Université Paris-Dauphine **2018-2019**
Cours de "Intégrale de Lebesgue et probabilités" Déecembre 2018

Chapitre 10 - Constructions de mesures (hors programme)

Table des matières

1 Théorèmes de Carathéodory

Définition 1.1 *On dit que $\mu^* : \mathscr{P}(E) \to [0, \infty]$ est une mesure extérieure si*
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) μ^* est croissante : $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ si $A \subset B$;
(i) μ^* est σ-sous-additive : pour toute suite (A_n) de $\mathscr{P}(E)$, on a

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Théorème 1.2 (Carathéodory) *Etant donnée une mesure extérieure sur un ensemble E, on définit l'ensemble de parties*

$$\mathcal{A} := \big\{A \subset E;\ \mu^*(C) = \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c)\ \forall C \subset E\big\}.$$

Alors
(i) $\mathcal{A}$ est une tribu ;
(ii) $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ est une mesure positive.

Idée de la preuve. • Pour $A, B \in \mathcal{A}$ et $C \subset E$, on a

$$\begin{aligned} \mu^*(C \cap (A \cup B)) &= \mu^*(C \cap (A \cup B) \cap A) + \mu^*(C \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B \cap A^c). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\mu^*(C \cap (A \cup B)) + \mu^*(C \cap (A \cup B)^c) = \\ &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap B \cap A^c) + \mu^*(C \cap A^c \cap B^c) \\ &= \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) + \mu^*(C \cap A^c) = \mu^*(C), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}$ est stable par union finie. On en déduit immédiatement que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

• On se donne maintenant une suite $(B_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. On montre par récurrence que pour tout $C \subset E$ et tout $n \geq 1$

$$\mu^*(C) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(C \cap B_k) + \mu^*\Big(C \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big)^c\Big).$$

Par croissance de μ^*, on a alors

$$\mu^*(C) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(C \cap B_k) + \mu^*\big(C \cap B^c\big), \quad B := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

pour tout $n \geq 1$, et donc

$$\mu^*(C) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(C \cap B_k) + \mu^*\big(C \cap B^c\big). \tag{1.1}$$

Par σ-sous-additivité de μ^*, cela prouve

$$\mu^*(C) \geq \mu^*\big(C \cap B\big) + \mu^*\big(C \cap B^c\big).$$

Par σ-sous-additivité de μ^*, l'inégalité inverse est immédiate, ce qui prouve que $B \in \mathcal{A}$. Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une suite quelconque de $\mathcal{A}$, on définit la suite $(B_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, en posant $B_1 := A_1, \ldots, B_k := A_k \backslash B_{k-1}$ et on observe que $\cup A_k = \cup B_k \in \mathcal{A}$, ce qui termine la preuve du fait que $\mathcal{A}$ est une tribu.

• Soit à nouveau $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. En prenant $C := \cup B_k$ dans (1.1) et en utilisant la notation $B := \cup B_k$, on trouve

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\Big(\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \cap B_k\Big) + \mu^*\big(B \cap B^c\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*\big(B_k\big).$$

Par hypothèse de σ-sous-additivité de μ^*, cette inégalité est en fait une égalité, c'est-à-dire que μ^* est σ-additive sur les éléments de $\mathcal{A}$. ◻

Théorème 1.3 (Carathéodory) *Soient*

(i) $\mathcal{B}$ une semi-algèbre de E ;

(ii) $\mu^\sharp : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ une application σ-finie et σ-additive au sens où

— *il existe une suite (B_n) de $\mathcal{B}$ telle que $\cup_n B_n = E$ and $\mu(B_n) < \infty$;*

— *pour toute suite (B_n) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$ telle que $\cup_n B_n \in \mathcal{B}$ on a*

$$\mu^\sharp\big(\bigcup_n B_n\big) = \sum \mu^\sharp(B_n).$$

Alors il existe une unique mesure σ-finie μ sur $\sigma(\mathcal{B})$ telle que $\mu_{|\mathcal{B}} = \mu^\sharp$.

Idée de la preuve. Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on définit

$$\mu^*(A) := \inf\big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu^\sharp(B_k);\ B_k \in \mathcal{B},\ A \subset \bigcup_k B_k\big\}.$$

On vérifie que μ^* est une mesure extérieure. Le Théorème 1.2 nous dit que l'on peut construire une tribu $\mathcal{A}$ et une mesure μ sur $\mathcal{A}$ à partir de la mesure mesure extérieure. On vérifie alors que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, ce qui permet de conclure. ◻

2 Construction de la mesure de Lebesgue

Théorème 2.1 (Lebesgue) *Il existe une mesure λ borélienne sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\lambda(]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_d, b_d[) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i),$$

pour tout pavé $]a_1, b_1[\times \ldots]a_d, b_d[\subset \mathbb{R}^d$. De plus, pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx, \tag{2.1}$$

où le terme de droite désigne l'intégrale au sens de Riemann.

