en l'origine" $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ est telle que

(viii) tout $B \in \mathcal{B}$ est convexe, équilibré ($-B = B$), absorbant ($\forall\, x \in X$, $\exists\, t > 0$ tel que $t\,x \in B$);

(ix) $\mathcal{B}$ est séparant ($\forall\, x \in X$, $\exists\, B \in \mathcal{B}$ $\exists\, t > 0$ tels que $t\,x \notin B$).

En d'autres termes, dans cette deuxième caractérisation on suppose que $\mathbb{R}_+^* \cdot \mathcal{B}$ est une base de voisinages de 0 et qu'une base de voisinages de X est obtenue par translation de celle-ci. Il est alors évident que

$$\text{pour tout } O \text{ ouvert de } X,\ x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \qquad x + O \text{ et } \lambda\, O \text{ sont des ouverts.} \tag{1.2}$$

La notion de "base de boules ouvertes centrées en l'origine" n'est peut-être pas standard. Son intérêt est de pouvoir caractériser avec le moins d'ouverts possibles une topologie d'evtlcs. Dans la suite on utilisera uniquement cette deuxième définition d'un evtlcs. La preuve de la proposition 1.5 peut donc être omise en première lecture.

Preuve de la Proposition 1.5. • Supposons que $\mathcal{T}$ admet pour base de voisinages $X + \mathbb{R}_+^* \cdot \mathcal{B}$ avec $\mathcal{B}$ satisfaisant (viii) et (ix) et vérifions que $\mathcal{T}$ satisfait (iv)–(vii).

- (iv) Soit $x, y \in X$ et posons $z := x + y$. Pour un ouvert W tel que $z \in W$ il existe $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}$ tels que $z + \varepsilon\, B \subset W$. On pose $U := x + (\varepsilon/2)\, B$, $V := y + (\varepsilon/2)\, B$ de sorte que $U + V \subset W$.

- (v) Soit $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $z = \lambda\, x$. Pour simplifier l'écriture on ne traite que le cas $\lambda > 0$, mais la preuve est tout à fait semblable dans le cas général. Pour un ouvert W contenant z il existe $\varepsilon > 0$, $B \in \mathcal{B}$ tels que $z + \varepsilon\, B \subset W$. Notons qu'il existe alors également $t > 0$ tel que $t\, x \in B$. On remarque que $\lambda\, (x + (\varepsilon/\lambda)\, B) \subset W$. On pose $U = x + (\varepsilon/4\,\lambda)\, B$ et pour $\mu \in \mathbb{R}$ on calcule

$$\mu\, U = \lambda\, x + (\mu - \lambda)\, x + \frac{\varepsilon\, \mu}{4\,\lambda}\, B.$$

Il suffit de définir $\Lambda = \{\mu \in \mathbb{R},\ 0 < \mu < 2\,\lambda,\ |\lambda - \mu| < t\,\varepsilon/2\}$ de sorte que $\Lambda \cdot U \subset W$.

- (vi) Cela resulte de (viii).

- (vii) Soit $x, y \in X$, $x \neq y$. Il existe $B \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$ tels que $x - y \notin \varepsilon\, B$ et il suffit de prendre $U := x + \frac{\varepsilon}{2}\, B$ et $V := y + \frac{\varepsilon}{2}\, B$.

• Supposons inversement que $(X, \mathcal{T})$ est un evtlcs et montrons que $\mathcal{T}$ a la propriété souhaitée.

- On a (1.2). En effet, d'une part $\phi : X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$ est continue, et donc également $\phi_a : X \to X$, $\phi_a(x) = \phi(a, x)$ pour tout $a \in X$. Ainsi, pour tout ouvert O et tout $x \in X$, l'ensemble $x + O = \phi_{-x}^{-1}(O)$ est un ouvert. Cela montre en particulier que ϕ_a est une bijection bicontinue pour tout $a \in X$.
De la même manière, $\psi : \mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda\, x$ est continue, et donc également $\psi_\mu : X \to X$, $\psi_\mu(x) = \psi(\mu, x)$. Ainsi, pour tout ouvert O et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, l'ensemble $\lambda\, O = \psi_{\lambda^{-1}}^{-1}(O)$ est un ouvert. Cela montre en particulier que ψ_μ est une bijection bicontinue pour tout $\mu > 0$.

- Grâce à l'étape précédente, il est clair que $\mathcal{T}$ est caractérisée par la donné d'une famille $\mathcal{B}$ vérifiant (viii) et (iv). Commençons par exhiber un candidat. Pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, il existe $B_x \in \mathcal{T}$ tel que $0 \in B_x$ et $x \notin B_x$ d'après (vii). Or d'après (vi) on peut chosir B_x convexe et donc également équilibré (quitte à remplacer B_x par $B_x \cap (-B_x)$). On définit $\mathcal{B} := \{B_x; x \in X \backslash \{0\}\}$. (En fait, on peut réduire $\mathcal{B}$ en ne choisissant qu'un B_x dans "chaque direction x", i.e. parmi tous les B_y tels que $y \in \mathbb{R}_+^*\, x$). Il est clair que (ix) est une conséquence de (vii) (et de (1.1)).

- Pour conclure il suffit donc de montrer que si U est un ouvert contenant l'origine, alors U est absorbant. Or en effet, comme pour $x \in X$ fixé, l'application $\psi^x : \mathbb{R} \to X$, $\psi^x(\lambda) = \psi(\lambda, x)$ est continue et que $\psi^x(0_\mathbb{R}) = 0_X \in O$, il existe un voisinage Λ de $0_\mathbb{R}$ tel que $\psi^x(\Lambda) \subset O$. ◫

Théorème 1.6. *Semi-normes et evtlcs.* Soit $(X, \mathcal{P})$ un espace vectoriel muni d'une famille de semi-normes qui sépare les points. On lui associe $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ la topologie dont une base de voisinage est constituée des boules ouvertes définies à partir de $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$. Alors $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ est un evtlcs. De plus, la convergence au sens de $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ est identique à celle de la définition 1.2.: pour toute suite (x_n) de X, on a

$$x_n \to x \text{ lorsque } n \to \infty \text{ au sens de } \mathcal{T}_\mathcal{P}$$

si, et seulement si, (1.1) a lieu.

Preuve du Théorème 1.6. Il suffit de définir $\mathcal{B} := \{B_{J;1};\ J \subset I \text{ fini}\}$ et d'utiliser l'exercice 1.3 et la Proposition 1.5. Rappelons que la convergence au sens de la topologie $\mathcal{T}_P$ est définie de la manière suivante: on dit qu'une suite (x_n) de X converge vers x au sens de $\mathcal{T}_P$ si pour tout ouvert O de $\mathcal{T}_P$ contenant x il existe $N = N_O$ tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq N$. Cela coïncide donc bien avec (1.1). ◫

Exemples 1.6. Soit E un evn. On note $\sigma(E, E')$ la topologie de E induite par la famille de semi-normes $(p_f)_{f \in E'}$ (exemple 1.1.9). On appelle cette topologie *la topologie faible de* E pour la différencier de *la topologie forte de* E qui est celle induite par la norme. On note $*\sigma(E', E)$ la topologie de E' induite par la famille de semi-normes $(q_x)_{x \in E}$ (exemple 1.1.10). On appelle cette topologie *la topologie faible-$*$ de* E' pour la différencier de la topologie faible (i.e. la topologie $\sigma(E', E''))$ et de la topologie forte de E' qui est celle induite par la *norme d'opérateurs.*

Exercice 1.6. Soit X un espace vectoriel muni de deux familles $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1 = (p_i)_{i \in I}$ de semi-normes séparantes, et soient $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ les topologies associées. Montrer que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_0$ ($\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ au sens ensembliste) si, et seulement si, $\forall\, P \in \mathcal{P}_0\ \exists\, J \subset I$ fini $\exists C$ tels que $\forall\, x \in X\ P(x) \leq C \max_{j \in J} p_j(x)$.

Théorème 1.7. *Evtlcs et distance.* Soit X un espace vectoriel muni d'une suite $\mathcal{P} = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de semi-normes qui sépare les points. Alors l'application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$

$$d(x,y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} (p_n(x-y) \wedge 1) \tag{1.3}$$

définit une distance invariante par translation ($d(x+u, y+u) = d(x,y)\ \forall\, x, y, u \in X$) dont les boules sont équilibrées et convexes, et la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par d est équivalente à la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ définie au Théorème 1.6.

On pourrait également définir d, par exemple, de la manière suivante

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n\, \theta(p_n(x-y)) \quad \text{ou} \quad d(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n\, \theta(p_n(x-y)),$$

avec (α_n) suite strictement positive et sommable, (β_n) suite strictement positive et tendant vers 0 et $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sous-additive ($\theta(s+t) \leq \theta(s) + \theta(t)$).

Preuve du Théorème 1.7. Le fait que d soit une distance est relativement standard. Nous montrons donc juste que $\mathcal{T}_d$ est équivalent à $\mathcal{T}_\mathcal{P}$.

- Soit U tel que $0 \in U \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $J \subset \mathcal{N}$ fini tel que $B_J(0, \varepsilon) \subset U$. En posant $N = \max\{j;\ j \in J\}$ on a $B_d(0, \varepsilon\, 2^{-N}) = \{x \in X,\ d(0,x) < \varepsilon\, 2^{-N}\} \subset U$.
- Soit maintenant $\varepsilon \in (0,1)$. On pose $N := -\log_2(\varepsilon)$ de sorte qu'en définissant $J = \{1, ... N\}$, on a

$$\forall\, x \in B_J(0,\varepsilon), \qquad d(0,x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} (p_n(x) \wedge 1) = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\, \varepsilon + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon + 2^{-N},$$

et donc $B_J(0,\varepsilon) \subset B_d(0,2\,\varepsilon)$ et $B_J(0,\varepsilon) \in \mathcal{T}_\mathcal{P}$. ◫

Définition 1.8. *Espace de Fréchet.* On appelle espace de Fréchet un espace vectoriel X muni d'une suite $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de semi-normes qui sépare les points et tel que, pour la distance d définie au Théorème 1.7, l'espace métrique (X,d) est complet. Dans un tel espace (en fait, il suffit que X soit métrisable) une suite (x_n) de X converge vers x si, et seulement si, l'une des trois conditions suivantes est réalisée:
(i) $x_n \to x$ au sens de la topologie de X: $\forall\, V$ voisinage de 0 $\exists\, N$ tel que $x_n \in V$ $\forall\, n \geq N$;
(ii) $x_n \to x$ au sens de la distance de X: $d(x_n,x) \to 0$;
(iii) $x_n \to x$ au sens des semi-normes de X: $\forall\, k \in \mathbb{N}$ on a $p_k(x_n - x) \to 0$.

Exercice 1.8. 1) Soit (X_n,p_n) une famille décroissante d'espaces de Banach avec injection continue, alors $X := \cap X_n$ (au sens ensembliste) muni de la famille de normes p_n est un espace de Fréchet.

2) Montrer que les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $C^\infty_c(K)$ (et plus tard $H^\infty(\mathbb{R}^N)$) sont des espaces de Fréchet. [*Indication.* Pour les trois premiers espaces, on pensera à introduire une suite exhaustive de compacts, i.e. une suite (K_n) de compacts de Ω tels que $K_n \subset K_{n+1}$ et $\Omega = \cup K_n$. Concernant l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$, on acceptera (voir un cours d'analyse complexe/fonctions holomorphes) que toute fonction holomorphe est de classe C^∞ et que pour toute boule $B = B(z_0,r) \subset \Omega$ et tout entier m, il existe une constante $C = C_{B,\Omega,m}$ telle que (c'est une conséquence de la formule de Cauchy)

$$\forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega) \qquad \sup_{z\in B(z_0,r/2)} |\partial^m f(z)| \leq \sup_{z\in B(z_0,r)} |f(z)|\,].$$

Plusieurs questions viennent alors très naturellement à l'esprit.

1) Quand est-ce qu'un evtlcs possède une topologie qui peut être (équivalente à) une topologie associée à une famille de semi-normes, à une distance, à une norme?

2) Comment généralise-t-on au cadre des evtlcs les différents objets auxquels nous sommes habitués lorsqu'on travaille dans un evn?

3) Y a-t-il équivalence entre les différents objets définis à partir des notions de topologie, semi-normes, distance, norme ou suites convergentes, et que fait-on lorsqu'il n'y a pas équivalence?

