Université Paris-Dauphine **2022-2023**
Cours de "Intégrale de Lebesgue et Probabilités" Septembre 2022

Chapitre 2 - Mesure positive, construction de l'intégrale de Lebesgue

Table des matières

Sont écrites en bleu les parties particulièrement importantes (à relire plusieurs fois !), en violet les parties traitées en TD (résultats à connaître pour sa culture) et en rouge les parties hors programme.

1 Mesure positive

Définition 1.1. *Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Une mesure μ sur $(E, \mathscr{A})$ est une application $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$ telle que*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) μ est σ-additive : si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$ deux à deux disjoints alors

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On appelle "espace mesuré" la donnée d'un triplet $(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Exemples 1.2. *1) La mesure grossière d'une tribu $\mathscr{A}$ définie par $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathscr{A} \backslash \{\emptyset\}$.*

2) La mesure de Dirac en un point $a \in E$ définie par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$, $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A$, pour tout $A \in \mathscr{A}$.

3) La mesure "de décompte" sur E (également appelée mesure "de comptage" sur $\mathbb{N}$) définie sur $\mathscr{A} := \mathscr{P}(E)$ par $\mu(A) = card(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, de sorte que $\mu(A) = +\infty$ si A contient un nombre infini d'éléments.

4) La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. C'est la mesure λ définie sur la tribu borelienne $\mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\lambda(P) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$ pour tout pavé $P := \prod_{i=1}^N (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \bar{\mathbb{R}}$. La mesure de Lebesgue satisfait la propriété d'invariance par translations

$$\forall\, A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N),\ \forall\, a \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda(A + a) = \lambda(A)$$

et de régularité : pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé borné K de $\mathbb{R}^N$ et un ensemble ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$K \subset A \subset \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \lambda(\mathcal{O}) - \varepsilon \leq \lambda(A) \leq \lambda(K) + \varepsilon.$$

5) Mesure de Stieljès sur $\mathbb{R}$. Pour $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, c'est la mesure μ définie sur la tribu borelienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(]a,b[) = F(b^-) - F(a^+)$ pour tout $a < b \in \mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue est la mesure de Stieljès associée à la fonction identité. La mesure de Dirac au point $0 \in \mathbb{R}$ est la mesure de Stieljès associée à la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ si $x < 0$, $H(x) = 1$ si $x \geq 0$.

6) Si μ est une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ et $A \in \mathscr{A}$, alors la trace $\mu_{|A}$ définie sur la tribu trace $\mathscr{B}$ par $\mu_{|A}(B) := \mu(B)$ pour tout $B \in \mathscr{B}$ est une mesure. On rappelle que la tribu trace est $\mathscr{B} := \{C \cap A,\ C \in \mathscr{A}\}$. La trace $\mu_{|A}$ est donc également une mesure sur $(E, \mathscr{A})$ définie par $\mu_{|A}(B) := \mu(B \cap A)$ pour tout $B \in \mathscr{A}$. L'exemple typique est $\lambda_{|(a,b)}$ la mesure de Lebesgue restreinte à un intervalle $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.3. *Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

(1) On dit que μ est une mesure finie si $\mu(E) < \infty$. On dira alors que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est de mesure totale finie.
Ex : Dirac, comptage sur un ensemble fini, Lebesgue restreint à un intervalle borné.

(2) On dit que μ est une mesure de probabilité si $\mu(E) = 1$. On dira alors que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de probabilité ou probabilisé.
Ex : Dirac, Lebesgue restreint à un intervalle de longueur 1, $\nu(A) := \mu(A)/\mu(E)$ si μ est finie.

(3) On dit que μ est une mesure σ-finie s'il existe une suite (A_n) de $\mathscr{A}$ telle que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $E = \cup_{n \geq 0} A_n$. On dira alors que $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.
Ex : Comptage sur $\mathbb{N}$, Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$ ou $\mathbb{C}^N$.

Deux opérations élémentaires sur les mesures.

1) Si μ est une mesure et $\theta \geq 0$ alors $\theta\mu$ est une mesure : $(\theta\mu)(A) = \theta\mu(A)$.

2) Si $(\mu_j)_{j \in J}$ est une famille de mesures (sur un même espace mesurable $(E, \mathscr{A})$) indexée par un ensemble J au plus dénombrable , alors $\mu := \sum_{j \in J} \mu_j$ est une mesure.
Ex : Si $E = \mathbb{N}$ et δ_n est la mesure de Dirac en $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ est la mesure de comptage :

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n(A) = \sum_{n \in A} 1 = \text{card}(A).$$

Cinq propriétés élémentaires sur les mesures. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1) **Additivité de μ.** Si $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ deux à deux disjoints alors $\mu\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

Pour voir cela, il suffit de compléter la famille en une suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ en posant $A_k = \emptyset$ pour tout $k \geq n+1$ et d'appliquer la propriété (ii) de σ-additivité de μ.

