Ecole Normale Supérieure **2006-2007**
Première année de Master FIMFA

Correction du partiel d'Analyse Fonctionnelle et EDP

Exercice 1. *Soit H un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $(e_n;\ n \in \mathbb{N})$. Soit $(a_n;\ n \in \mathbb{N})$ une suite de réels. Soit $x_n = a_n\, e_n$. A quelle condition sur la suite $(a_n;\ n \in \mathbb{N})$ la suite $(x_n;\ n \in \mathbb{N})$ est-elle faiblement convergente? fortement convergente?*

Correction de l'Exercice 1. On a $\|x_n\| = |a_n|$.

Première preuve, utilisant Baire et la compacité de la boule B_H. Si (x_n) converge faiblement alors (x_n) est bornée d'après un corollaire de Banach-Steinhaus et donc (a_n) également. Inversement, supposons (a_n) bornée, alors on peut en extraire une sous-suite $(x_{n'})$ qui converge faiblement dans H vers une limite notée x (c'est simplement parce que H est son propre dual, et que la boule unité $B_{E'}$ du dual d'un espace séparable E est faiblement séquentiellement compacte au sens de la convergence faible $\sigma(E', E)$). Alors $(x, e_k) = \lim(x_n, e_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc $x = 0$. On conclut par un argument *d'unicité de la limite* que c'est toute la suite (x_n) qui converge vers 0. En effet, si tel n'était pas le cas, on aurait une sous-suite $(x_{n'})$ de (x_n) qui resterait toujours en dehors d'un voisinage (faible) de 0, mais comme $(x_{n'})$ serait égalemement bornée on pourrait en extraire une sous-sous-suite $(x_{n''})$ qui convergerait, forcément vers 0 d'après le début de la preuve. Donc $(x_{n''})$ entre dans tout voisinage (faible) de 0 et cela contredit la propriété de $(x_{n'})$. En conclusion, (x_n) converge faiblement si, et seulement si, $|a_n|$ est bornée, et si, et seulement si, $x_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H.

Deuxième preuve, plus élémentaire, utilisant la décomposition dans une base Hilbertienne. Si (a_n) n'est pas bornée il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $|a_{n_k}| \geq k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $z := \sum_{k\geq 1} (\operatorname{sign} a_{n_k})\,(1/k)\, e_{n_k} \in H$ puisque $1/k \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$. Alors $(x_n, z) = |a_{n_k}|\, k^2 \geq k \to \infty$ et (x_n) ne converge donc pas faiblement dans H. Inversement, si (a_n) est bornée, notons A un majorant de $(|a_n|)$, et montrons que $x_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H. Comme $H' = H$ cela signifie que $(x_n, y) \to 0$ pour tout $y \in H$. Soit $y \in H$ et écrivons sa décomposition dans la base Hilbertienne (e_k): $y = \sum_k y_k\, e_k$ avec $y_k = (y, e_k)$ est une suite de $\ell^2(\mathbb{N})$, en particulier $y_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$. On a donc bien $|(x_n, y)| = |a_n\, y_n| \leq A\,|y_n| \to 0$.

- Si (x_n) converge fortement vers une limite x, alors (x_n) converge faiblement vers x et donc $x = 0$. On a alors $|a_n| = \|x_n - 0\| \to 0$. En conclusion, (x_n) converge fortement si, et seulement si, $|a_n| \to 0$, et donc si, et seulement si, $x_n \to 0$ dans H.

Deuxième preuve. On note $A = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| + 1$. Pour tout $y \in H$, on fixe $\varepsilon > 0$ (arbitraire) puis on choisit k tel que $\|y - y_k\| < \varepsilon/A$ avec $y_k = \sum_{j=1}^{k} (y, e_j)\, e_j$ (c'est une propriété des bases Hilbertiennes). On a alors $\limsup |(x_n, y)| = \limsup |(x_n, y - y_k)| \leq \|y - y_k\|\, \sup_n |a_n| \leq \varepsilon$. (x_n) est une suite bornée de H. On peut conclure que $x_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H de deux façons. *Première preuve.* On dit que (x_n) étant bornée,

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et soit C un convexe de E. Montrer qu'il y a équivalence entre
(a) C est séquentiellement fermé faible;
(b) C est séquentiellement fermé;
(c) C est fermé;
(d) C est fermé faible.