Nous aborderons (et nous résoudrons!) la question 1) dans la section 1.2. Nous présenterons dans la sections 1.3 et 1.5 quelques définitions permettant de généraliser aux evtlcs différentes notions importantes et d'usage courant.

Pour bien comprendre la question 3), il convient de se rappeler que l'on peut développer *"l'analyse"* à partir de l'une quelconque des notions suivantes:
- la notion de *convergence d'une suite de points*;
- la notion de *proximité de deux points* (norme, distance, semi-normes) : point de vue géométrique;
- la notion de *topologie*: point de vue ensembliste.

En effet, ces trois notions (équivalentes ou non) permettent de définir des objets tels que les ensembles ouverts, fermés, connexes, denses, bornés, compacts, les fonctions continues, semi-continues .... On apprend dans un cours de topologie que si on définit la topologie et les suites convergentes associées à une distance, alors les objets topologiques et séquentiels coïncident. On apprend également que dans un espace topologique "général" cela n'est plus vrai. Or c'est justement les evtlcs non métrisables qui vont nous intéresser dans ce cours. Ils appartiennent à deux grandes classes d'evtlcs **qui ne sont jamais métrisables**:

(i) les evtlcs X qui peuvent être obtenus comme limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet, ces espaces seront introduits dans la section 4. *Les exemples qui nous intéresseront sont les espaces de fonctions tests $C_c(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ et leur espace dual: l'espace des mesures de Radon $M^1_{loc}(\Omega) = (C_c(\Omega))'$ et l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

(ii) pour un espace de Banach E, l'evtlcs $X = E$ muni de la topologie faible $\sigma(E,E')$, i.e. celle associée aux semi-normes $(p_f)_{f\in E'}$ (exemple 1.1.10) et l'evtlcs $X = E'$ muni de la topologie faible $*\,\sigma(E',E)$, i.e. celle associée aux semi-normes $(q_x)_{x\in E}$ (exemple 1.1.12). Ces topologies seront étudiées au chapitre 3.

On appelera **evtlcs standard** un evtlcs qui est un espace de Fréchet ou qui est du type (i) ou (ii) ci-dessus. Attention, cette définition n'est absolument pas standard, toutefois, elle nous sera utile. La question pertinente est alors: dans un evtlcs standard les objets définis à partir de la topologie et de suites convergentes coïcident-elles? La réponse est malheureusement négative (on reviendra sur des exemples dans la suite de ce chapitre et au chapitre 3). On peut alors préciser la question: pour quel type d'espace (de type (i) ou (ii)) et/ou pour quel type d'objets y a-t-il/n'y a-t-il pas coïncidence entre définition topologique et définition séquentielle? Cette question est importante dans la mesure où très vite dans les evtlcs on ne travaille plus qu'avec des suites (car cela est assez facile, pratique, intuitif, ...) mais que les cours d'analyse sont traditionnellement basés sur la notion de topologie. Ainsi pour pouvoir garder nos réflexes il est indispensable que tous ces objets coïncident bien. Voici plusieurs classes d'objets que nous serons amener à considérer:
(a) les formes linéaires;
(b) les opérateurs linéaires et les équations d'évolution associées;
(c) les compacts, les convexes et les fonctions semi-continues inférieurement: problèmes d'optimisation;
(d) les problèmes non convexes.

La morale à retenir (mais on reviendra sur ces questions dès la section 3) est la suivante.

- (a) dans les evtlcs standards les formes linéaires continues sont les formes linéaires séq continues;
- dans les espaces réféxifs (type (ii) avec $E'' = E$, on reviendra longuement sur ce point au chapitre 3) les définitions topologiques et suitiques pour les objets de types (b) et (c) coïncident;
- pour les problèmes non convexes, je me méfierais ... . Dès que l'on peut, on les traite dans des espaces de Banach pour la topologie forte (i.e. induite pas la norme), et si on ne peut pas, on considère les objets "suitiques" des evtlcs.

Enfin, et en conclusion, lorsque les deux notions ne "coïncident" pas (ou lorsque l'on a un doute!), c'est la notion de convergence de suites qui est la plus pertinente et que nous retiendrons.

1.2. Evtlcs, semi-normes, distance et norme.

L'objet de cette section est de montrer le théorème de *"structure"* suivant.

Théorème 2.1. Soit $(X, \mathcal{T})$ un evtlvs. Alors $\mathcal{T}$ peut être engendrée par une famille de semi-normes qui sépare les points. On a donc

Evtlcs = Ev muni d'une famille de semi-normes qui sépare les points.

De plus, on a les alternatives suivantes:
- soit $\mathcal{T}$ peut être générée par un nombre fini de semi-normes et alors X est normable;
- soit $\mathcal{T}$ peut être générée par un nombre dénombrable de semi-normes mais pas par un nombre fini et alors X est métrisable mais n'est pas normable;
- soit $\mathcal{T}$ ne peut pas être générée par un nombre fini ou dénombrable de semi-normes et alors X n'est pas métrisable.

La précédente alternative se traduit immédiatement en termes de "base de boules ouvertes centrées en l'origine": finie, dénombrable, non dénombrable. On peut également la formuler en termes de base de voisinages grâce à la correspondance suivante entre le "nombre minimal" d'élements dans une famille de semi-norme $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$ engendrant $\mathcal{T}$ et le "nombre minimal" d'ouverts dans une base de voisinages de l'origine, puisque

$$\mathcal{V} := \cup_{J\, fini \subset I} \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_J(0, 1/n)$$

est dénombrable si, et seulement si, I est dénombrable. Enfonçons le clou: si $\mathcal{T}$ ne peut pas être générée par une base dénombrable d'ouverts en l'origine alors $\mathcal{T}$ n'est pas métrisable, et au contraire, si $\mathcal{T}$ peut être générée par une base dénombrable d'ouverts en l'origine alors $\mathcal{T}$ est métrisable.

Par la suite, à un evtlcs X on associe indifféremment $\mathcal{T}$ sa topologie et $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ une famille de semi-normes engendrant $\mathcal{T}$, et on note $X = (X, \mathcal{T}, \mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I})$. Le théorème 2.1 est une conséquence des deux propositions suivantes.

Proposition 2.2. *Evtlcs et semi-normes - Jauge d'un convexe.* Soit $(X, \mathcal{T})$ un evtlcs et C un ouvert convexe contenant l'origine, donc absorbant. On définit la jauge de C par

$$\forall\, x \in X \qquad p_C(x) := \inf\,\{t, \frac{x}{t} \in C\}.$$

Alors p_C est une fonction sous-additive, i.e. satisfait (ii), positivement homogène, i.e. satisfait

$$(i') \qquad p_C(t\,x) = t\,p_C(x) \qquad \forall\, x \in X,\ \ \forall\, t > 0,$$

et

$$(2.1) \qquad C = \{x \in X; p_C(x) < 1\}.$$

De plus, si C est équilibré alors p_C est une semi-norme. Enfin, si $\mathcal{B}$ est une "base de boules ouvertes centrées en l'orignine" associée à $\mathcal{T}$ alors $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie $\mathcal{T}'$ engendrée par la famille de semi-normes $(p_C)_{C\in\mathcal{B}}$.

Preuve de la Proposition 2.2. • De C absorbant, on déduit $p_C : X \to \mathbb{R}_+$.

• Montrons (ii). Par la définition de $p_C(x)$ et $p_C(y)$ pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} \in C, \quad \frac{y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C.$$

Par convexité de C on a alors

$$\frac{x+y}{p_C(x) + p_C(y) + 2\,\varepsilon} = \frac{p_C(x) + \varepsilon}{p_C(x) + p_C(y) + 2\,\varepsilon}\,\frac{x}{p_C(x) + \varepsilon} + \frac{p_C(y) + \varepsilon}{p_C(x) + p_C(y) + 2\,\varepsilon}\,\frac{y}{p_C(y) + \varepsilon} \in C.$$

On en conclut $p_C(x + y) \le p_C(x) + p_C(y) + 2\,\varepsilon$ et l'inégalité triangulaire.

• Montrons (i) lorsque C est équilibré. De $0 \in C$ on déduit $p_C(0) = 0$. Pour $\lambda \neq 0$ on a

$$|\lambda|\,p_C(x) = |\lambda|\,\inf\{t, \frac{x}{t} \in C\} = \inf\{\tau, \frac{x}{\tau\,|\lambda|^{-1}} \in C\} = \inf\{t, \frac{\lambda\,x}{t} \in C\} = p_C(\lambda\,x).$$

• Montrons (2.1). Posons $V := \{x \in X; p_C(x) < 1\}$. Pour tout $x \in C$, il existe $\lambda > 1$ tel que $\lambda\,x \in C$. En effet, puisque C est un ouvert, $\exists\, J \subset I$ fini, $\exists\, \varepsilon > 0$ tels que $B_J(x, \varepsilon) \subset C$ et comme $B_J(0, \varepsilon)$ est absorbant $\exists\, t > 0$ tel que $t\,x \in B_J(0, \varepsilon)$, on en déduit $(1 + t)\,x \in C$. Cela implique $p_C(x) \le \lambda^{-1} < 1$ et $x \in V$. Inversement, si $x \in V$ alors $p_C(x) < 1$ et donc $x/t \in C$ avec $t \in (0, 1)$. On en déduit $x = (1-t)\,0+t\,(x/t) \in C$ par convexité de C.

• Soit U un ouvert de $\mathcal{T}$ contenant 0. Il existe C ouvert de $\mathcal{T}$, convexe, équilibré (sinon prendre $C \cap (-C)$) tel que $0 \in C \subset U$. De (1.1) on déduit $C = B_{p_C,1}$ qui est un ouvert élémentaire de la topologie $\mathcal{T}'$ induite par la famille de semi-normes $(p_C)_{C\in\mathcal{B}}$. On a donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Soit maintenant $V \in \mathcal{T}'$ contenant 0. Par définition de $\mathcal{T}'$, il existe $C_1, ..., C_J \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $0 \in \cap_j B_{p_{C_j},\varepsilon} \subset V$. Grâce à (1.2) et (2.1), on a donc exactement $\cap_j(\varepsilon\,C_j) \subset V$ avec $\varepsilon\,C_j \in \mathcal{T}$ ce qui implique $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

• On peut enfin remarquer que la famille $(p_C)_{C\in\mathcal{B}}$ sépare les points. En effet, si $x \in X$, $x \neq 0$, il existe d'après (viii) et (ix) un ouvert convexe équilibré C tel que $x \notin C$. De (2.1) on déduit que $p_C(x) \ge 1$. ◫

Proposition 2.3. *Evtlcs et distance.* Soit X un evtlcs. Si $\mathcal{T}$ est métrisable, de métrique invariante par translation, alors $\mathcal{T}$ peut être engendrée par une suite de semi-normes.

Preuve de la Proposition 2.3. Soit d une métrique équivalente à $\mathcal{T}$. Pour tout k, $B(0, 1/k)$ est un ouvert de $\mathcal{T}$ et il existe donc un ouvert élémentaire V_k de $\mathcal{T}$ tel que $0 \in V_k \subset B(0, 1/k)$. Il existe donc p^k_1, ..., $p^k_{J_k}$ et $\varepsilon_k > 0$ tels que

$$V_k = \{x \in X;\ p^k_j(x) < \varepsilon_k\ \ \forall\, j = 1, \dots, J_k\} \subset B(0, 1/k).$$

On définit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = (p^k_j)_{j\in J_k,\,k\in\mathbb{N}}$. On vérifie sans peine que (p_n) engendre $\mathcal{T}$. ◫

Exercices 2.4. 1) Montrer que les espaces $C_0^\infty(K)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $C^k(\Omega)$, $k \in \bar{\mathbb{N}}$, $L^p_{loc}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, ne sont pas normables.
2) Soit E un espace de Banach de dimension infinie, montrer (à l'aide du lemme de Baire) que E et E' n'admettent pas de base algébrique dénombrable. En déduire que $(E, \sigma(E, E'))$ et $(E', *\sigma(E', E))$ ne sont pas métrisables. (*Indication.* On pourra utiliser le Lemme algébrique fondamental (Exercice 3.6)).
3) Soit $(X, \mathcal{T})$ un evt tel qu'il existe une distance d invariante par translations, dont les boules centrées en 0 sont convexes et équilibrés et dont la topologie induite $\mathcal{T}_d$ est équivalente à la topologie $\mathcal{T}$. Alors X es un evtlcs (et donc un evtlcs dont une famille de semi-normes est au plus dénombrable).
4) Montrer que si A n'est pas dénombrable alors $(C(A; \mathbb{R}), (\delta_a)_{a \in A})$ n'est pas métrisable et que si A n'est pas fini alors $(C(A; \mathbb{R}), (\delta_a)_{a \in A})$ n'est pas normable.