2) **Croissance de μ.** Si $A, B \in \mathscr{A}$, $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si de plus $\mu(B) < \infty$, alors $\mu(A) < \infty$ et $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \backslash A)$.
Pour voir cela, on écrit $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$ grâce à la propriété d'additivité.

3) **σ-sous additivité de μ.** Si $(A_n)_{n \in J}$, est une famille au plus dénombrable ($J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$) d'ensembles de $\mathscr{A}$ et non forcément deux à deux disjoints, on a $\mu\Big(\bigcup_{n \in J} A_n\Big) \leq \sum_{n \in J} \mu(A_n)$.

On pose $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n \backslash (\cup_{i=1}^{n-1} A_i)$ pour $n \geq 2$. Les ensembles (B_n) étant deux à deux disjoints, les propriétés de (σ-)additivité et croissance de μ impliquent

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in J} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n \in J} B_n\Big) = \sum_{n \in J} \mu(B_n) \leq \sum_{n \in J} \mu(A_n).$$

4) **Continuité de μ par limite croissante** (cas particulier du théorème de Beppo Levi). Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de $\mathscr{A}$, soit donc $A_n \subset A_m$ pour tout $n \leq m$, alors

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \quad \text{où} \quad A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

On définit $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ pour $n \geq 1$, de sorte que les éléments de la suite (B_n) sont deux à deux disjoints et donc

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{N} B_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \mu(A_N). \end{aligned}$$

Exercice 1.4. *Montrer qu'une application $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ additive, continue pour les limites croissantes (i.e. vérifiant la propriété 4) ci-dessus) et telle que $\mu(\emptyset) = 0$ est une application σ-additive, c'est donc une mesure. (Ind. Pour une suite (B_n) d'ensembles disjoints, introduire la suite (A_N) définie par $A_N := B_1 \cup \cdots \cup B_N$).*

5) **Continuité de μ par limite décroissante** (cas particulier du théorème de convergence monotone). Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de $\mathscr{A}$, soit donc $A_n \subset A_m$ pour tout $n \geq m$, telle qu'au moins un des A_n est de mesure finie, alors

$$\mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

On suppose donc $\mu(A_{n_0}) < \infty$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$. On pose $B_n := A_{n_0} \backslash A_n$ de sorte que (B_n) est une suite croissante à laquelle on peut appliquer la propriété précédente. On a ainsi

$$\begin{aligned} \mu(A_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq n_0} B_n\Big) = \mu\Big(A_{n_0} \backslash \bigcap_{n\geq n_0} A_n\Big) \\ &= \mu(A_{n_0}) - \mu\Big(\bigcap_{n\geq n_0} A_n\Big) = \mu(A_{n_0}) - \mu\Big(\bigcap_{n\geq 0} A_n\Big). \end{aligned}$$

Ici, la condition $\mu(A_{n_0}) < \infty$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$ est importante comme le montre l'exemple des $A_n := [n, \infty[$ pour lesquels on a $\forall\, n \geq 1$, $\lambda(A_n) = +\infty$ et donc $\lim \lambda(A_n) \neq \lambda(\cap A_n) = \lambda(\emptyset) = 0$.

Lemme 1.5 (de Borel-Cantelli)**.** *Soit (A_n) une suite de $\mathscr{A}$ telle que*

$$\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty.$$

Alors

$$\mu(\limsup A_n) = 0, \quad \textit{où} \quad \limsup A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Preuve du Lemme 1.5. On écrit

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \mu(A_k) = 0,$$

où on a appliqué le résultat de limite monotone (propriété 5 ci-dessus) à la suite décroissante $\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$ dans la première égalité et on a utilisé la σ-sous-additivité (propriété 3 ci-dessus) pour avoir l'inégalité. $\square$

Théorème 1.6 (unicité)**.** *Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathscr{A})$ et $\mathscr{I}$ une classe de parties de E stable par intersection (π-système). On suppose également que $\sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{A}$, que $\mu(A) = \nu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{I}$ et que $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où (E_n) est une suite de $\mathscr{I}$ telle que $E = \cup_n E_n$. Alors $\mu = \nu$.*