Correction de l'Exercice 2. (a) $\Longrightarrow$ (b) car la convergence forte implique la convergence faible (c'est le cours, et c'est évident).

(b) $\Longrightarrow$ (c): la convergence forte étant associée à une norme, la notion de fermé définie à partir de la topologie et celle définie à partir de la convergence des suites coïncident (voir un cours de "topologie métrique").

(c) $\Longrightarrow$ (d): c'est l'étape difficile, mais cela a été démontré comme conséquence du théorème de Hahn-Banach (2ème forme géométrique): dans un espace de Banach E tout convexe fermé est faiblement fermé $\sigma(E, E')$.

(d) $\Longrightarrow$ (a): cela provient d'un résultat topologique général: pour tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$, être fermé implique être séquentiellement fermé. En effet, soit F un fermé de $(X, \mathcal{T})$ et soit (x_n) une suite telle que $x_n \in F$ pour tout n et $x_n \to x$ au sens de la convergence induite par $\mathcal{T}$ (pour tout voisinage ouvert O de x, il existe un rang N tel que $x_n \in O$ pour tout $n \geq N$). Alors si $x \notin F$ on a $X \backslash F$ est un voisinage ouvert de x et il existe N tel que $x_n \in X \backslash F$ pour tout $n \geq N$, ce qui est absurde.

Exercice 3. Calculer $\dfrac{d}{dx} \log |x|$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Correction de l'Exercice 3. Comme $\log |x| \in L^1_{loc}$, c'est une distribution (c'est même un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). On a donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx} \log |x|, \varphi \rangle &= -\langle \log |x|, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log |x| \, \varphi'(x) \, dx \\
&= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \backslash [-\varepsilon, \varepsilon]} \log |x| \, \varphi'(x) \, dx,
\end{aligned}$$

où on a utilisé successivement la définition de la dérivée d'une distribution, la définition d'une distribution associée à une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et le théorème de convergence dominée. Par intégration par parties, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\langle \frac{d}{dx} \log |x|, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R} \backslash [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx + (\log \varepsilon) \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) \right) \right\} \\
&= \langle \mathrm{Vp} \, \frac{1}{x}, \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

par définition de la *valeur principale* et parce que $\varepsilon \log \varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
a) Rappeler pourquoi $I-\Delta$ est un isomorphisme de $H^{\sigma+2}(\mathbb{R}^N) \to H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, pourquoi $C^k_c(\mathbb{R}^N) \subset H^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pourquoi $H^\sigma(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\sigma > k + N/2$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\nabla : H^\sigma(\mathbb{R}^N) \to H^{\sigma-1}(\mathbb{R}^N)$ et que si $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ alors $u\,\varphi \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$.
Pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert, on définit

$$H^\sigma_{loc}(\omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\omega);\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\omega),\ \varphi\, u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)\}.$$

b) Montrer que toute distribution est localement dans H^s; i.e. $\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\forall\, \omega$ ouvert tel que $\bar\omega \subset \Omega$ il existe $\exists\, s = s(T,\omega) \in \mathbb{R}$ tel que $T \in H^s_{loc}(\omega)$.
c) Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $-\Delta\, u = f$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Supposons que $f \in H^r_{loc}(\omega)$ avec ω ouvert tel que $\bar\omega \subset \Omega$ et montrer que $u \in H^{r+2}_{loc}(\omega)$. En déduire que si $f \in C^\infty(\omega)$ alors $u \in C^\infty(\omega)$. On dit que l'opérateur Δ est hypoéliptique.