1.3. Quelques objets dans les evtlcs.

Il n'est pas question de développer une théorie générale des evtlcs et des objets classiques que l'on peut y définir. On se contentera ici de définir quelques notions de base.

Définition 3.1. *Continuité et semi-continuité inférieure.*
A) Soit X un espace muni d'une notion de suites convergentes (celle induite par une topologie par exemple).
A1) - Soit $\varphi : X \to Y$, Y également muni d'une notion de suites convergentes. On dit que φ est séquentiellement continue si ($x_n \to x$ dans X) implique ($\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ dans Y).
A2) - Soit $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que φ est séquentiellement semi-continue inférieurement (séq. sci) si ($x_n \to x$ dans X) implique ($\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n)$).
A3) - De la même manière, on définit les objets habituels suivants à partir de la notion de convergence de suites. On dit que $F \subset X$ est séquentiellement fermé si ($x_n \to x$ dans X et $x_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) implique $x \in F$. Pour $A \subset X$ on note $\mathrm{adh}(A) = \bar{A}$ la fermeture séquentielle ou l'adéhrence de A = l'ensemble des limites dans X de suites de points de A. On dit que $A \subset B$ est dense dans B si $\bar{A} \supset B$. On dit que X est séquentiellement séparable s'il existe une partie dénombrable $D \subset X$ telle que l'adhérence $\bar{D} = X$. On dit que $O \subset X$ est séquentiellement ouvert si $X \backslash O$ est séquentiellement fermé. On dit que $K \subset X$ est séquentiellement compact si de toute suite de K on peut extraire une sous-suite qui converge.
B) Soit X un espace topologique, de topologie $\mathcal{T}_X$.
B1) - Soit $\varphi : X \to Y$, Y également un espace topologique, de topologie $\mathcal{T}_Y$. On dit que φ est continue si $\varphi^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $O \in \mathcal{T}_Y$.
B2) - Soit $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que φ est semi-continue inférieurement (sci) si
• pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[\varphi \leq \lambda] = \{x \in X; \varphi(x) \leq \lambda\}$ est un fermé de X,
ou, de manière équivalente,
• pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\varphi^{-1}(]\lambda, +\infty])$ est un ouvert de X;
• l'épigraphe $\mathrm{epi}\,\varphi := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\}$ de φ est un fermé de $X \times \mathbb{R}$.

Exercices et remarques 3.1. Soient $(X, \mathcal{T}, \mathcal{P} = (p_i)_{i \in I})$ et $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{Q})$ deux evtlcs et soit $\varphi : X \to Y$ une fonction.

1) - Montrer que φ est continue si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\forall q \in \mathcal{Q}$ il existe $\delta > 0$, $J \subset I$ fini tels que ($\forall j \in J$ $p_j(y - x) < \delta$) implique $q(\varphi(y) - \varphi(x)) < \varepsilon$.

2) - Montrer que si φ est continue alors elle est séq continue.

3) - On suppose maintenant $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que si φ continue alors elle est séq sci.

4) On montrera que dans un espace d'evn de dimension infinie, la boule ouverte $\dot{B}_E := \{x \in E; \|x\| < 1\}$ n'est jamais ouverte au sens de la topologie faible $\sigma(E, E')$. On montrera également (lemme de Schur) que la convergence faible $\sigma(\ell^1, (\ell^1)')$ est équivalente à la convergence forte (au sens de la norme) de ℓ^1. En déduire que $\ell^1 \backslash \dot{B}_{\ell^1}$ est séq fermé mais n'est pas fermé dans l'evtlcs ℓ^1 muni de la topologie $\sigma(\ell^1, (\ell^1)')$. Il convient de dire que c'est un exemple particulièrement "pathologiques" (i.e. "rares"), et qui correspond à un evtlcs "standard de type (ii)" avec $E' = (\ell^1)' = \ell^\infty$ non séparable.

5) Il existe des compacts non séquentiellement compacts. On montrera en effet que la boule $B_{(\ell^\infty)'}$ munie de la topologie $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)*$ est compacte (c'est le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki). Montrer que $B_{(\ell^\infty)'}$ n'est pas séquentiellement compacte $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)*$. Encore une fois cela correspond à un evtlcs "standard de type "(ii) $*$" avec $E = \ell^\infty$ non séparable.
6) A l'inverse, on montrera le résultat positif suivant. Supposons que $X = E$ est un espace de Banach muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ ou que $X = E'$ est le dual d'un espace de Banach E séparable muni de la topologie faible $\sigma(E', E)*$. Alors
 (i) Soit $K \subset X$. K est compact ssi K est séq compact.
 (ii) Soit $C \subset X$ convexe. C est fermé ssi C est séq fermé.
 (iiii) Soit $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe. φ est sci ssi φ est séq sci.
7) Même dans un espace de Hilbert il est faux, en général, que les fermés faibles séquentiels sont fermés faibles (les fermés faibles sont eux, bien évidemment, toujours des fermés faibles séquentiels). En acceptant que $H = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ est un espace de Hilbert, et donc que $H' = \ell^2$, construire un exemple de fermé faible séquentiel $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ qui ne soit pas un fermé faible $\sigma(\ell^2, \ell^2)$. Prendre en considération 6) (i) et (ii) ci-dessus.

Définition 3.2. Soit $(X, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un evtlcs. On dit que (x_n) est une suite de Cauchy si pour tout voisinage $V \in \mathcal{T}$ de 0, il existe $N = N_V$ tel que $x_n - x_m \in V$ pour tout $n, m \geq N$. En terme de semi-norme cela revient à dire $\forall\, p \in \mathcal{P}$, $\forall\, \varepsilon > 0$ il existe $N = N_{p,\varepsilon}$ tel que $p(x_n - x_m) \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N$. On dit que E est complet si toutes les suites de Cauchy sont convergentes.

Définition 3.3. Soit $(X, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un evtlcs. On définit la notion de bornitude de l'une des manières équivalentes suivantes
(1) On dit que $B \subset X$ est borné si pour tout voisinage $V \in \mathcal{T}$ de 0 il existe $\varepsilon = \varepsilon_V > 0$ tel que $\varepsilon\, B \subset V$.
(2) On dit que $B \subset X$ est borné si B est inclus dans toute boule de rayon assez grand: pour tout $J \subset I$ fini il existe $R = R_J$ tel que $B \subset B_J(R)$.
(3) On dit que $B \subset X$ est borné si B est bornée dans toute les "directions": pour toute semi-norme $p \in \mathcal{P}$ il existe $M = M_p \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sup_{x \in B} p(x) \leq M$. Le terme "direction" prend tout son sens lorsque $X = E$ est muni de la topologie faible car alors $\mathcal{P} = (p_f)_{f \in E'}$ et la condition s'écrit: pour toute forme linéaire $f \in E'$ il existe $M = M_f \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sup_{x \in B} |\langle f, x \rangle| \leq M$.
On notera bien que l'on impose aucune uniformité sur ε (en V), sur R (en J), sur M (en p ou f).

Exercices 3.3. On veut montrer que dans un evtlcs métrisable la bornitude au sens de la définition 3.3 n'est pas équivalente à la bornitude au sens de la distance.
1) Soit $(X, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un evtlcs métrisable. Montrer qu'il existe une distance d sur X telle que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ et telle que X soit d-borné. Montrer que si $B_d(x, r)$ est $\mathcal{P}$-bornée alors X est normable.
2) Montrer que $C_0^\infty(K)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ possèdent la propriété de Montel (ou Heine-Borel chez certains auteurs): les fermés bornés sont les compacts.
3) On montre (théorème de Riesz) que dans un evn de dimension infinie la boule unité $B_E := \{x \in E;\ \|x\| \leq 1\}$ n'est jamais compacte. Pourquoi n'est ce pas en contradiction avec le point 2).
4) Montrer que X est normable si, et seulement si, 0 possède un voisinage (convexe) borné.

Définition 3.4. *(Applications linéaires bornées).* Soient X et Y deux evtlcs, et $T : X \to Y$ une application linéaire. On dit que T est bornée si T envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y.

Dans le cas d'evtlcs généraux il n'y a pas équivalence entre bornitude et continuité (contrairement au cas des evn) mais on a néanmoins le résultat suivant.

Théorème 3.5. *(Applications linéaires continues).* Soient $(X, \mathcal{P} = (p_i)_{i \in I})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux evtlcs, et $T : X \to Y$ une application linéaire.
(i) T est continue ssi elle est continue en 0 et ssi

$$\forall\, q \in \mathcal{Q},\ \exists\, J \subset I \text{ fini},\ \exists\, C \in (0, \infty),\ \forall\, x \in X \qquad q(T\, x) \leq C \max_{j \in J} p_j(x).$$

(ii) T continue implique T séq continue implique bornée, mais pas l'inverse.
(iii) Si X est métrisable alors la continuité est équivalent à la bornitude.
(iv) Supposons que $X = E$ est muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$ et $Y = E$ est muni de la topologie induite par la norme. Alors d'une part T est continue implique T est de rang fini ($\dim \operatorname{Im} T < \infty$), d'autre part l'application $T =$ Id est bornée mais n'est jamais continue, enfin elle est séquentiellement continue dans le cas (exceptionnel encore une fois) $E = \ell^1$. En effet, en reprenant l'exercice 3.1.4, montrer que l'application Id: $(\ell^1, \sigma(\ell^1, (\ell^1)')) \to (\ell^1, \|.\|_{\ell^1})$ est séq continue mais n'est pas continue.

Eléments de preuve du Théorème 3.5. (i) Il suffit d'écrire la définition.
(ii) T continue implique T séq. continue est claire. Montrons que T séq. continue implique T bornée. En effet, supposons T non bornée. Il existe donc B un borné de X tel que $T(B)$ n'est pas borné. Cela signifie qu'il existe une semi-norme q de $\mathcal{Q}$ et une suite (x_n) de B telles que $q(T\,x_n) \ge n$. Alors en posant $y_n = n^{-1/2}\,x_n$ on a pour tout $p \in \mathcal{P}$, $p(y_n) = n^{-1/2}\,p(x_n) \le n^{-1/2}\,M_p \to 0$, de sorte que $y_n \to 0$, et pourtant $q(T\,y_n) \ge n^{1/2}$, de sorte que $T\,y_n \not\to 0$. Pour montrer que l'implication inverse n'est pas vraie on renvoie au contre-exemple construit en 6.2.
(iii) Il est clair que dans ce cas la continuité équivaut à la continuité séquentielle. Il suffit donc de montrer que la bornitude de T implique la continuité séquentielle de T. Soit une suite (x_n) de X telle que $x_n \to 0$ dans X. Admettons un instant qu'il existe une suite réelle (λ_n) telle que $\lambda_n \to \infty$ et $\lambda_n\,x_n \to 0$ dans X. Comme $(\lambda_n\,x_n)$ est alors bornée, il en est de même de $T(\lambda_n\,x_n)$. C'est-à-dire que pour tout $q \in \mathcal{Q}$, il existe C tel que $q(T(\lambda_n\,x_n)) \le C$ et donc $q(T\,x_n) \le C/\lambda_n \to 0$, ce qui prouve bien que T est séq continue. On construit maintenant (λ_n) de la manière suivante. On pose $\lambda_n = 1$ pour tout $n \le n_1$ avec n_1 tel que $p_1(x_n) \le 2^{-3}$ pour tout $n \ge n_1$. Puis, par récurrence sur $K \ge 1$, on définit $\lambda_n = 2^K$ pour tout $n \in [n_K, n_{K+1}]$ avec n_{K+1} tel que $p_k(x_n) \le 2^{-2(K+1)-1}$ pour tout $k \le K+1$ et $n \ge n_{K+1}$. Ainsi, pour tout $n \in [n_K, n_{K+1}]$, $K \ge 1$, on a

$$d(\lambda_n\,x_n, 0) := \sup_k 2^{-k} p_k(\lambda_n\,x_n) \wedge 1 \le \sup_{k \le K} \lambda_n\,p_k(x_n) + \frac{1}{2^{K+1}} \le \frac{1}{2^K} \to 0,$$

ce qui prouve bien que $\lambda_n\,x_n \to 0$ au sens de $\mathcal{P}$. Pour (iv) on renvoie au chapitre 3.