Ebauche de la preuve (Cas $d = 1$ pour simplifier, on peut alors passer au cas de la dimension supérieure $d \geq 2$ à l'aide de la théorie du Fubini-Tonelli). Pour un intervalle (a, b) de $\bar{\mathbb{R}}$, $a < b$, on pose

$$\lambda^\sharp((a, b)) = b - a.$$

Ici, les parenthèses (et) désignent indistinctement les crochets [et]. On sait (depuis le Chapitre 1) que l'ensemble $\mathcal{B}$ des unions finies d'intervalles forme une semi-algèbre. On peut appliquer le Théorème 1.3 de Carathéodory qui nous dit qu'il existe une tribu $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ contenant $\mathcal{B}$ et une mesure λ sur $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ qui coïncide avec $\lambda^\sharp$ sur $\mathcal{B}$. En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ contient également la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ qui a été définie comme étant la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$. Enfin, pour $f \in C_c(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(\frac{i}{n}) \mathbf{1}_{(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n})} \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \, f(\frac{i}{n}) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx,$$

où on utilise le théorème de convergence dominée pour justifier la première limite et la définition de l'intégrale de Riemann pour justifier la seconde limite. On notera que les deux sommes sont en fait finies pour tout $n \geq 1$ fixé. $\square$

3 Complétion d'une tribu

Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition 3.1 *- On dit que $N \subset E$ est μ-négligeable (ou simplement négligeable) si $N \subset A \in \mathscr{A}$ et $\mu(A) = 0$.*

- La tribu $\mathscr{A}$ est dite complète pour la mesure μ si elle contient tous les négligeables.

Proposition 3.2 *L'ensemble $\mathscr{B} := \{A \cup N, \ A \in \mathscr{A}, \ N$ négligeable$\}$ est la plus petite tribu complète contenant $\mathscr{A}$. La mesure μ peut être prolongée d'une unique façon en une mesure μ^* sur $\mathscr{B}$. La mesure μ^* est appelée la mesure complétée de μ.*

Exemples 3.3 *Sur $\mathbb{R}$, on définit la mesure extérieure*

$$\lambda^*(A) := \inf\{\mu^*(\mathcal{O}); \ \mathcal{O} \text{ ouvert}, \ A \subset \mathcal{O}\}, \quad \mu^*(]a, b[) = b - a.$$

On appelle tribu de Lebesgue, on note $\mathscr{L}(\mathbb{R})$, la tribu que l'on obtient à partir de λ^* grâce au Théorème 1.2. C'est aussi celle que l'on obtient en appliquant successivement les Théorèmes 4.1 et 2.1. La tribu de Lebesgue $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ est la tribu complétée de la tribu de Borel $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{L}(\mathbb{R}) \neq \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Pour voir ce dernier point, on définit l'ensemble de Cantor C de la manière suivante : on note $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $C_2 := [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$, ..., puis $C := \lim_n C_n$. Il est clair que C est négligeable et on peut montrer qu'il n'est pas dénombrable. Donc l'ensemble des parties de C est de cardinal strictement supérieur à la puissance du continu et le cardinal de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ n'est donc pas plus petit. D'autre part, on peut montrer que le cardinal de $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est celui de $\mathbb{R}$. On a donc card$\mathscr{L}(\mathbb{R}) >$ card$\mathscr{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer à l'aide de l'axiome du choix qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas Lebesgue mesurable.

4 Théorèmes de représentation de Riesz-Markov

Théorème 4.1 (Riesz-Markov) *Soit T une forme linéaire positive sur $C_c(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire, une application $T : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ telle que*

(i) T est linéaire : $T(\phi + \alpha\psi) = T(\phi) + \alpha T(\psi)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$;

(ii) T est positive : $T(\phi) \geq 0$ si $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \geq 0$.

Alors, il existe une unique mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, \mu(dx).$$

Idée de la preuve. • Pour un ouvert non vide $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, on définit

$$\mu^*(\mathcal{O}) := \sup\{T(\phi);\ \phi \in C_c(\mathbb{R}^d),\ 0 \leq \phi \leq 1,\ \operatorname{supp} \phi \subset \mathcal{O}\}$$

et $\mu^*(\emptyset) = 0$. On vérifie que

(a) $\mu^*(\mathcal{O}_1) \leq \mu^*(\mathcal{O}_2)$ si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$;

(b) $\mu^*(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \leq \mu^*(\mathcal{O}_1) + \mu^*(\mathcal{O}_2$;

(c) $\mu^*(\cup \mathcal{O}_n) \leq \sum_n \mu^*(\mathcal{O}_n)$, pour toute suite d'ouverts $(\mathcal{O}_n)$.