Correction de l'Exercice 4.
a) - On rappelle que

$$H^\sigma(\mathbb{R}^N) := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ (1+|\xi|^2)^{\sigma/2}\,\hat u \in L^2(\mathbb{R}^N)\}.$$

a1) - Pour tout $T \in \mathcal{S}'$, on a $\mathcal{F}(\partial_{x_i} T) = i\,\xi_i\,\hat T$, puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \mathcal{F}(\partial_{x_i} T), \varphi\rangle = \langle \partial_{\xi_i} T, \hat\varphi\rangle = -\langle T, \partial_{\xi_i}\hat\varphi\rangle = \langle T, i\,\mathcal{F}(x_i\,\varphi)\rangle = \langle i\,\xi_i\,\hat T, \varphi\rangle.$$

Donc $\mathcal{F}((I-\Delta)\,T) = (1+|\xi|^2)\,\hat T$, et pour tout $T \in \mathcal{S}'$ on a

$$\begin{aligned} T \in H^{\sigma+2} \quad &\text{ssi} \quad (1+|\xi|^2)^{\sigma/2+1}\,\hat T \in L^2 \\ &\text{ssi} \quad (1+|\xi|^2)^{\sigma/2}\,\mathcal{F}((I-\Delta)\,T) \in L^2 \quad \text{ssi} \quad (I-\Delta)\,T \in H^\sigma. \end{aligned}$$

Il est alors clair que $T \mapsto S := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)\,\hat T)$ est un isomorphisme de $H^{\sigma+2}$ dans H^σ. En particulier, si $S \in H^\sigma$ alors $T := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-1}\,\hat S) \in H^{\sigma+2}$.

a2) - Pour tout $u \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$, on a $\partial^\alpha u \in C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^2\ \forall\,\alpha$, $|\alpha| \le k$ et $i^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\,\hat u = \mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2$ ($\mathcal{F}$ est une isométrie de L^2). En particulier, $(1+|x|^2)^{k/2}\,|\hat u| \le C\,(1+|x_1|^k+...+|x_N|^k)\,|\hat u| \in L^2$ et donc $u \in H^k$.

a3) - On rappelle que $H^\sigma(\mathbb{R}^N) \subset C_0(\mathbb{R}^N)$ si $\sigma > N/2$ (car alors $\hat u \in L^1$ par Cauchy-Schwarz et on utilise que $\mathcal{F}^{-1} : L^1 \to C_0$). Comme $\partial_i : H^{\sigma+1} \to H^\sigma$ (c'est juste l'inégalité $|\xi|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le C\,(1+|\xi|^2)^{(k+1)/2}$), on a $\partial^\alpha u \in C_0(\mathbb{R}^N)$ pour tout $u \in H^\sigma(\mathbb{R}^N)$ et tout α, $|\alpha| \le [\sigma - N/2]$, où $[.]$ désigne la partie entière. Enfin, on remarque que $(1+|\xi|^2)^{k/2} \le 16^{k/2}\,(1+|\eta|^2)^{k/2}\,(1+|\xi-\eta|^2)^{k/2}\ \forall\,\xi,\,\eta \in \mathbb{R}^N$. En effet, pour $\eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\eta| \ge |\xi|/4$ on a $(1+|\eta|^2)\,(1+|\xi-\eta|^2) \ge 1+|\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/16$ et pour $\eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\eta| \le |\xi|/4$ on a $(1+|\eta|^2)\,(1+|\xi-\eta|^2) \ge 1+|\xi-\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/2-|\eta|^2 \ge 1+|\xi|^2/16$ (on a utilisé l'inégalité de Young $|\xi\cdot\eta| \le |\xi|^2/4+|\eta|^2$). Ainsi en notant $\tilde u = (1+|\xi|^2)^{k/2}\hat u$ et $\tilde\varphi = 16^{k/2}\,(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat u$ on obtient

$$|\mathcal{F}(\varphi\, u)|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le |\hat u * \hat\varphi|\,(1+|\xi|^2)^{k/2} \le \tilde u * \tilde\varphi,$$