Définition 3.6. *(Hyperplans).* Soit X un evtlcs. On dit que H est un hyperplan si H est un s.e.v. de X et s'il existe $e \in X$ tel que $H \oplus \mathbb{R}e = X$. Pour tout hyperplan H il existe une forme linéaire $f \in X^*\backslash\{0\}$ tel que $H = [f = 0] := \{x \in X; f(x) = 0\}$ (H est le noyau $\ker f$) et inversement pour toute forme linéaire $f \in X^*\backslash\{0\}$ alors $[f = 0]$ est un hyperplan. Plus généralement, on définit les hyperplans (affines) par $H = [f = \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in X^*\backslash\{0\}$.

Exercice 3.6. *(Lemme algébrique fondamental).* Soit E un ev et soient $f, f_1, ..., f_k \in E^*$ des formes linéaires (non nécessairement continues). On suppose que $\cap \ker f_i \subset \ker f$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $f = \sum \lambda_i\,f_i$. (*Indication.* On pourra faire un raisonnement par récurrence sur le nombre k de formes linéaires).

Théorème 3.7 . *(Formes linéaires continues).* Soit X un evtlcs et $T : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Alors les cinq assertions suivantes sont équivalentes:

(a) T est continue (en 0);

(b) l'hyperplan $H = [T = \alpha]$ est fermé ($\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 0$);

(c) l'hyperplan H n'est pas dense ($\bar{H} \ne E$);

(d) T est bornée dans un voisinage de 0: il existe V un voisinage de 0 et une constante C telle que

$$\forall\, x \in V \qquad |\langle T, x\rangle| \le C;$$

(e) $\exists\, J = J_T \subset I$ un sous-ensemble fini et $\exists\, C = C_T \in (0, \infty)$ tels que

$$\forall\, x \in X \qquad |\langle T, x\rangle| \le C \sup_{j \in J} p_j(x); \tag{3.1}$$

et elles impliquent
(f) T est séquentiellement continue (en 0):

$$x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad \text{implique} \quad \langle T, x\rangle \to 0.$$

(g) T est bornée.
De plus, si X est un "evtlcs standard" alors les sept assertions précédentes sont équivalentes.

Enfin, dès que la dimension de X est infinie, il existe des formes linéaires qui ne sont pas continues, mais si X est complet, il faut avoir recours à l'axiome du choix pour en démontrer l'existence.

Remarque 3.8. Soit X un evtlcs et soit $T : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. T est séquentiellement continue si

$$(\forall\, p \in \mathcal{P} \quad p(x_n - x) \to 0) \qquad \Longrightarrow \qquad T\,x_n \to T\,x,$$

alors que T est continue d'après (3.1) si $\exists\, J = J_T \subset I$ fini

$$(\forall\, j \in J \quad p_j(x_n - x) \to 0) \qquad \Longrightarrow \qquad T\,x_n \to T\,x.$$

Il est donc a priori naturel de penser qu'il existe des formes linéaires séquentiellement continues qui ne sont pas continues, même si encore une fois dans un "evtlcs standard" ces deux notions coïncident. On verra un exemple de telle forme linéaire dans la section 6, point 2.

Preuve du Théorème 3.7. (a) $\Rightarrow$ (b) est triviale, (b) $\Rightarrow$ (c) également. (c) $\Rightarrow$ (d) Soit $x_0 \in (\bar{H})^c$ et supposons (par exemple) $T(x_0) < \alpha$. Comme $(\bar{H})^c$ est ouvert, il existe $r > 0$ et $J \subset I$ tels que $B = B_J(x_0, r) \subset (\bar{H})^c$. On en déduit (par l'absurde, en uilisant la convexité de B et la continuité de T lorsque celle-ci est restreinte à une droite (linéarité!): faire un dessin) que $T(x) < \alpha$ pour tout $x \in B$ et donc $|T(z)| \le \alpha - T(x_0)$ pour tout $z \in B_J(0, r)$. (d) $\Rightarrow$ (e) Soit $J \subset I$ fini et $r > 0$ tels que $B_J(0, r) \subset V$. On en déduit que pour tout $\eta > 0$, on a

$$\forall\, x \in X \qquad \left| \langle T, \frac{r\,x}{\max_{j\in J} p_j(x) + \eta}\rangle \right| \le C,$$

et on obtient (3.1) avec la constante C/r en passant à la limite $\eta \to 0$. (e) $\Rightarrow$ (a) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $V_\varepsilon := \{x \in X;\ p_j(x) < \varepsilon/C\ \forall\, j \in J\}$ de sorte que $V_\varepsilon \subset T^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ est un voisinage de 0.
Il reste à montrer que si X est un "evtlcs standard" on a (g) implique T est continue. Il y a trois cas à considérer.
- Si X est un espace de Fréchet, cela provient du Théorème 3.5 (iii).
- Si X est une limite inductive d'espaces de Fréchet $(X_k, \mathcal{T}_k)$, alors premièrement $B \subset X_k$ borné de $\mathcal{T}_k$ implique B borné de $\mathcal{T}$. En effet, étant donné un voisinage V de 0 dans $\mathcal{T}$, on a $V \cap X_k$ est un voisinage de 0 dans $\mathcal{T}_k$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon\, B \subset V \cap X_k \subset V$, ce qui signifie que B est borné dans $\mathcal{T}$. Deuxièmement, T borné implique $T|_{X_k}$ borné. En effet, si B est borné de $\mathcal{T}_k$ on a (par le premier point) $T|_{X_k}(B) = T(B)$ est un borné de Y. Troisièmement, X_k étant un espace de Fréchet, on en déduit que $T|_{X_k}$ est continue. Quatrièmement, d'après le Théorème 4.2 on en déduit que T est continue.
-Enfin, si $X = E$ muni de la topologie faible ou si $X = E'$ muni de la topologie faible-$*$, le résultat est une conséquence du fait que les faiblement bornés sont les fortement bornés (voir Chapitre 3). ◻

Exemples 3.7. a) On appelle mesures de Radon sur le compact K, on note $M^1(K)$, le dual de l'espace des fonctions continues (ici K peut être un compact de $\mathbb{R}^N$ ou un espace compact quelconque): $T \in M^1(K)$ si $T : C(K) \to \mathbb{R}$ est linéaire et

$$\exists\, C \qquad \forall\, \varphi \in C(K) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C \max_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

b) On appelle espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ le dual de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: $T \in \mathcal{S}'$ si $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ est linéaire et

$$\exists\, k,\ \exists\, m,\ \exists\, C_{k,m} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_{k,m}\, p_{k,m}(\varphi).$$

c) On appelle espace des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ le dual de l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ (voir le chapitre 2 pour justifier la terminologie): $T \in \mathcal{E}'$ si $T : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est linéaire et

$$\exists\, K \subset \Omega \text{ compact},\ \exists\, m,\ \exists\, C_{K,m} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_{K,m}\, p_{K,m}(\varphi).$$

1.4. Limite inductive d'evtlcs.

Il est facile pour une suite décroissante (au sens ensembliste et topologique) $(X_k, \mathcal{T}_k, \mathcal{P}_k)$ d'evtlcs de définir sur l'ev limite $X := \cap X_k$ une topologie naturelle $\mathcal{T}$ qui fasse de X un evtlcs. Il suffit de définir $\mathcal{T}$ comme la topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P} := \cup \mathcal{P}_k$. C'est ce que nous avons fait pour définir par exemple la structure d'evtlcs sur L^p_{loc} et sur les différents espaces de fonctions infiniment régulières $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}$. Est-ce que cela correspond à la topologie $\mathcal{T}'$ suivante: $O \in \mathcal{T}'$ si $\forall\, x \in O\ \forall\, k\ \exists U \in \mathcal{T}_k \cap X$ tel que $x \in U \subset O$? Attention, sauf si chaque X_k est métrisable de sorte que X l'est également (puisqu'à base dénombrable d'ouverts) il n'est pas vrai, en général, que les notions séquentielles et topologiques coïncident sur une telle intersection. En effet, une forme linéaire $T : X \to \mathbb{R}$ sera séquentiellement continue si

$$\forall\, k,\ \forall\, p \in \mathcal{P}_k \qquad p(x_n) \to 0 \quad \text{implique} \quad \langle T, x_n\rangle \to 0$$

alors que T est continue si par exemple $T^{-1}(]-1,1[)$ est un voisinage de 0, donc si

$$\exists\, k,\ \exists J \subset I_k \text{ fini, où } \mathcal{P}_k = (p_i)_{i \in I_k}, \qquad (\forall\, j \in J\ \ p_j(x_n) \to 0) \quad \text{implique} \quad \langle T, x_n\rangle \to 0.$$

On verra un exemple de forme linéaire séquentiellement continue mais pas continue dans la section 6, point 2. Pour une suite croissante d'espaces vectoriels on peut également définir une topologie d'evtlcs sur l'espace vectoriel limite, mais la construction est plus subtile; nous la présentons maintenant.

Théorème 4.1. *Limite inductive.* Soit X un ev. Soit $(X_k, \mathcal{T}_k)$ une suite d'evtlcs telle que $X_k \subset X_{k+1}$ avec inclusion stricte, $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}_{k+1}|_{X_k}$, X_k est un fermé de X_{k+1} et $X = \cup X_k$. Soit

$$\mathcal{U} := \{O \subset X,\ O \text{ convexe, équilibré, absorbant et } O \cap X_k \in \mathcal{T}_k\ \forall\, k\}.$$

Alors

(a) $\mathcal{U}$ est une base de voisinage en 0 d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que $(X, \mathcal{T})$ est un evtlcs.

(b) $\mathcal{T}$ est la topologie la plus fine telle que l'injection $X_k \to X$ est continue.

(c) $\mathcal{T}|_{X_k} = \mathcal{T}_k$ pour tout k.

(d) Soit (x_n) une suite de X et $x \in X$, alors

$$x_n \to x \text{ dans } X \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad \exists\, k_0,\ \ \forall\, n\ x_n,\, x \in X_{k_0} \text{ et } x_n \to x \text{ dans } X_{k_0}.$$

(e) Si chaque X_k est complet alors X également.

(f) X n'est pas métrisable.

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est la limite inductive stricte des $(X_k, \mathcal{T}_k)$.

Théorème 4.2. Soit X la limite inductive stricte de sevtlcs (X_k), Y un evtlcs et soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Alors T est continue si, et seulement si, $T|_{X_k}$ est continue pour tout n.

On pourrait également définir sur X les formes linéaires séquentiellement continues au sens de la convergence définie sur X, sans se poser la question de savoir si celles-ci sont continues. En fait, dans les cas qui nous intéressent ces deux notions coïncident.