Preuve du Théorème 1.6 dans le cas où $\mathscr{I}$ est une algèbre. On suppose ici que $\mathscr{I}$ est une algèbre et $\mu(E) = \nu(E) < \infty$. On définit

$$\mathscr{M} := \{A \in \mathscr{A};\ \mu(A) = \nu(A)\}.$$

On a $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}$ et montrons que $\mathscr{M}$ est une classe monotone. Si (A_n) est une suite croissante de $\mathscr{M}$, alors

$$\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n) = \lim \nu(A_n) = \nu(\lim A_n),$$

et donc $\lim A_n \in \mathscr{M}$. Pour une suite décroissante, on utilise l'hypothèse de finitude. D'après le lemme I.2.9 de classe monotone, on a donc $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{I}) = \mathcal{M}(\mathscr{I}) \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{A}$. □

Preuve du Théorème 1.6 dans le cas général pour une mesure finie en utilisant la variante du lemme de classes monotones (voir la Remarque 2.11 du chapitre 1). On définit $\mathscr{M}$ comme dans la preuve précédente et on fait donc encore l'hypothèse $\mu(E) = \nu(E) < \infty$. On montre que $\mathscr{M}$ est un λ-système.

(i) Par hypothèse, $\mu(E) = \nu(E)$ de sorte que $E \in \mathscr{M}$.

(ii) Pour $A, B \in \mathscr{M}$, $A \subset B$, on a $\mu(A) = \nu(A)$, $\mu(B) = \nu(B)$ et donc

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \backslash A),$$

de sorte que $B \backslash A \in \mathscr{M}$.

(iii) Pour (A_n) une suite croissante de $\mathscr{M}$, en utilisant la propriété de passage à la limite dans les suites croissante pour μ et ν, on a

$$\mu(\bigcup A_n) = \lim \mu(A_n) = \lim \nu(A_n) = \nu(\bigcup A_n),$$

de sorte que $\bigcup A_n \in \mathscr{M}$.

Nous venons de démontrer que $\mathscr{M}$ est un λ-système. Puisque par hypothèse et définition $\mathscr{I} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ et en notant $\mathscr{L}(\mathscr{C})$ le plus petit λ-système contenant l'ensemble de parties $\mathscr{C}$, on en déduit

$$\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{I}) = \mathscr{L}(\mathscr{I}) \subset \mathscr{L}(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \subset \mathscr{A},$$

où on a utilisé la variante du lemme de classes monotones (Remarque 2.11 du chapitre 1) à la deuxième égalité et le fait que $\mathscr{M}$ est un λ-système à la dernière égalité. Nous avons donc établi que $\mathscr{A} = \mathscr{M}$ et le résultat.

Preuve du Théorème 1.6 dans le cas général. On définit $\mathscr{M}$ comme dans la preuve précédente, et on sait donc que $\mathscr{M}$ est une classe monotone. On fait de plus l'hypothèse $\mu(E) = \nu(E) < \infty$ et on laisse le soin au lecteur de traiter le cas de mesures σ-finies.

• On observe que pour tout $A, B \in \mathscr{A}$ et toute mesure λ sur $\mathscr{A}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) &= \lambda(A \backslash B) + \lambda(B \backslash A) + 2\lambda(A \cap B) \\ &= \lambda(A) + \lambda(B). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $B_1, \dots, B_k \in \mathscr{A}$, on a

$$\lambda(B_1 \cup \cdots \cup B_k) = \lambda(B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}) + \lambda(B'_1 \cup \cdots \cup B'_{k-1}) - \lambda(B_k), \tag{1}$$

où $B'_i := B_i \cap B_k$. Par récurrence, on en déduit que $A_1, \dots, A_k \in \mathscr{I}$ implique $A_1 \cup \cdots \cup A_k \in \mathscr{M}$. En effet, il n'y a rien à démontrer lorsque $k = 1$, et si l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $k - 1$, elle l'est aussi au rang k grâce à la relation (1) et la définition de $\mathscr{M}$.

• De plus, si $A, B \in \mathscr{M}$, $A \subset B$, alors

$$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B\backslash A),$$

de sorte que $B\backslash A \in \mathscr{M}$.

