

TD 8 : Variables gaussiennes, conditionnement

On traitera en priorité les exercices notés d'un ♠. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♣.

1 Variables gaussiennes

Exercice 1. ♠ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $M \in \mathcal{M}_{kd}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que

$$\mathbb{E}(MX) = M\mathbb{E}(X), D_{MX} = MD_X {}^tM.$$

b) X suit une loi $\mathcal{N}_d(0, I)$ et M est une matrice orthogonale à coefficients réels. Déterminer la loi de $U = MX$.

c) Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, D)$ où

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. Déterminer la loi du vecteur $Y = P^{-1}X$.

Exercice 2. ♠ Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ sont des réels.

On pose $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n b_i X_i$.

a) Montrer que le vecteur $Z = (X, Y)$ est gaussien.

b) Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$.

Exercice 3. ♣ Soient X et Y deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et de coefficient de corrélation $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \in]0, 1[$.

On suppose que le couple (X, Y) est gaussien. Soit $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$.

a) Déterminer la loi de (X, Z) avec le moins de calculs possibles. Quelle est la loi de (X, Y) ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

Exercice 4. ♠ Soient X, Y, Z indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$

- b) Montrer que les variables $U = X + Y + Z$, $V = 2X - Y - Z$ et $W = Y - Z$ sont indépendantes.

Exercice 5. ♠ Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ , d'espérance et de variance finies.

Soient $Y_1 = \frac{1}{2}X_1$, $Y_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + X_2)$, ... $Y_n = \frac{1}{2}(Y_{n-1} + X_n)$...

- Calculer l'espérance et la variance de Y_n .
- On suppose que X_1 suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Exercice 6. ♠ Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance K satisfait $\det K > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $X = \mu + BY$ où Y suit la loi $\mathcal{N}_d(0, I)$.

Exercice 7. ♠ Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de densité

$$f(x) = C \exp -\frac{1}{2} (7\|x\|^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3).$$

Soit de plus Y le vecteur défini par $X = AY$ avec

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Y admet une densité de probabilité, et déterminer : cette densité, la valeur de C , la matrice de covariance de Y et celle de X .

Exercice 8. ☞ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$ et $\text{Var}(X_n) \rightarrow \sigma^2 \in \mathbb{R}$ impliquent que (X_n) converge en loi vers une variable gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

2 Conditionnement.

Exercice 9. ☞ On lance deux dés (de façon indépendante). On note X et Y le résultat de chaque dé.

- Calculer $\mathbb{E}(X + Y | X)$
- Calculer $\mathbb{E}(X | X + Y)$

Exercice 10. ☞ Soient $X, Y \in L^2$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{E}(X | \mathcal{B})] = \mathbb{E}[X \mathbb{E}(Y | \mathcal{B})].$$

Exercice 11. ☞ Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_3$ est indépendante de $\sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, et soit X une variable $\mathcal{B}_1$ -mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}(X | \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X | \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3).$$

Exercice 12. ♠ Soient $\mathcal{B}$ une sous-tribu et $\mathbb{Q}$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$: $d\mathbb{Q} = f d\mathbb{P}$ où $f \in L^2$ et $f \geq 0$.

a) Soit X est une v.a. mesurable et bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X | \mathcal{B}) \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f | \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(fX | \mathcal{B}).$$

b) Montrer que, si f est $\mathcal{B}$ -mesurable,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X | \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X | \mathcal{B}) \text{ p.s. sur } \{f > 0\}.$$

Exercice 13. ♠ Soient X et Y deux v.a.i. de même loi de densité $(x \mapsto e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x))$. On pose $T = X + Y$. Calculer $\mathbb{E}(g(X) | T)$ pour g mesurable et positive.

Exercice 14. ♠ Soient X, Y et Z trois variables réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) Calculer, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X | X + sY + tZ)$ et $\mathbb{E}[\exp(isXY + itXZ) | X]$.

b) Montrer que la fonction caractéristique du couple (XY, XZ) est donnée par

$$\Psi(s, t) = \frac{1}{(1 + s^2 + t^2)^{1/2}} \text{ où } (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application Ψ_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par

$$\Psi_n(s, t) = \frac{1}{(1 + s^2 + t^2)^{n/2}} \text{ où } (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$

est la fonction caractéristique d'un couple (U_n, V_n) que l'on déterminera.

d) Etudier la convergence en loi éventuelle de (U_n, V_n) quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 15. ♠ Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ , d'espérance et de variance finies.

Soient $Y_1 = \frac{1}{2}X_1$, $Y_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + X_2)$, ... $Y_n = \frac{1}{2}(Y_{n-1} + X_n)$...

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n .

b) On suppose que X_1 suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Exercice 16. ♠ Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance K satisfait $\det K > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $X = \mu + BY$ où Y suit la loi $\mathcal{N}_d(0, I)$.

Exercice 17. ♠ Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de densité

$$f(x) = C \exp -\frac{1}{2} (7\|x\|^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3).$$

Soit de plus Y le vecteur défini par $X = AY$ avec

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Y admet une densité de probabilité, et déterminer : cette densité, la valeur de C , la matrice de covariance de Y et celle de X .

Exercice 18. ☞ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mu \in \mathbb{R}$ et $\text{Var}(X_n) \rightarrow \sigma^2 \in \mathbb{R}$ impliquent que (X_n) converge en loi vers une va gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.