Théorème 4.3. Soit X la limite inductive stricte de sevtlcs $(X_k, \mathcal{T}_k)$. On suppose que $\mathcal{T}_k$ est engendrée par une famille dénombrable $(p_{k,j})_j$ de semi-normes pour tout k (donc X_k est métrisable). Soit $T : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(a) $T \in X'$;
(b) $T|_{X_k} \in X_k'$ pour tout k;
(c) T est séquentiellement continue: ($x_n \to x$ dans X) implique ($\langle T, x_n\rangle \to \langle T, x\rangle$);
(d) $T|_{X_k}$ est séquentiellement continue:

$$\forall\, k_0 \qquad (\forall\, n\ x_n,\, x \in X_{k_0} \ \text{ et } \ x_n \to x \ \text{ dans } \ X_{k_0}) \quad \text{implique} \quad (\langle T, x_n\rangle \ \to \ \langle T, x\rangle);$$

(e) T satisfait

$$\forall k \quad \exists J \subset \mathbb{N},\ \exists\, C_k \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ tels que } \quad \forall\, x \in X_k \quad |\langle T, x\rangle| \le C \sup_{j\in J} p_{k,j}(x).$$

Exemples 4.4. a) $C_c(\Omega) = \cup C_0(K_k)$ est la limite inductive des espaces de fonctions continues à support compact dans K_k pour une suite exhaustive de compacts. On retiendra la notion de convergence

$$\varphi_n \to \varphi \ \text{ dans } \ C_c(\Omega) \quad \text{si} \quad \exists\, K \subset \Omega \text{ compact tel que } \operatorname{supp} \varphi_n \subset K \ \text{ et } \ \varphi_n \to \varphi \ \text{ uniformément dans } \Omega.$$

b) On appelle mesure de Radon sur l'ouvert Ω, on note $M^1_{loc}(\Omega)$, le dual de l'espace inductif $C_c(\Omega)$: $T \in M^1_{loc}(\Omega)$ si $T : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ est linéaire et

$$\forall\, K \subset \Omega \text{ compact} \quad \exists\, C_K \qquad \forall\, \varphi \in C_c(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_K \max_{x\in K} |\varphi(x)|.$$

c) On appelle espace des fonctions régulières à support compact, on note $\mathcal{D}(\Omega) = \cup C^\infty_0(K_k)$, la limite inductive des espaces de fonctions régulières à support compact dans K_k pour une suite exhaustive de compact K_k de Ω. La notion de convergence est alors

$$\varphi_n \to \varphi \ \text{ dans } \ \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{si} \quad \exists\, K \subset \Omega \text{ compact tel que } \operatorname{supp} \varphi_n, \subset K \ \text{ et } \ \varphi_n \to \varphi \ \text{ dans } \ C^\infty(\Omega).$$

d) On appelle espace des distributions sur l'ouvert Ω, on note $\mathcal{D}'(\Omega)$, le dual de l'espace inductif $\mathcal{D}(\Omega)$: $T \in \mathcal{D}'$ si $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est linéaire et

$$\forall\, K \subset \Omega \text{ compact } \exists\, m,\ \exists\, C_{K,m} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K \quad |\langle T, \varphi\rangle| \le C_{K,m}\, p_{K,m}(\varphi).$$

Exercice 4.5. Soit $X = \cup X_k$ la limite inductive des X_k. Montrer que $A \subset X$ est borné si, et seulement si, il existe k_0 tel que $A \subset X_{k_0}$ et A y est borné.

Lemme 4.6. Soit X un evtlcs et Y un s.e.v. de X muni de la topologie induite. Soit U un ouvert convexe équilibré de Y. Alors il existe un ouvert convexe équilibré C de X tel que $U = C \cap Y$.

Preuve du Lemme 4.6. Comme Y est muni de la topologie induite, il existe A ouvert de X tel que $U = A \cap Y$. Comme A est alors un voisinage de 0 et que X est un evtlcs, il existe B un ouvert convexe équilibré de X tel que $0 \in B \subset A$. Posons

$$C := \{t\, x + (1-t)\, y;\ x \in B,\ y \in U,\ t \in [0,1]\} = \bigcup_{y\in U,\, t\in]0,1]} ((1-t)\, y + t\, B).$$

Le fait que l'on puisse exclure $t = 0$ dans l'union ci-dessus vient de ce que (comme X est un evtlcs) si $x \in B$ alors pour tout $e \in X\backslash\{0\}$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x + \varepsilon\, e \in B$ (c'est la propriété d'être "absorbant"). Il est clair que C est un ouvert convexe équilibré de X. D'une part, comme $U \subset C$ il vient $U \subset C \cap Y$. D'autre part, si $z = t\, x + (1-t)\, y \in C \cap Y$ il vient ($t \neq 0$) $x \in Y \cap B \subset Y \cap A = U$ et donc (U est convexe) $z \in U$, ce qui prouve l'inclusion inverse. ◫

Preuve du Théorème 4.1. (c) Par définition de $\mathcal{U}$, il est clair que $\mathcal{T}_n$ est plus fine que $\mathcal{T}|_{X_n}$. Montrons la réciproque. Soit U un voisinage de 0 dans X_n. Il existe V_n un ouvert convexe équilibré de X_n tel que

$V_n \subset U$. D'après le lemme 4.6, et par récurrence sur k, pour tout $k \geq n$ il existe un ouvert convexe équilibré V_k de X_k tel que $V_k = V_{k+1} \cap X_k$. Posons $V = \cup_{k \geq n} V_k$. Il est clair que $V \cap X_n = V_n \subset U$ et on montre aisément que $V \in \mathcal{U}$. Cela démontre que $\mathcal{T}|_{X_n}$ st plus fine que $\mathcal{T}_n$.

(a) La seule chose à montrer est que $\mathcal{T}$ est séparée. Soit $x \in X$, $x \neq 0$. On a $x \in X_n$ pour un certain n. Comme X_n est séparé, il existe U un voisinage de 0 dans X_n tel que $x \notin U$. Par (c), il existe $O \in \mathcal{T}$ tel que $U = O \cap X_n$ et donc $x \notin U$. On en déduit que $\frac{1}{2}U \cap (x + \frac{1}{2}U) = \emptyset$.

(b) Cela signifie que $\mathcal{T}$ est la topologie la plus fine de X telle que pour tout n on a $Id : (X_n, \mathcal{T}_n) \to (X_n, \mathcal{T}|_{X_n})$ est continue, et cela est clair.

(d) Soit (x_k) une suite de X telle que $x_k \to x$ et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe k tel que $x_k \notin X_n$. On peut alors construire deux sous-suites (x_{k_i}) et (X_{n_i}) telles que $x_{k_i} \in X_{n_{i+1}} \backslash X_{n_i}$. Comme X_{n_i} est fermé, il existe par Hahn-Banach (Corollaire 6.3 et Théorème 6.1) $T_i \in X'$ tel que

$$T_i \equiv 0 \text{ sur } X_{n_i} \text{ et } \langle T_i, x_{k_i} \rangle = i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle T_j, x_{k_i} \rangle.$$

Soit $T = \sum_i T_i$. Sur chaque X_n la somme définissant T est finie de sorte que T y est continue. Par le Théorème 4.2, T est continu sur X. Ainsi, d'une part $x_{k_i} \to x$ dans X et $T \in X'$ implique $\langle T, x_{k_i} \rangle$ converge, et d'autre part on calcule $\langle T, x_{k_i} \rangle = \sum \langle T_j, x_{k_i} \rangle = i$ diverge.

(e) Soit (x_k) une suite de Cauchy dans X. Commençons par montrer qu'il existe n tel que $x_k \in X_n$ pour tout k. En effet, dans le cas contraire et en reprenant la preuve de (d), on aurait $\langle T, x_{k_i} \rangle$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge, et $\langle T, x_{k_i} \rangle = i$ diverge. Comme X_n est complet, x_k converge dans X_n, donc dans X. ◫

Preuve du Théorème 4.2. Si T est continue alors chaque restriction est continue puisque $T|_{X_n} : X_n \to X \to Y$. Récirpoquement, supposons que chaque restriction est continue. Soit V un ouvert convexe équilibré de Y (donc absorbant). Alors d'une part, par linéarité, $T^{-1}(V)$ est un sous-ensemble convexe, équilibré absorbant de X. D'autre part, $T^{-1}(V) \cap X_n = (T|_{X_n})^{-1}(V)$ est un ouvert de X_n. Cela signifie que $T^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ et donc T est continue. ◫

1.5. Espace dual, topologie forte, topologies faibles.

On définit très naturellement sur un evtlcs X une topologie (d'evtlcs) "faible" et sur sur son dual X' deux topologies (en fait trois!), l'une appelée "topologie forte" et l'autre appelée "topologie faible", qui font de X' un evtlcs.

Définition 5.1. *(Topologie forte).* Soit X un evtlcs et soit X' l'ev des formes linéaires continues sur X. On peut définir sur X' la topologie "forte" qui est la topologie d'evtlcs associée à la famille q_B de semi-normes

$$q_B(T) := \sup_{x \in B} |\langle T, x \rangle|, \qquad \forall\, B \text{ borné de } X.$$

Lorsque $X = E$ est un evn, la topologie forte est la topologie associée à la norme duale

$$\forall\, f \in E' \qquad \|f\|_{E'} := q_{B_E}(f) = \sup_{x \in B_E} |\langle f, x \rangle|.$$

Questionsn 5.2. (i) Si X est un espace de Fréchet, a-t-on X' muni de la topologie forte est un espace de Fréchet?
(ii) Soit (X_k) une suite croissante. Peut-on décrire simplement le dual de $X = \cup X_k$ en fonction des espaces X_k'? Même question pour une suite décroissante (X_k) et le dual de $X = \cap X_k$.

Exemples 5.3. 1) Sur $M^1(K)$, qui est un evn comme dual de l'evn $C(K)$, on définit la norme duale, appelée norme de la variation totale, par: pour tout $\mu \in M^1(K)$, on pose

$$\|\mu\|_{M^1(K)} = \|\mu\|_{VT} = \sup_{\varphi \in C(K),\, \|\varphi\|_\infty \leq 1} |\langle \mu, \varphi \rangle|$$

On définit alors sur $M^1_{loc}(\Omega)$ la famille de semi-normes $\mathcal{P} = (\|.\|_{M^1(K)})_K$, ce qui en fait un evtlcs.
2) On utilisera pas la topologie forte sur $\mathcal{D}'$ dans ce cours. Par contre, on définira par la suite les espaces de Banach H^s, $s \in \mathbb{R}$, et $W^{m,p}$, $m \in \mathbb{Z}$, $p \in [1,\infty]$, qui ressemblent beaucoup (en mieux!) pour $s = m \in -\mathbb{N}$ à l'espace $(C^m_c(\Omega))'$ muni de la topologie forte.

Définition 5.4 . *(Topologies faibles).* Soit X un evtlcs.
(i) On définit sur X la topologie faible $\sigma(X,X')$ qui est la topologie d'evtlcs associée à la famille p_T de semi-normes

$$p_T(x) := |\langle T, x\rangle|, \qquad \forall\, x \in T.$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach on montre que cette topologie est séparée. A part dans le cas fondamental où $X = E$ est un espace de Banach (l'exemple fondamental est $E = L^1(\Omega)$), on n'utilisera jamais cette topologie.
(ii) On peut définir sur X' une deuxième topologie, la topologie "faible" $\sigma(X',X)*$, qui est la topologie d'evtlcs associée à la famille q_x de semi-normes

$$q_x(T) := |\langle T, x\rangle|, \qquad \forall\, x \in X.$$

C'est cette topologie (ou plutôt la convergence associée) que l'on utilise systématiquement sur X'.

Exercice 5.5. *sev.* Soit X, Y deux evtlcs tels que $X \subset Y$ au sens des espaces topologiques. Que cela signifie-t-il en termes de semi-normes? Montrer que $Y' \subset X'$ (au sens algébrique et topologique fort et faible).

Revenons et insistons lourdement sur le concept central de la théorie des evtlcs, à savoir:

Définition 5.6. *(Convergences faibles).* Soit X un evtlcs et soit X' son dual (topologique).
(i) On a déjà défini la convergence faible sur X de la manière suivante. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de X converge au sens faible (et pour être précis converge au sens faible $\sigma(X,X')$) vers $x \in X$, on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\forall\, T \in X' \qquad \langle T, x_n\rangle \to \langle T, x\rangle.$$

(ii) On dit qu'une suite (T_n) d'éléments de X' converge au sens faible-$*$ (au sens faible $*$-$\sigma(X',X)$) vers $T \in X'$, on note $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\forall\, x \in X \qquad \langle T_n, x\rangle \to \langle T, x\rangle.$$

Remarques 5.6. 1) Les convergences faible et faible-$*$ sont les convergences associées aux topologies faible et faible-$*$ définies ci-dessus (Définition 5.4).
2) La topologie faible-$*$ est toujours plus faible (moins fine, moins d'ouverts) que la topologie forte dans un evn de dimension infinie (cf. chapitre 3). Est-ce également le cas dans un evtlcs de dimension infinie? Elle est également plus faible en général que la topologie faible $\sigma(X',X'')$ (où $X'' = (X')'$ désigne le bidual de X, i.e. le dual de X') sauf dans le cas très intéressant où $X'' = X$. On appelle un tel espace un espace réflexif. On reviendra sur ces questions au chapitre 3, dans le cadre des evn.
3) Il existe des cas (plutôt rares) où la convergence faible implique la convergence forte. Les exemples typiques sont $\ell^1(\mathbb{N})$, $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cela n'est pas en contradiction avec le fait que la topologie forte soit plus forte que la topologie faible dans la mesure où ces espaces (munis de la topologie faible) ne sont pas métrisables.