• On définit

$$\mathscr{C} := \Big\{\bigcap_{i\in I} A_i,\ I \text{ fini},\ A_i \in \mathscr{I} \text{ ou } A_i^c \in \mathscr{I}\Big\}.$$

Par définition, tout élément $B \in \mathscr{C}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} B &= A_0 \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c \\ &= A_0 \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_0 \backslash (A_1' \cup \cdots \cup A_k'), \end{aligned}$$

avec $A_i \in \mathscr{I}$ et $A_i' := A_i \cap A_0 \in \mathscr{I}$. En particulier, $A_1' \cup \cdots \cup A_k' \in \mathscr{M}$, d'après le premier point, et évidemment $A_1' \cup \cdots \cup A_k' \subset A_0$. Grâce au second point, on en déduit $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}$.

• On définit

$$\mathscr{G} := \Big\{\bigcup_{j\in J} B_j,\ J \text{ fini},\ B_j \in \mathscr{C}\Big\},$$

de sorte que $\mathscr{G} \subset \mathscr{M}$ et $\mathscr{G}$ est une algèbre. En effet, pour $B := B_1 \cup \cdots \cup B_k \in \mathscr{G}$, $B_j \in \mathscr{C}$, on écrit

$$\mu(B) = \mu(B_1 \cup \cdots \cup B_{k-1}) + \mu(B_k) - \mu(B_1' \cup \cdots \cup B_{k-1}'),$$

avec $B_j' := B_j \cap B_k \in \mathscr{C}$, et on conclut aisément par récurrence en utilisant l'étape précédente comme première étape.

Comme dans la preuve précédente, le lemme I.2.9 de classe monotone, permet d'affirmer

$$\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{I}) \subset \sigma(\mathscr{G}) = \mathcal{M}(\mathscr{G}) \subset \mathcal{M}(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \subset \mathscr{A},$$

ce qui prouve bien que μ et ν coïncident. □

2 Intégrale d'une fonction étagée positive

Dans cette section $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Définition 2.1. *Soit f une fonction étagée positive, on note $f \in \mathcal{E}_+(E, \mathcal{A})$, dont l'écriture canonique est*

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

avec les $\alpha_i \geq 0$ distincts et les $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints. On peut prendre ici $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ ou $\alpha_i \in \bar{\mathbb{R}}_+$. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ le nombre

$$\int f d\mu := \int_E f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) \in [0, +\infty],$$

avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$. En particulier, on a

$$\int \mathbf{1}_A d\mu := \mu(A), \quad \forall\, A \in \mathscr{A}.$$

Lemme 2.2. *Cette définition de dépend pas de l'écriture de la fonction étagée f.*

Preuve du Lemme 2.2 - première étape. Soit une écriture de f de la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{1}_{B_j},$$

dans laquelle on suppose seulement que la famille (B_j) forme une partition de E (mais pas que les β_j soient nécessairement distincts). En reprenant les notations pour l'écriture canonique, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{i=1}^{m} \mu(B_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int f d\mu,$$

puisque

$$f = \sum_{i,j} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \cap B_j} = \sum_{i,j} \beta_j \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

de sorte que nécessairement $\alpha_i = \beta_j$ si $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. □

Trois propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions étagées positives.

1) **Additivité.** *Si $f, g \in \mathcal{E}_+$, on a*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Et donc également, si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{E}_+$, on a

$$\int \sum_{i=1}^{n} f_i d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu.$$

Il suffit de montrer la première identité (cas $n = 2$). La deuxième identité s'en déduit par récurrence. En introduisant les écritures canoniques de f, g et non nécessairement canonique de $f + g$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}, \quad g := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}, \quad f + g = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{A_i \cap B_j},$$

et en utilisant le Lemme 2.2-première version, on obtient

$$\begin{aligned} \int (f+g) d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j} \beta_j \mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

2) **Homogénéité.** *Si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\lambda \geq 0$, alors*

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Avec les notations précédentes, on a

$$\int (\lambda f) d\mu = \sum_{i} \lambda \alpha_i \mu(A_i) = \lambda \sum_{i} \alpha_i \mu(A_i) = \lambda \int f d\mu.$$

Preuve du Lemme 2.2 - deuxième étape. Soit une écriture de f de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_j, \quad f_j := \beta_j \mathbf{1}_{B_j},$$

avec les seuls conditions $\beta_j \geq 0$ et $B_j \in \mathscr{A}$. On a alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int f_j d\mu = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(B_j),$$

par additivité et homogénéité (ce qui est presque une propriété de linéarité, mais pas tout à fait, puisque que l'on se restreint ici aux combinaisons linéaires à coefficients positifs). $\square$

3) **Croissance.** *Si $f, g \in \mathcal{E}_+$, $f \leq g$, alors*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

En effet, on a $g = f + (g - f)$ avec $g - f \in \mathcal{E}_+$. Par additivité et positivité de l'intégrale, on a

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f d\mu.$$

Pour $f \in \mathcal{E}_+$, $A \in \mathscr{A}$, on note

$$\int_A f d\mu = \int (f \, \mathbf{1}_A) d\mu.$$

De la sorte, on a

$$\int_E f d\mu = \int f d\mu \quad \text{et} \quad \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu,$$

si $A, B \in \mathscr{A}$ sont disjoints

Terminons cette section par un résultat technique (mais fondamental).