et donc
$$\|u\,\varphi\|_{H^k} \leq \|\tilde u * \tilde\varphi\|_{L^2} \leq \|\tilde u\|_{L^2}\,\|\tilde\varphi\|_{L^1} \leq C_N\,\|\varphi\|_{H^{k+N+1}}\,\|u\|_{H^k} < \infty.$$
b) Soit $\omega \subset \bar\omega \subset \Omega$. Il existe $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\chi \equiv 1$ sur $\bar\omega$. On a alors $T\,\chi \in \mathcal{E}'(\Omega)$, et donc on peut considérer $T\,\chi$ comme un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (en posant $\langle T\,\chi, \varphi\rangle = \langle T, \chi\,\varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$). Par définition d'une distribution, il existe $m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tels que
$$\forall\,\psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp}\psi \subset \operatorname{supp}\chi \qquad |\langle T, \psi\rangle| \leq C \sup_{\alpha,\,|\alpha|\leq m}\ \sup_{x\in\Omega} |(\partial^\alpha\psi)(x)|.$$
On en déduit
$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \qquad |\langle T\,\chi, \varphi\rangle| \leq C\,\|\chi\,\varphi\|_{W^{m,\infty}} \leq C\,\|\chi\,\varphi\|_{H^{-s}} \leq C\,\|\varphi\|_{H^{-s}},$$
où on a posé $-s := m + N/2 + 1$. Par ailleurs, $\mathcal{F}(\chi\,T) \in C^\infty$ puisque $\chi\,T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et une suite (ρ_m) d'approximation de l'identité
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,(T\,\chi)\,\varphi\,d\xi &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,((T\,\chi)*\rho_m)\,\varphi\,d\xi \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (T\,\chi)*\rho_m\,\mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\,d\xi \\ &= \langle T\,\chi, \mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\rangle \leq C\,\|\mathcal{F}((1+|x|^2)^s\,\varphi)\|_{H^{-s}} = C\|\varphi\|_{L^2}.\end{aligned}$$
Puisque $(L^2)' = L^2$, cela démontre que $(1+|\xi|^2)^s\,\mathcal{F}\,(T\,\chi) \in L^2$ et donc $T\chi \in H^s(\mathbb{R}^N)$. On conclut que $T \in H^s_{loc}(\omega)$ puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ on a $T\,\varphi = T\,(\varphi\,\chi) = (T\,\chi)\,\varphi$.
c) D'après l'étape b) il existe s tel que $u \in H^s_{loc}(\omega)$. On note $r_0 = \min(r,s)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et soit $\chi \in \mathcal{D}(\omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$. On a
$$\nabla(\chi\,u) = \chi\,\nabla u + u\,\nabla\chi$$
et
$$\begin{aligned} u\,\varphi - \Delta(u\,\varphi) &= u\,\varphi - u\,\Delta\varphi - 2\,\nabla u\cdot\nabla\varphi - \varphi\,\Delta u \\ &= u\left(\varphi - \Delta\varphi + 2\,\nabla\chi\cdot\frac{\nabla\varphi}{\chi}\right) - 2\,\nabla(\chi\,u)\cdot\frac{\nabla\varphi}{\chi} + \varphi\,f =: S.\end{aligned}$$
Puisque $f \in H^r_{loc}(\omega)$ et $u \in H^{r_0}_{loc}(\omega)$ on a $f\,\theta \in H^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, $u\,\theta \in H^{r_0}(\mathbb{R}^N)$, et $\nabla(u\,\theta) \in H^{r_0-1}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\theta \in \mathcal{D}(\omega)$, et donc $S \in H^{r_0-1}(\mathbb{R}^N)$. On en déduit, grâce au fait que $(I-\Delta)^{-1} : H^\sigma \to H^{\sigma+2}$, que $u\,\varphi \in H^{r_0+1}$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ cela signifie que $u \in H^{r_0+1}_{loc}$. En itérant l'argument on obtient in fine $u \in H^{r+2}_{loc}$. Enfin, si $f \in C^\infty(\omega)$ alors $f \in H^r_{loc}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, donc $u \in H^{r+2}_{loc}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, et enfin donc $u \in C^\infty(\omega)$.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert (on note $(\ ,\ )$ son produit scalaire et $|\ |$ la norme associée), soit C un convexe fermé de H et soit $T : C \to H$ une contraction, c'est-à-dire, une application telle que