Exemples 5.6. 1) Sur $M^1_{loc}(\Omega)$ on définit la converegence faible-$*$ de la manière suivante: on dit qu'une suite (μ_n) de mesures convergent faiblement(-$*$) vers une mesure μ, on note

$$\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu, \quad \text{si} \qquad \forall\, \varphi \in C_c(\Omega) \quad \langle \mu_n, \varphi\rangle \;\to\; \langle \mu, \varphi\rangle.$$

2) Sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ on définit également la topologie faible-$*$ ou plutôt la convergence faible-$*$, de la manière suivante: on dit qu'une suite (T_n) de distributions convergent (faiblement-$*$) vers une distibution T, on note

$$T_n \to T, \quad \text{si} \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \langle T_n, \varphi\rangle \;\to\; \langle T, \varphi\rangle.$$

On l'appelle simplement "convergence faible", car $\mathcal{D}'' = \mathcal{D}$ (cf. complément 6.1), mais également "convergence", car d'une part "on n'utilise pas explicitement" la convergence forte sur $\mathcal{D}'$ (celle de la définition 5.1) et que d'autre part cette "convergence faible-$*$" correspond à la convergence forte et même à une convergence "uniforme" que l'on définit à la section 5.

Il existe une deuxième façon (équivalente) de définir les topologies faibles $\sigma(X, X')$ et faibles-$*$ $\sigma(X', X)$ que nous présentons maintenant.

Définition 5.7. *Topologie la moins fine rendant continue une famille de fonctions.* Soit $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions indicée par $i \in I$. On appelle topologie la moins fine rendant continue la famille φ_i, la topologie $\mathcal{T}$ de X constituée du moins d'ouverts telle que toutes les applications φ_i soient continues.

Remarque 5.7. La topologie ci-dessus est obtenue en posant

$$\mathcal{T} := \bigcup_{quelconque} \bigcap_{fini} B_{i,\omega}, \quad B_{i,\omega} = \varphi_i^{-1}(\omega),\ i \in I,\ \omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}.$$

Il s'agit de vérifier que
(a) - $\mathcal{T}$ définit bien une topologie;
(b) - les φ_i sont continues de $(X, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$ et que si $\mathcal{T}'$ est une autre topologie rendant continue tous les φ_i alors $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$. Pour montrer (a), il faut voir que $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie et union quelconque. Elle est évidement stable par union quelconque. Pour l'intersection finie, cela vient de

$$\bigcap_{j=1,\ldots,J} \left(\bigcup_{i_j \in I_j} A^j_{i_j} \right) = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_j) \in I_1 \times \ldots \times I_J} \left(\bigcap_{j=1,\ldots,J} A^j_{i_j} \right).$$

Nous renvoyons à un cours de topologie pour plus de détails.

Théorème 5.8. *Topologies et topologies faibles comme topologie la moins fine rendant continues une famille de fonctions.* Soit $X = (X, \mathcal{P}, \mathcal{T})$ un evtlcs.
(i) La topologie $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine rendant continue la famille de fonctions $\varphi_{x,p}$, $x \in X$, $p \in \mathcal{P}$, définies par $\varphi_{x,p}(y) = p(y - x)$.

(ii) Sur X, la topologie faible $\sigma(X, X')$ est la topologie de X la moins fine rendant continue toutes les formes linéaires $x \mapsto \langle T, x \rangle$, $T \in X'$.

(iii) Sur X' la topologie faible $\sigma(X', X'')$ est la topologie de X' la moins fine rendant continue toutes les formes linéaires $T \mapsto \langle \xi, T \rangle$, $\xi \in X''$.

(iv) Sur X' la topologie $\sigma(X', X)$-$*$ est la topologie de X' la moins fine rendant continue toutes les formes linéaires $T \mapsto \langle T, x \rangle$, $x \in X$.

Preuve du Théorème 5.8. La preuve de (i) est immédiate. Pour montrer (ii), (iii) et (iv) il suffit de remarquer que pour toute forme linéaire $T : X \to \mathbb{R}$, on a $x \mapsto |T\,x|$ est continue (en 0) si, et seulement si, $x \mapsto T\,x$ est continue.

L'une des motivations principales des topologies faibles est la propriété de compacité et de compacité séquentielle des bornées de l'espace dual X' que l'on présentera à la section suivante.

Définition 5.9. On dit qu'une famille (T_i) de X' est "faiblement" bornée si $\forall\, x \in X\ \exists\, C_x$

$$\sup_{i \in I} |\langle T_i, x \rangle| \le C_x.$$

On dit qu'une famille (T_i) de X' est "fortement" bornée si $\forall\, B \subset X$ borné $\exists\, C_B$

$$\sup_{i \in I} \sup_{x \in B} |\langle T_i, x \rangle| \le C_B.$$

On dit enfin qu'une famille (T_i) de X' est "uniformément" bornée s'il existe C et $p_1, ..., p_J \in \mathcal{P}$ telles que

$$\sup_{i\in I} |\langle T_i, x\rangle| \leq C \max_{1\leq j\leq J} p_j(x).$$

Exercice 5.10. a) - Compte tenu de la définition de la topologie faible et forte (définitions 5.1 et 5.3) vérifier que ces définitions correspondent bien à la définition 3.3 de bornitude.
b) - Montrer qu'être uniformément borné implique être fortement borné qui implique à son tour d'être faiblement borné. On montrera la réciproque lorsque $X' = \mathcal{D}'$.
c) - Généraliser les définitions à une famille $(T_i)_{i\in I}$ d'opérateurs à valeurs dans Y un evtlcs (et non pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ comme ici) et comparer aux définitions de bornitude de la section 3.

Définition 5.11. Soient $(X, \mathcal{P})$ et $(Y, \mathcal{Q})$ deux evtlcs et soit $T : X \to Y$ une application linéaire continue. Pour $g \in Y'$ on définit

$$x \mapsto \varphi(x) = \langle g, T\,x\rangle.$$

L'application $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue, puisque

$$|\varphi(x)| \leq C_g \max_{j\in J} q_j(T\,x) \leq C_g \max_{j\in J} \left(C_{T,j} \max_{i\in I_j} p_i(x) \right).$$

On en déduit que $\varphi \in X'$, on note $\varphi = T^*\, g$. L'application T^* est également linéaire et continue pour la topologie faible définie sur X' et Y' puisque

$$p_x^*(T^*\, g) = |\langle T^* g, x\rangle| = |\langle g, T\,x\rangle| = q_{Tx}^*(g).$$

On appelle opérateur adjoint l'application T^*.
Lorsque $X \subset X'$ et $Y \subset Y'$, on appellera "adjoint formel" tout opérateur $T^* : Y' \to X'$ vérifiant

$$\forall\, x \in X \;\forall\, y \in Y' \qquad \langle y, T\,x\rangle = \langle T^*\, y, x\rangle.$$

Si de plus, les injections $X \subset X'$ et $Y \subset Y'$ sont denses, alors un adjoint formel est (se prolonge en) l'adjoint de T.

1.6. Les théorèmes de Banach dans les evtlcs.

On énonce dans cette section quelques "grands" théorèmes de Banach dans le cadre des evtlcs. Les preuves sont essentiellement laissée en exercice et consistent à adapter les preuves des théorèmes correspondants présentés dans le cadre des e.v.n. dans le chapitre 3.

Théorème 6.1 - Forme analytique du théorème de Hahn-Banach. Soit $X = (X, \mathcal{P} = (p_i)_{i\in I})$ un evtlcs.
(i) Soit Y un sev et soit $T : Y \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue au sens de la topologie induite sur Y, i.e. telle qu'il existe $J \subset I$ et $C \in (0, \infty)$ vérifiant $\forall\, y \in Y$ $|T(y)| \leq C \max_{j\in J} p_j(y)$. Alors il existe une forme linéaire continue $\bar{T} \in X'$ qui prolonge T au sens suivant:

$$\bar{T}|_Y = T, \qquad \forall\, x \in X \quad |\langle T, x\rangle| \leq C \max_{j\in J} p_j(x).$$

(ii) Soit $x \in X$ et $p \in \mathcal{P}$. Il existe $T \in X'$ telle que $\langle T, x\rangle = p(x)$. En particulier, la topologie faible $\sigma(X, X')$ sépare les points (i.e. $\langle T, x\rangle = 0\ \forall\, T \in X'$ implique $x = 0$).

Théorème 6.2 - Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach. Soient A et B deux ensembles convexes, non vides et disjoints.
(i) On suppose A ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large:

$$\exists\, T \in X' \quad \text{tel que} \quad \langle T, a\rangle \leq \langle T, b\rangle \quad \forall\, a \in A,\, b \in B.$$

(ii) On suppose A fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict:

$$\exists T \in X', \ \exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \langle T, a\rangle + \varepsilon \le \langle T, b\rangle - \varepsilon \quad \forall\, a \in A,\ b \in B.$$

Indications. La preuve de (i) est identique. Pour démontrer (ii), on raisonne de la manière suivante. Pour tout $x \in B$, il existe ε_x et $J_x \subset I$ fini tels que $B_{J_x}(x, 4\,\varepsilon_x) \subset A^c = \emptyset$. Comme $B \subset \cup_{x\in B} B_{J_x}(x, \varepsilon_x)$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $B \subset \cup_{\ell=1,...,L} B_{J_\ell}(x_\ell, \varepsilon_\ell)$. On pose $J := \cup J_\ell$, $\varepsilon = \min \varepsilon_\ell$ et $A_\varepsilon = A + B_J(0, \varepsilon)$, $B_\varepsilon = B + B_J(0, \varepsilon)$ de sorte que A_ε et B_ε sont ouverts et donc, d'après (i), il existe $T \in X'$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large:

$$\langle T, a + y\rangle \le \langle T, b + z\rangle \quad \forall\, a \in A,\ b \in B,\ y,\ z \in B_J(0, \varepsilon).$$

On en déduit que $|\langle T, x\rangle| \le C\, p_J(x)\ \forall\, x \in X$. Il suffit de choisir $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ assez petit et reprendre la fin de la preuve du théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique au chapitre 3. ◻

Corollaire 6.3. Soit Y un sev de X.

(i) Si Y est fermé alors $\exists\, f \in X'\backslash\{0\}$ telle que $f = 0$ sur Y.

(ii) Si ($f = 0$ sur Y implique $f \equiv 0$) alors $\bar{Y} = X$.

Théorème 6.4. (Banach-Steinhaus ou Principle of Uniform Boundedness). Soient $(X, \mathcal{P})$ une limite inductive d'espaces de Fréchet (X_k), $(Y, \mathcal{Q})$ un evtlcs et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de X dans Y. On suppose

$$\sup_{i\in I} q(T_i\, x) < \infty \qquad \forall\, x \in E,\ \forall\, q \in Q. \tag{1}$$

Alors pour tout $q \in Q$ et tout k, il existe $C \in (0, \infty)$, $p_1, ..., p_J \in \mathcal{P}$ telles que

$$\forall\, i \in I,\ \ \forall\, x \in X_k \qquad q(T_i x) \le C \max_{1\le j\le J} p_j(x). \tag{2}$$

Preuve du Théorème 6.4. On définit la suite de fermés $F_n := \{x \in X_k;\ \sup_{i\in I} q(T_i\, x) \le n\}$ et on applique le lemme de Baire dans X. ◻

Corollaire 6.5. Soient $(X, \mathcal{P})$ une limite inductive d'espaces de Fréchet (X_k), $(Y, \mathcal{Q})$ un evtlcs et (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus de X dans Y tels que pour tout $x \in X$, $T_n\, x$ converge quand $n \to \infty$. Il existe alors $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que $T_n\, x \to T\, x$ dans Y pour tout $x \in X$. De plus, pour tout $q \in Q$ et tout k, il existe un voisinage V de 0 dans X_k tel que

$$\sup_{x\in V} q(T\, x) \le \liminf_{n\to\infty} \sup_{x\in V} q(T_n x) < \infty. \tag{3}$$

Preuve du Corollaire 6.5. . Pour tout $x \in X$, notons $T_x = \lim\, T_n\, x$. Comme $(T_n\, x)$ est bornée dans Y, par BS, pour tout $q \in Q$, $k \in \mathbb{N}$, il existe $C \in (0, \infty)$, $p_1, ..., p_J \in \mathcal{P}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \in X_k \qquad q(T_n\, x) \le C \max_{1\le j\le J} p_j(x). \tag{4}$$

A la limite $n \to \infty$, on obtient la même inégalité avec T_x. Il est également clair que $x \mapsto T_x$ est linéaire, de sorte que $T : X \to Y$, $x \mapsto T_x$ est un élément de $\mathcal{L}(X, Y)$. Enfin (3) est une conséquence directe de (4). ◻

Exercice 6.5. On se place sous les hypothèses du Corollaire 6.5.

a) - Montrer que pour tout $K \subset X$ compact, on a $\sup_{x\in K} q(T_n\, x - T\, x) \to 0$.

b) - En déduire (ou le montrer directement) que si $x_n \to x$ dans X alors $T_n\, x_n \to T\, x$.