Lemme 2.3. *Soit $f \in \mathcal{E}_+$ et (E_n) une suite croissante de $\mathscr{A}$ telle que $\lim E_n = E$. Alors*

$$\int f d\mu = \int f \mathbf{1}_{\lim E_n} d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu.$$

Preuve du Lemme 2.3. On écrit f sous la forme (canonique)

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

On a donc

$$\int_{E_n} f d\mu = \int \Big\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i \cap E_n} \Big\} d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

Comme pour chaque i, la suite $(A_i \cap E_n)$ est croissante et $\lim A_i \cap E_n = A_i$, on a

$$\lim \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) = \alpha_i \mu(A_i).$$

On conclut en sommant et commutant ces n limites. $\square$

3 Intégrale d'une fonction mesurable positive

Dans cette section $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, et on étend la définition de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions mesurables positives.

Définition 3.1. *On note $\mathscr{M}_+ = \mathscr{M}_+(E, \mathscr{A})$ l'ensemble des fonctions $f : E \to [0, +\infty]$ mesurables. Pour tout $f \in \mathscr{M}_+$, on appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ le nombre*

$$\int f d\mu = \sup\Big\{ \int g d\mu,\, g \in \mathcal{E}_+,\, g \leq f \Big\} \in [0, +\infty],$$

où $\mathcal{E}_+$ désigne l'esnemble des fonctions étagées positives finies (et non pas à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$).

Il convient de remarquer que si $f \in \mathcal{E}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ alors

$$\int f d\mu = \sup\Big\{ \int g d\mu,\, g \in \mathcal{E}_+,\, g \leq f \Big\}$$

où toutes les intégrales sont prises ici au sens de la section précédente. Cela provient de la propriété de croissance de l'intégrale. De même si $f \in \mathcal{E}_+$ est à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$, on peut écrire

$$f = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

avec (A_i) partition, α_i disjoints et disons $\alpha_0 = +\infty$ et $\mu(A_0) > 0$ (si tous les α_i sont finis, on est dans le cas précédent, et si $\mu(A_0) = 0$, on s'y ramène immédiatement). On peut alors définir

$$g_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} + n \mathbf{1}_{A_0},$$

avec $g_n \in \mathcal{E}_+$, $g_n \nearrow f$ et

$$\sup\Big\{ \int g d\mu,\, g \in \mathcal{E}_+,\, g \leq f \Big\} = \sup_{n \geq 1} \int g_n d\mu = +\infty, \qquad \int_E f d\mu = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = +\infty,$$

où toutes les intégrales sont prises ici au sens de la section précédente. Ainsi il n'y a donc pas de conflit entre les notations. Commençons par une **première propriété élémentaire de l'intégrale des fonctions mesurables positives.**

1) **Croissance.** *Si $f, g \in \mathscr{M}_+$, $f \leq g$, alors*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

En definissant $\mathcal{E}_+(f) := \{h \in \mathcal{E}_+,\, h \leq f\}$ et de la même manière $\mathcal{E}_+(g)$, on voit que $h \in \mathcal{E}_+(f)$ implique $h \in \mathcal{E}_+$ et $h \leq f \leq g$, et donc $\mathcal{E}_+(f) \subset \mathcal{E}_+(g)$, de sorte que

$$\int f d\mu = \sup_{h \in \mathcal{E}_+(f)} \int h d\mu \leq \sup_{h \in \mathcal{E}_+(g)} \int h d\mu = \int g d\mu.$$

Nous présentons le premier "grand théorème de convergence" de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 3.2 (de convergence monotone de Beppo Levi)**.** *Soit (f_n) une suite croissante de $\mathscr{M}_+$ de limite (ponctuelle) f. Alors $f \in \mathscr{M}_+$ et*