(1)
$$|Tu - Tv| \leq |u - v| \qquad \forall u, v \in C.$$

On suppose pour commencer (questions 1 et 2) que $C = H$.
1) Établir l'inégalité $((v - Tv) - (w - Tw), v - w) \geq 0 \ \ \forall v,\, w \in H$.
2) Soit (u_n) une suite de H telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement} \qquad \text{et} \qquad u_n - Tu_n \to f \text{ fortement.} \tag{2}$$

Montrer que $(f + Tw - w, u - w) \geq 0$ pour tout $w \in H$. En déduire que $u - Tu = f$.

On revient au cas général où C est un convexe fermé non vide quelconque de H.
3) Soit maintenant (u_n) une suite de C qui satisfait (2). En introduisant l'opérateur $S = T \circ P_C$, où P_C est l'opérateur de projection sur C, montrer que l'on a encore $u - Tu = f$.
4) Montrer que si C est borné et $T(C) \subset C$ alors T admet un point fixe. (Ind. On pourra penser à introduire la famille d'opérateurs (T_ε) avec $T_\varepsilon\, u = (1 - \varepsilon)\, T\, u + \varepsilon\, a$ avec $a \in C$ fixé et $\varepsilon > 0$).

Correction de l'Exercice 5. 1) On a $\forall v,\, w \in H$:

$$((v-Tv)-(w-Tw), v-w) = (v-w, v-w)-(Tw-Tv, v-w) \geq |v-w|^2 - |Tv-Tw|\,|v-w| \geq 0.$$

2) On écrit

$$((u_n - Tu_n) - (w - Tw), u_n - w) \geq 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, w \in H,$$

et on passe à la limite en utilisant que $\alpha_n \to \alpha$ fort et $\beta_n \rightharpoonup \beta$ faible impliquent $(\alpha_n, \beta_n) \to (\alpha, \beta)$; on obtient

$$(f - (w - Tw), u - w) \geq 0, \qquad \forall\, w \in H.$$

On prend $w = u + t\, v$ de sorte que, après avoir diviser par $t > 0$, on a

$$(f - u - t\, v - T(u + t\, v), v) \leq 0, \qquad \forall\, v \in H,\ \forall\, t > 0.$$

On passe à la limite $t \to 0$ en utilisant que $w \mapsto Tw$ est continue et il vient

$$(f - u - T\, u, v) \leq 0, \qquad \forall\, v \in H.$$

En prenant $v = f - u - T\, u$ on obtient $f = u + Tu$.
3) Puisque P_C est une application Lipschitzienne, on a $S = T \circ P_C : H \to H$ satisfait (1). La suite (u_n) satisfait donc

$$u_n \in C, \quad u_n \rightharpoonup u, \quad u_n - Su_n = u_n - Tu_n \to f.$$

Comme C est convexe et fermé, il est faiblement fermé et donc $u \in C$. D'après l'étape 2 appliquée à S on a

$$u - Tu = u - Su = f.$$

4) On a $|T_\varepsilon w - T_\varepsilon v| = (1-\varepsilon)\,|Tw - Tv| \leq (1-\varepsilon)\,|w-v|$, et T_ε est contractante de $C \to C$ (par convexité). C étant un espace métrique complet, le théorème de point fixe de Banach (ou théorème de l'application contractante) dit qu'il existe (un unique) $u_\varepsilon \in C$ tel que $T_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$. D'une part, C étant un borné de H Hilbert, on peut extraire de (u_ε) une sous-suite encore notée (u_ε) telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ au sens faible dans H, pour un certain $u \in H$. D'autre part,

$$u_\varepsilon - Tu_\varepsilon = u_\varepsilon - T_\varepsilon u_\varepsilon + T_\varepsilon u_\varepsilon - Tu_\varepsilon = \varepsilon\,(a - Tu_\varepsilon) \to 0$$

puisque Tu_ε $(\in C)$ est bornée. On conclut grâce à l'étape 3 que $u = Tu$, et donc T admet un point fixe.