Corollaire 6.6. Soient $(X, \mathcal{P})$ une limite inductive d'espaces de Fréchet (X_k) et (T_n) une suite de formes linéaires continues de X tels que pour tout $x \in X$, $\langle T_n, x\rangle$ converge quand $n \to \infty$. Il existe alors $T \in X'$ tel que $T_n \rightharpoonup T$ au sens $\sigma(X', X)$-$*$.

Preuve du Corollaire 6.6. C'est le corollaire 6.5 avec $Y = \mathbb{R}$. ◻

Corollaire 6.7. Soit $(X,\mathcal{P})$ une limite inductive d'espaces de Fréchet (X_k). Soit $B \subset X'$ un borné faible, i.e.

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, C_x \quad \text{telle que} \quad \sup_{T\in B} |\langle T, x\rangle| \le C_x$$

alors B est un uniformément borné fort de X', i.e.

$$(2) \qquad \forall\, k \qquad \exists C,\ \exists p_1, ..., p_J \in \mathcal{P} \qquad \text{telles que} \qquad \forall\, T \in B,\ \forall\, x \in X_k \quad |\langle T, x\rangle| \le C \max_{1\le j\le J} p_j(x).$$

Preuve du Corollaire 6.7. Il suffit d'appliquer Banach-Steinhaus à la famille d'applications linéaires continues $(\xi_T)_{T\in B}$ avec $\xi_T(x) = \langle T, x\rangle$. ◻

Remarques et Questions 6.7. a) - Quid de $A \subset X$ un borné faible, i.e.

$$\forall\, T \in X' \quad \exists\, C_T \quad \text{telle que} \quad \sup_{x\in A} |\langle T, x\rangle| \le C_T$$

alors A est un borné fort de X ?
b) - En particulier, quand est-ce que l'on a faiblement borné équivaut fortement borné équivaut uniformément borné?

Enonçons enfin deux théorèmes de "compacité faible-$*$" de la boule. Pour la preuve du premier résultat nous renvoyons à [Rudin].

Théorème 5.10. *(Compacité faible$*$ des "boules").* Soit X un evtlcs [séparable] et V un voisinage de 0 dans X. On définit

$$K := \{T \in X';\ \forall\, x \in V,\ |T\, x| \le 1\}.$$

Alors K est [séquentiellement] relativement compact pour la topologie faible $\sigma(X', X)*$. En particulier, lorsque V est une "boule" on a pour un certain $J \subset I$ fini et $C > 0$

$$K = \{T \in X';\ \sup_{x\in B_J} |\langle T, x\rangle| \le C\}.$$

Théorème 5.11. (Compacité séquentielle faible$*$ des suites faiblement bornées). Soit X une limite inductive d'espaces de Fréchet séparables et soit (T_n) une suite de X' telle que

$$\text{pour tout } \ x \in X, \ \text{ la suite } \langle T_n, x\rangle \text{ est bornée.}$$

Alors il existe une sous-suite extraite (T_{n_ℓ}) qui converge $\sigma(X', X)$.

Preuve du Corollaire 6.7. D'une part, il est clair que X est "séquentiellement séparable"; on note (x_p) une suite dense de vecteurs. Par hypothèse la suite $(\langle T_n, x_p\rangle)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Par le procédé diagonal de Cantor, on peut extraire une sous-suite (T_{n_ℓ}) telle que $\langle T_{n_\ell}, x_p\rangle$ converge vers une limite, notée T_p, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, il suffit de définir par récurrence φ^p_ℓ telle que $(\varphi^{p+1}_\ell) \subset (\varphi^p_\ell)$ et $\langle T_{\varphi^p_\ell}, x_p\rangle$ converge, puis de prendre $n_\ell := \varphi^\ell_\ell$.
D'autre part, par le théorème de Banach-Steinhaus, pour tout k, il existe $C \in (0,\infty)$, $p_1, ..., p_J \in \mathcal{P}$ telles que

$$\forall\, n,\ \ \forall\, x \in X_k \qquad |\langle T_n, x\rangle| \le C \max_{1\le j\le J} p_j(x).$$

On en déduit que pour tout $x \in X$, la suite $(\langle T_{n_\ell}, x\rangle)_\ell$ converge vers une limite notée $T(x)$. En effet, c'est une suite de Cauchy, puisque si $x \in X_k$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_p tel que $\max_{1\le j\le J} p_j(x - x_p) \le \varepsilon/(2C)$ et donc

$$|\langle T_{n_\ell} - T_{n_{\ell'}}, x\rangle| \le |\langle T_{n_\ell} - T_{n_{\ell'}}, x - x_p\rangle| + |\langle T_{n_\ell} - T_{n_{\ell'}}, x_p\rangle| \le \varepsilon$$

pour $\ell, \ell' \geq L$, avec L assez grands. On conclut grâce au corollaire 6.6. $\square$

1.6. Quelques compléments.

Complément 6.1. Soit X un evtlcs et notons X'_{w*} l'evtlcs X' muni de la topologie faible-$*$ $\sigma(X', X)$. Montrer que $(X'_{w*})' = X$. En déduire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont "réflexifs".

Complément 6.2. On a défini l'espace des fonction tests infiniment régulires et à support compact par la relation ensembliste et topologique

$$\mathcal{D}(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T}_{Schwartz}) = \bigcup_n \bigcap_m C_0^m(K_n),$$

où la première intersection est décroissante et la seconde union est croissante (et les topologies associées sont celles définies à la section 4). En inversant les opérations ensemblistes on obtient le même espace de fonctions, mais des topologies différentes. On définit

$$(C_c^\infty(\Omega), \mathcal{T}_{Whitney}) = \bigcap_m \bigcup_n C_0^m(K_n) = \bigcap_m C_c^m(\Omega), \quad C_c^m(\Omega) = \bigcup_n C_0^m(K_n).$$

On peut voir que les topologis diffèrent à travers l'exemple suivant. La forme linéaire

$$T(\varphi) = \sum_n \varphi^{(n)}(n)$$

est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mais pas sur $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{T}_{Whitney})$, car T n'appartient à aucun des $(C_c^m(\mathbb{R}))'$. Par ailleurs, on vérifie aisément que la convergence associée à la topologie $\mathcal{T}_{Whitney}$ est identique à la convergence sur $\mathcal{D}(\Omega)$ [On a $\varphi_n \to 0$ au sens de la topologie $\mathcal{T}_{Whitney}$ si, et seulement si, $\varphi_n \to 0$ dans $C_c^m(\Omega)$ pour tout m et donc si, et seulement si, $\varphi_n \to 0$ dans $C^m(\Omega)$ pour tout m avec $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K_m$ compact $\subset \Omega$. Comme on peut prendre $K_m = K_0$ pour tout m, on retrouve bien la convergence au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$]. On a donc ainsi exhibé un exemple de forme linéaire sur un evtlcs qui est séquentiellement continue (au sens de la convergence associée à topologie $\mathcal{T}_{Whitney}$) mais n'est pas continue (au sens de la topologie $\mathcal{T}_{Whitney}$). Remarquer que l'evtlcs $(C_c^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{T}_{Whitney})$ n'est pas la limite inductive d'une suite d'espaces de Fréchet.

Complément 6.3. On peut se demander quelle serait une famille concrète de semi-normes engendrant la topologie de $\mathcal{D}$ (autre que celle obtenue à partir d'une base de voisinage de l'origine $\mathcal{B}$ en posant $(p_B)_{B \in \mathcal{B}}$). En voici deux exemples.

- Pour une suite exhaustive de compacts K_j avec $K_0 = \emptyset$, une suite strictement croissante d'entiers m_j et une suite décroissante de réels ε_j tendant vers 0 on définit la semi-norme

$$p_{(K_j),(m_j),(\varepsilon_j)}(\varphi) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \sup_{x \notin K_j} \sup_{\alpha, |\alpha| \leq m_j} \varepsilon_j^{-1} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

et on définit sur $\mathcal{D}$ la famille de semi-normes en faisant varier les suites (K_j), (m_j) et (ε_j).

- Plus simplement, pour une fonction $\delta \in C(\bar{\Omega})$ telle que $\forall\, x \in \Omega$ $\delta(x) > 0$ et $\forall\, x \in \partial\Omega$ $\delta(x) = 0$, on définit la semi-norme

$$p_\delta(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} \sup_{\alpha, |\alpha| \leq \delta^{-1}(x)} \delta^{-1}(x) |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

et on définit sur $\mathcal{D}$ la famille de semi-normes en faisant varier la fonction δ.

- On peut également définir pour une fonction $\delta \in C(\bar{\Omega})$ telle que $\forall\, x \in \Omega$ $\delta(x) > 0$ et $\forall\, x \in \partial\Omega$ $\delta(x) = 0$ et un entier m, la semi-norme

$$p_{m,\delta}(\varphi) = \sup_{x \in \Omega} \sup_{\alpha, |\alpha| \leq m} \delta^{-1}(x) |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

La topologie de $C_c(\Omega)$ est la topologie associée à la famille de semi-normes $p_{0,\delta}$ lorsque l'on fait varier la fonction δ. La topologie de Whitney est la topologie associée à la famille de semi-normes $p_{m,\delta}$ lorsque l'on fait varier la fonction δ et l'entier m. Et donc, la topologie de Schwartz (i.e. de $\mathcal{D}$) est la topologie associée à la famille de semi-normes (p_δ) lorsqu'on fait varier δ, ou de manière équivalente, associée à la famille de semi-normes $(p_{K_j,m_j,\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.3. Montrer que ces deux familles de semi-normes engendrent la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ définie comme limite inductive. **Attention.** Dans un espace inductif, on n'a jamais recours à une famille de semi-normes définissant la topologie sur X mais plutôt à la définition inductive $X = \lim X_k$ et aux familles de semi-normes sur chaque X_k.

Complément 6.4. Montrer que $(C_c(\Omega), \mathcal{T}_1)$, où $\mathcal{T}_1$ est la topologie associée aux semi-normes (p_K), est un evtlcs qui n'est pas complet alors que $(C_c(\Omega), \mathcal{T}_2)$, où $\mathcal{T}_2$ est la topologie inductive associée aux $C_0(K_n)$, est complet. Même genre de question à propos de $\mathcal{D}(\Omega)$. Qu'avons-nous fait? Comme le montre le point précédent, pour tout voisinage $V \in \mathcal{T}_1$ de l'origine, il existe un compact $K \subset \Omega$ et un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B_1 := \{x;\, p_K(x) < \varepsilon\} \in \mathcal{T}_1$ et $B_1 \subset V$ et donc une fonction strictement positive δ telle que $\delta \ge \mathbf{1}_K$ de sorte $B_2 := \{x;\, p_\delta(x) < \varepsilon\} \in \mathcal{T}_2$ et $B_2 \subset V$. Cela prouve que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, i.e. $\mathcal{T}_2$ est une topologie plus fine, avec plus d'ouverts, que $\mathcal{T}_1$. Ainsi, en ajoutant des semi-normes et donc des ouverts, cela nous permet d'avoir moins de suites de Cauchy et donc relativement plus de suites converegentes. On verra que le fait d'enlever des ouverts (c'est ce que l'on fait lorsque l'on considère une topologie faible sur un evtlcs X plutôt que de considérer la topologie forte) permet:
- d'avoir plus de fonctions continues à valeurs dans X;
- moins de fonctions continues de X à valeurs dans un autre espace;
- plus de compacts.