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu. \tag{2}$$

Preuve du Théorème 3.2. De $f_n \leq f_m \leq f$ pour tout $n \leq m \in \mathbb{N}$ et la propriété de croissance ci-dessus, on a
$$\int f_n d\mu \leq \int f_m d\mu \quad \text{et} \quad \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$
Cela implique une première inégalité
$$\lim \int f_n d\mu \text{ existe, et } \lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$
Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$, $g \leq f$, et $\lambda \in]0,1[$. Posons $E_n := \{x \in E; \lambda g(x) \leq f_n(x)\}$. La suite (E_n) est croissante comme conséquence de la croissance de (f_n). De plus $\cup E_n = E$, puisque $f(x) = \lim f_n(x) > \lambda g(x)$ si $f(x) \neq 0$ (puisque $g(x) < \infty$, par définition), $f(x) = f_n(x) = g(x)$ si $f(x) = 0$. De $f_n \geq \lambda g \mathbf{1}_{E_n}$ et du Lemme 2.3, on déduit
$$\lim \int f_n d\mu \geq \lim \int \lambda g \mathbf{1}_{E_n} d\mu = \lim \lambda \int_{E_n} g d\mu = \lambda \int g d\mu.$$
En faisant tendre $\lambda \to 1$, on obtient
$$\lim \int f_n d\mu \geq \int g d\mu.$$
Comme cette inégalité est vraie pour tout $g \in \mathcal{E}_+$, $g \leq f$, on a démontré la deuxième inégalité cherchée. □

Corollaire 3.3. *Si $f \in \mathscr{M}_+$, il existe (f_n) une suite croissante de $\mathcal{E}_+$ telle que $f_n \to f$ ponctuellement, et*
$$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$
Preuve du Corollaire 3.3. On utilise la Proposition I-4.11 et le Théorème 3.2 de convergence monotone de Beppo Levi. □

Exercice 3.4 (Théorème de convergence monotone pour les suites décroissantes)**.** *Soit (f_n) une suite décroissante de $\mathscr{M}_+$ de limite (ponctuelle) f telle que f_1 est d'intégrale finie. Alors (2) a lieu. (Ind. Consédérer $g_n := f_1 - f_n$).*

Quatre autres propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions mesurables positives.

2) **Additivité.** *Si $f, g \in \mathscr{M}_+$, on a*
$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$
Et donc également, si $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{M}_+$, on a
$$\int \sum_{i=1}^n f_i d\mu = \sum_{i=1}^n \int f_i d\mu.$$
On considère deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de $\mathcal{E}_+$ telles que $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$ qui existent d'après le Théorème I-4.9. L'additivité est vraie pour les fonctions f_n et g_n, et on passe à la limite grâce au Théorème 3.2 de Beppo Levi.

3) **Homogénéité.** *Si $f \in \mathscr{M}_+$, $\lambda \geq 0$, on a*
$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

La preuve se fait selon le même schéma d'approximation que pour la preuve de l'additivité ci-dessus.
4) **σ-additivité** (il s'agit d'un théorème d'inversion des signes somme et intégral (chapitre 3) et aussi de type Fubini-Tonelli (chapitre 4)). *Si (f_n) est une suite de $\mathscr{M}_+$, on a*

$$\int \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big\} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Par additivité, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \int S_N d\mu, \quad S_N := \sum_{n=1}^{N} f_n.$$

La suite (S_N) étant croissante, le Théorème 3.2 de Beppo Levi implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \int S_N d\mu = \int (\lim_{N\to\infty} S_N) d\mu = \int \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big\} d\mu.$$

5) **σ-additivité complète.** *Si (E_n) est une suite de $\mathscr{A}$ qui forme une partition de E et si $f \in \mathscr{M}_+$, on a*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Pour voir cela, il suffit d'appliquer la propriété de σ-additivité à la suite $f_n := f\mathbf{1}_{E_n}$.

Théorème 3.5 (Lemme de Fatou)**.** *Soit (f_n) une suite de $\mathscr{M}_+$, alors*

$$\int [\liminf f_n]\, d\mu \le \liminf \int f_n\, d\mu.$$

On peut retenir en particulier que si (f_n) une suite de $\mathscr{M}_+$ telle que $f_n \to f$ ponctuellement, alors

$$\int f\, d\mu \le \liminf \int f_n\, d\mu.$$

Même dans ce cas, l'inégalité peut être stricte comme on peut le constater avec l'exemple de la suite (f_n) de fonctions boréliennes définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n := \mathbf{1}_{[n,\infty[}$.
Preuve du Lemme 3.5. On pose $g_k := \inf\{f_n, n \ge k\}$ qui par définition est une suite croissante de $\mathscr{M}_+$ et $\lim g_k = \liminf f_n$. Grâce au théorème de Beppo Levi, on a

$$\int [\liminf_{n\to\infty} f_n]\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu.$$

Par ailleurs, puisque cette suite d'intégrales est croissante, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu = \sup_{k\ge 1} \int g_k\, d\mu$$

et, puisque $g_k \le f_n$ pour tout $n \ge k$, on a

$$\int g_k\, d\mu \le \int f_n\, d\mu, \quad \forall\, n \ge k,$$

soit donc

$$\int g_k\, d\mu \le \inf_{n\ge k} \int f_n\, d\mu.$$

On en déduit

$$\sup_{k\ge 1} \int g_k\, d\mu \le \sup_{k\ge 1} \inf_{n\ge k} \int f_n\, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu.$$

On conclut en combinant la première égalité et la dernière inégalité. □

Nous terminons cette section par une inégalité fonctionnelle très simple, mais qui a de multiples conséquences, en particulier le corollaire qui suit.

Théorème 3.6 (Inégalité de Tchebychev)**.** *Si $f \in \mathscr{M}_+$, $\alpha > 0$, alors*

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

Preuve du Théorème 3.6. On écrit

$$f \geq f \, \mathbf{1}_{\{f \geq \alpha\}} \geq \alpha \, \mathbf{1}_{\{f \geq \alpha\}},$$

et on conclut en intégrant cette inégalité. □

Dans un espace mesuré $(E, \mathscr{A}, \mu)$, on dit qu'une propriété est vraie μ-p.p. (ou seulement p.p. s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la mesure de référence) s'il existe $A \in \mathscr{A}$ telle que $\mu(E \backslash A) = 0$ et la propriété est vraie pour tout $x \in A$.

Corollaire 3.7. *Soit $f \in \mathscr{M}_+(E, \mathscr{A}, \mu)$.*
(i) On a $f = 0$ p.p. si, et seulement si, $\int f d\mu = 0$.
(ii) On a $\int f d\mu < \infty$ implique $f < \infty$ p.p.
(iii) On a $f = g$ p.p. pour $g \in \mathscr{M}_+$ implique $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Preuve du Corollaire 3.7. (i) Le sens direct est clair en revenant à la définition de l'intégrale et en commençant par supposer f étagée. Supposons maintenant que $f \in \mathscr{M}_+$ est d'intégrale nulle. Par Tchebychev, on a

$$\mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f d\mu = 0,$$

puis $\mu(\{f > 0\}) = 0$ puisque $\{f > 0\}$ est la limite croissante des ensembles $\{f \geq 1/n\}$. Cela signifie bien que $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$ et donc $f = 0$ p.p.
(ii) Si $\mu(\{f = \infty\}) > 0$ alors par croissance de l'intégrale, on a

$$\int f d\mu \geq \int f \mathbf{1}_{\{f = \infty\}} d\mu = \infty \times \mu(\{f = +\infty\}) = \infty.$$

(iii) Posons $h := f \wedge g = \min(f, g) \in \mathscr{M}_+$. Définissons f' par $f'(x) = f(x) - h(x)$ si $h(x) \neq \infty$, $f'(x) = 0$ si $h(x) = \infty$, et g' de façon analogue. Par définition, $f', g' \in \mathscr{M}_+$ et sont nulles presque partout. De plus, $f = f' + h$, $g = g' + h$. En utilisant l'additivité et (i), on calcule

$$\int f d\mu = \int (f' + h) d\mu = \int f' d\mu + \int h d\mu = \int h d\mu.$$

Le même calcul vaut pour g et termine la preuve.
(iii) Une preuve "alternative" est la suivante. On écrit

$$\int f \vee g \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu + \int (f \vee g - f \wedge g) \, d\mu = \int f \wedge g \, d\mu,$$

puisque la fonction $f \vee g - f \wedge g \in \mathscr{M}_+$ est nulle presque partout (en adoptant ici, et seulement ici, la convention $\infty - \infty = 0$). On observe que $f \wedge g \leq f, g \leq f \vee g$, de sorte que

$$\int f \wedge g \, d\mu \leq \int f \, d\mu, \int g \, d\mu \leq \int f \vee g \, d\mu,$$

et on conclut grâce au fait que les termes aux deux extrémités sont égaux. □

4 Intégrale d'une fonction intégrable

Dans cette section $(E, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Définition 4.1. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si f est mesurable et $|f|$ est d'intégrale finie. On note $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ le nombre*

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu,$$

où $f_+ = f \vee 0$ et $f_- = (-f) \vee 0$, de sorte que $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$ et $f_\pm$ sont d'intégrale finie.