Complément 6.5. Voici quelques exemples typiques d'espaces "pathologiques" que l'on ne traitera pas dans ce cours (et souvent on essaie d'éviter d'avoir à faire à eux lorsque cela est possible). Ce sont des espaces qui ni ne sont séparables, ni ne sont le dual d'un espace séparable:
- $\ell^p(I)$ les espaces de "familles sommables", avec I un ensemble non dénombrable;
- $(\ell^\infty(\mathbb{N}))'$, $(L^\infty(\Omega))'$, $(C_b(\Omega))'$, $(\mathrm{Lip}(\Omega))'$, $(C^{k,\alpha}(\Omega))'$, ...

Complément 6.6. Pour plus de résultats sur les evtlcs, et en particulier les espaces $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on renvoit à [Rudin] et [Schwartz]. On pourra également montrer à titre d'exercice les résultats suivants.

(i) Soit $A \subset \mathcal{D}$. Alors A bornée faible implique A bornée fort.

(ii) $\mathcal{D}$ vérifie la propriété de Montel.

(iii) Il y a identité dans $\mathcal{D}$ entre ensembles faiblement et fortement compacts

[*Indication.* Faiblement compact $\overset{topologie}{\Longrightarrow}$ Faiblement borné $\overset{"BanachSteinhaus"}{\Longrightarrow}$ Borné fort $\overset{Montel}{\Longrightarrow}$ Compact fort].

(iv) Vérifier (si le résultat est vrai et dans ce cas le démontrer!) le point (f) du Théorème 4.1, la remarque 5.6.2, les théorèmes 5.10 (à l'aide de Tykonov).

(v) Banach-Steinhauss. Soit $A \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors A bornée faible implique A bornée fort, et même borné au sens suivant:

$$\forall\, K \subset \Omega,\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, C \quad \text{tels que} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K \quad \sup_{T\in A} |\langle T, \varphi\rangle| \le C\, p_{K,m}(\varphi).$$

(vii) La convergence faible dans $\mathcal{D}'$ implique la convergence forte, et même la convergence au sens suivant: si $T_n \rightharpoonup 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors

$$\forall\, K \subset \Omega,\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, \varepsilon_n \quad \text{tels que} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K \quad |\langle T_n, \varphi\rangle| \le \varepsilon_n\, p_{K,m}(\varphi) \quad \text{avec} \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Preuve du point (vi). Fixons $K \subset\subset \Omega$. D'après Banach-Steinhaus (vi),

$$\exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, C \quad \text{tels que} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}_K \quad |\langle T_n, \varphi\rangle| \le C\, p_{K,m}(\varphi).$$

Supposons par l'absurde que l'on n'ait pas (vi) avec l'entier $m+1$. Il existe alors une suite (φ_n) de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ telle que

$$p_{m+1,K}(\varphi_n) = 1 \quad \text{et} \quad \langle T_n, \varphi_n\rangle \to \ell \neq 0.$$

Par Ascoli, il existe une sous-suite (φ_{n_k}) et une fonction $\varphi \in C^m(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, telle que $\varphi_{n_k} \to \varphi$ dans $C^m(\Omega)$. On en déduit

$$\langle T_{n_k}, \varphi_{n_k}\rangle = \langle T_{n_k}, \varphi_{n_k} - \varphi\rangle + \langle T_{n_k}, \varphi\rangle \to 0,$$

ce qui est absurde. On utilise ici que (T_{n_k}) peut être considérée comme une suite (bornée) de $(C^m_c(\Omega))'$.

Question 6.7. Si X est un espace de Fréchet, alors X' est-il un espace de Fréchet, pour quelle topologie? Si X est une limite inductive d'espaces de Fréchet alors qu'est-ce que X'?

1.7. Quelques corrections d'exercices.

Correction de l'exercice 1.3. B_J est équilibré d'après (i) (et plus précisément, $p(-x) = p(x)\ \forall\, x \in X$), est absorbant d'après (i) (et plus précisément, $p(t\,x) = t\,p(x)\ \forall\, x \in X$, $\forall\, t > 0$), est convexe d'après (ii). Enfin le caractère séparant découle de (iii).

Correction de l'exercice 1.8.1. Il suffit de vérifier la complétude de X. Soit (x_k) une suite de Cauchy pour la distance

$$d(x,y) = \sup_n 2^{-n}\, \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

L'inégalité

$$p_n(x-y) \le \frac{2^n\, d(x,y)}{1-2^n\, d(x,y)}$$

montre que x_k est de Cauchy dans tous les X_n; elle converge donc vers une limite $x^{(n)}$ dans X_n. Par continuité de l'injection $X_{n+1} \subset X_n$ et unicité de la limite on a $x^{(n+1)} = x^{(n)}$ pour tout n, et donc $x^{(n)} = x \in X$. On a alors

$$\forall\, n \qquad \frac{p_n(x_k - x)}{1+p_n(x_k-x)} \to 0,$$

d'où on déduit (considérer $n \le N$ et $n > N$) que $d(x_k, x) \to 0$. ◫

Correction de l'exercice 2.4.1. Supposons par contradiction que $X = C^m(\Omega)$, $C_0(K)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est normable et notons $\|.\|$ la norme de X. On rappelle que X est métrisable et qu'une distance d sur X est définie par (1.3) à partir d'une suite (p_n) de semi-normes engendrant la topologie de X. Comme les topologies induites par la norme $\|.\|$, la distance d et la famille de semi-normes (p_n) sont équivalentes il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_d(\delta) := \{x \in X;\ d(x,0) < \delta\} \subset B_X := \{x \in X;\ \|x\| \le 1\},$$

et, en fixant N_0 un entier tel que $\displaystyle\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \delta/2$,

$$A := \{x \in X;\ p_n(x) < \delta/2\ \forall\, n = 1, \dots, N_0 - 1\} \subset B_d(\delta).$$

En combinant ces deux inclusions, il vient

$$\forall\, x \in X \quad \|x\| \le \frac{4}{\delta} \max_{n=1,\dots,N_0-1} p_n(x).$$

Pour conclure, il suffit de construire une suite (u_ε) telle que $p_{N_0}(u_\varepsilon) \to \infty$ et $p_n(u_\varepsilon) \to 0$ pour tout $n \le N_0 - 1$, puisqu'alors cette dernière propriété implique $\|u_\varepsilon\| \to 0$ et donc $u_\varepsilon \to 0$ et donc $p(u_\varepsilon) \to 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$, d'où la contradiction. Dans le cas $X = C^m(\Omega)$, on a $p_{N_0} = p_{K_0}$ pour un certain compact $K_0 \subset \Omega$ et il suffit de construire une fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u \not\equiv 0$ et $\operatorname{supp} u \subset \Omega\backslash K_0$, or on sait que cela est possible(!), puis de poser $u_\varepsilon = \varepsilon^{-1} u$. Dans le cas $X = C_0(K)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et pour simplifier $N = 1$, $0 \in K$, on peut prendre $p_n = p_{K,n}$ (dans le premier cas) et $p_n = p_{n,n}$ (dans le second cas). Il suffit alors de considérer une approximation de l'unité ρ_ε dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho(0) = 1$ et de définir u_ε comme étant $\varepsilon^{1/2}$ fois la primitive N_0ième de ρ_ε s'annulant jusqu'à l'ordre $N_0 - 1$ en 0 (si $N_0 = 1$ cela correspond à $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/2} \int_0^x \rho_\varepsilon(t)\,dt$).

Correction de l'exercice 2.4.2. On montre par l'absurde que la topologie faible $\sigma(E, E')$ n'est pas métrisable. Supposons donc $\sigma(E, E')$ métrisable. Cela implique que $\sigma(E, E')$ est engendrée par une suite de semi-normes de la forme $p_i(x) = |\langle f_i, x\rangle|$, avec $f_i \in E'$ et $i \in \mathbb{N}$, i.e. qu'une base de voisinages d'ouverts de l'origine est constituée par exemple des ensembles $\{x \in E,\ |\langle f_i, x\rangle| < 1/k\ \forall\, i = 1, ..., k\}$. Fixons $g \in E'$. L'ensemble $U := \{x \in E;\ |\langle g, x\rangle| < 1\}$ est un ouvert de $\sigma(E, E')$, et il existe donc $\varepsilon > 0$ et $J \subset \mathbb{N}$ fini tel $\{x \in E,\ |\langle f_j, x\rangle| < \varepsilon\ \forall\, j \in J\} \subset U$. Cela signifie donc $(|\langle f_j, x\rangle| < \varepsilon\ \forall\, j \in J) \Longrightarrow |\langle g, x\rangle| < 1$, et donc également

$$\bigcap_{j \in J} \ker f_j \subset \ker g.$$

D'après le *lemme algébrique fondamental* il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que

$$g = \sum_{j \in J} \lambda_j\, f_j.$$

En conclusion, tout élement de E' s'écrit comme combinaison linéaire finie d'éléments de la famille $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille génératrice dénombrable. D'après le lemme de Baire, cela implique que E' est de dimensionn finie, ce qui est absurde.
La preuve concernant la topologie faible $\star$ de E' est identique.

Solution de l'exercice 2.4.3. Il suffit de vérifier que $\mathcal{T}$ sépare les points (c'est immédiat puisque $\mathcal{T}$ est métrisable) et que $\mathcal{T}$ admet une base de voisinage convexes (c'est une hypothèse sur les boules associées à d). ◫

Correction de l'exercice 3.1. 5) Contre exemple dans $(\ell^\infty)'$: $B_{(\ell^\infty)'}$ est compact pour la topologie $\sigma((\ell^\infty)', \ell^\infty)*$, c'est le théorème de Bourbaki-Banach-Alaoglu, mais n'est pas séquentiellement compact. En effet, soit $\xi_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ la forme linéaire continue définie par $\xi_n(u) = u_n$. Alors (ξ_n) est une suite bornée et si elle était relativement séquentiellement compact cela impliquerait qu'il existe une application strictement croissante $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et une forme linéaire $\xi \in (\ell^\infty)'$ tels que $\xi_{\sigma(n)}(u) \to \xi(u)$ pour tout $u \in \ell^\infty$. Cela signifierait donc que pour toute suite (u_k) la suite $(u_{\sigma(\ell)})$ est convergente!
7) Considérer $H = \ell^2(\mathbb{N}^*)$ muni de la topologie/convergence faible $\sigma(\ell^2, \ell^2)$ et $F = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{n^{1/4}\,\delta^{(n)}\}$, où la suite $\delta^{(n)}$ est définie par $\delta^{(n)}_k = \delta_{nk}$ symbole de Kronecker, et montrer que F est un fermé séquentiel faible mais n'est pas un fermé faible car $0 \notin F$ et pourtant tout voisinage de 0 rencontre F (remarquer que si $f \in \ell^2$ alors $|f_i| \le i^{-1/2}$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de i).

Eléments de correction de l'exercice 6.3. On montre juste que si $\varphi_n \to 0$ au sens de la famille des $(p_{K_j,m_j,\varepsilon_j})$ alors il existe un compact K tel que $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Dans le cas contraire, pour une suite exhaustive de compacts (K_j) donnée il existe une suite de points (x_n) tel que $\varphi_n(x_n) \to 0$ et (x_n) sort de tout compact: il existe donc une suite croissante (au sens large) d'entiers $j(n)$ telle que $x_n \notin K_{j(n)}$. On pose alors $m^*_j = 0$ et $\varepsilon^*_j := \min\{|\varphi_k(x_k)|/2;\ k \text{ tel que } j(k) = j\}$. Comme maintenant $\varphi_n \to 0$ cela signifie qu'il existe N tel que $\varphi_n \in V := \{\psi \in \mathcal{D};\ p_{K_j,m^*_j,\varepsilon^*_j}(\psi) \le 1\}$ ce qui signifie

$$|\varphi_n(x_n)| \le \sup_{x \notin K_{j(n)}} |\varphi_n(x)| \le \varepsilon^*_{j(n)} \le |\varphi_n(x_n)|/2.$$

Bibliographie.
- M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis I*, Academic press 1980
- W. Rudin, *Functional Analysis*, Dunod.

- L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann
- C. Villani, *Cours d'Analyse Fonctionnelle*, http://www.umpa.ens-lyon.fr/ cvillani/Cours/index.html
- Yosida, *Functional Analysis*, Springer.