Remarque 4.2. *(1) Si $f = g - h$ avec $g, h \in \mathscr{M}_+$ d'intégrale finie, on a $f_+ + h = f_- + g$, de sorte que*

$$\int f_+ \, d\mu + \int h \, d\mu = \int f_- \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

et donc également

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu - \int h \, d\mu.$$

(2) On peut adapter sans peine la théorie au cas où $f : E \to \mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{C}^N$) en raisonnant composante par composante. Par exemple, si f est à valeurs complexes et $f = \Re e\, f + i \Im m\, f$, on pose

$$\int f d\mu = \int (\Re e\, f) d\mu + i \int (\Im m\, f) d\mu$$

Plus délicat, et nous n'aborderons pas cela dans ce cours, est la définition de l'intégrale de Lebesgue dans le cas où $f : E \to X$ lorsque X est un espace de Banach séparable.

Proposition 4.3 (Inégalité triangulaire et linéarité)**.** *Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\Big| \int f d\mu \Big| \le \int |f| d\mu, \quad \int |f + g| d\mu \le \int |f| d\mu + \int |g| d\mu, \quad \int |\lambda g| d\mu = |\lambda| \int |g| d\mu.$$

De plus, on a $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1$, donc $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel, et

$$\int (f + \lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu. \tag{3}$$

Preuve de la Propriété 4.3. Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on écrit

$$\Big| \int f d\mu \Big| = \Big| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \Big| \le \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int |f| d\mu.$$

Pour $f, g \in \mathcal{L}^1$, la fonction $f + g$ est mesurable et

$$\int |f + g| d\mu \le \int (|f| + |g|) d\mu = \int |f| d\mu + \int |g| d\mu.$$

On en déduit que $f + g$ est intégrable. On a

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

et la Remarque 4.2-(2) implique la linéarité (3) dans le cas $\lambda = 1$) (i.e. la propriété d'additivité). Par ailleurs, si $\lambda > 0$ alors $\lambda g = |\lambda| g_+ - |\lambda| g_-$ et si $\lambda < 0$ alors $\lambda g = |\lambda| g_- - |\lambda| g_+$. On en déduit

$$\int |\lambda g| d\mu = |\lambda| \int |g| d\mu, \quad \int \lambda g d\mu = \lambda \int g d\mu,$$

dans les deux cas. $\square$

3) **Croissance.** *Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, $f \leq g$, alors*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

On écrit $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $f^+ \leq g^+$, $f^- \geq g^-$, et on utilise la croissance de l'intégrale pour les fonctions de $\mathscr{M}_+$.

Exercice 4.4. *Soit $f \in \mathcal{L}^1$ une fonction telle que pour toute fonction φ mesurable, positive et bornée, on a*

$$\int_E f\varphi d\mu = 0.$$

Montrer que $f = 0$ presque partout. (Ind. Consédérer $\varphi = \mathbf{1}_{f>0}$ puis $\varphi = \mathbf{1}_{f<0}$).

5 Deux exemples d'intégrales

• Lorsque $E = \mathbb{N}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mu = \sum_{n\geq 0} \delta_n$, l'intégrale de Lebesgue coïncide avec la sommation : pour toute fonction (suite) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ positive, on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n\geq 0} f_n.$$

Plus généralement, si $\mu = \sum_{n\geq 0} \alpha_n \delta_n$, pour une suite positive (α_n) et si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n\geq 0} f_n \alpha_n.$$

La théorie présentée dans ce chapitre correspond alors à la théorie des séries positives (chapitre 3) et des séries absolument convergentes (section 4).

• Lorsque $E = I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, $\mathscr{A}$ est la tribu de Borel $\mathscr{B}(I)$ et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, l'intégrale de Lebesgue coïncide avec l'intégrale de Riemann généralisée (ou impropre) sur les fonctions continues par morceaux : pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux, on a **et on note généralement** :

$$\int_E f d\lambda = \int_I f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dans ce cas, l'intégrale de Lebesgue généralise l'intégrale de Riemann puisqu'elle est définie pour des fonctions bien plus générales : pour la classe des fonctions mesurables positives et pour la classe des fonctions intégrables.

Plus généralement, si $\mu = g\lambda$, pour une fonction $g : I \to \mathbb{R}_+$ Borel mesurable, et si $f : I \to \mathbb{R}_+$ est Borel mesurable, alors on a **et on note généralement** :

$$\int_E f d\mu = \int_I f(x)\, g(x) dx.$$

• On peut évidemment combiner les deux exemples ci-dessus.