• Pour un ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^d$, on définit

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu^*(\mathcal{O});\ \mathcal{O} \text{ ouvert},\ A \subset \mathcal{O}\}$$

On vérifie que μ^* est une mesure extérieure. On note $\mathscr{A}$ la tribu associée et définie dans le Théorème 1.2 de Carathéodory.

• On montre ensuite que la famille $\mathscr{T}$ des ouverts est incluse dans $\mathscr{A}$ et que μ^* est régulière au sens où pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{O}$ ouvert et K compact tels que

$$K \subset A \subset \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \mu(\mathcal{O}) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

• On peut alors conclure que $\mathscr{A}$ contient la tribu borélienne $\mathscr{B}$ et qu'il existe une mesure μ définie sur $\mathscr{A}$, donc sur $\mathscr{B}$, par restriction de μ^*. Pour $0 \leq \phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ fixé, on observe que

$$\frac{1}{n} \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{\phi \geq j/n} \leq \phi \leq \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} \mathbf{1}_{\phi > j/n}.$$

Par régularité de μ, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j \geq 1} \mu(\{\phi > j/n\} \leq T(\phi) \leq \frac{1}{n} \sum_{j \geq 0} \mu(\{\phi \geq j/n\}).$$

On conclut que

$$T(\phi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 1} \mu(\{\phi > j/n\} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j \geq 1} \mu(\{\phi > j/n\} = \int_{\mathbb{R}^d} \phi \, d\mu.$$

L'unicité a été démontrée en TD. ◫

Remarque. On peut également déduire la construction de la mesure de Lebesgue à partir du Théorème 4.1 de représentation de Riesz-Markov comme alternative au Théorème 2.1. On procède de la manière suivante. On définit l'application $T : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par

$$T(\phi) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, dx,$$

où le terme de droite désigne l'intégrale de Riemann (obtenue comme limite de séries de Riemann). Cette application est évidemment une forme linéaire positive. Le Théorème 4.1 permet de conclure à l'existence d'une mesure positive (de Lebesgue) telle que (2.1). Pour $[a,b] \subset \mathbb{R}$ on définit $\phi_n \in C_c(\mathbb{R})$ affine par morceaux telle que $\phi_n(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$ et $\phi_n \searrow \mathbf{1}_{[a,b]}$. On obtient

$$\lambda([a,b]) = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \phi_n d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\, dx = b - a,$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans la première limite et un calcul élémentaire (aires de triangles) pour la deuxième limite. ◻

Théorème 4.2 (variante 1) *Soit T une forme linéaire sur $C_0(\mathbb{R}^d)$. Alors, il existe deux mesures boréliennes finies $\mu_\pm$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, \mu_+(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, \mu_-(dx).$$

Ce couple est unique si on suppose de plus $\mu_+ + \mu_-$ "minimal". On dit que $\sigma := \mu_+ - \mu_-$ est une mesure signée.

Théorème 4.3 (variante 2) *Soit T une forme linéaire sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$. Alors il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, f(x)\, dx.$$

5 Théorèmes de Prokhorov et de Lévy

Théorème 5.1 (Prokhorov) *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité qui est tendue, c'est-à-dire qui vérifie*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, R > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n(B_R^c) \le \varepsilon.$$

Alors, il existe une sous-suite (μ_{n_k}) et une de mesure de probabilité μ telle que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ faiblement.

Ebauche de la preuve. Pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on peut extraire une sous-suite $(\mu_{n'})$ et un réel ℓ_φ tels que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_{n'} \to \ell_\varphi.$$

Par un argument de séparabilité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ (existence d'un sous-ensemble dénombrable et dense dans $C_c(\mathbb{R}^d)$) et d'extraction diagonale de Cantor, on peut trouver une sous-suite (μ_{n_k}) telle que cette convergence a lieu pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (on inverse l'ordre des quantificateurs). Il est alors facile de voir que $T : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto T(\varphi) := \ell_\varphi$ est une application linéaire et positive. D'après le Théorème 4.1 de Riesz-Markov, il existe une mesure positive telle que

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu.$$

Comme pour une suite (χ_R) de $C_c(\mathbb{R}^d)$, $\mathbf{1}_{B_R} \le \chi \le \mathbf{1}_{B_{2R}}$, on a

$$\mu(B_R) \le \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R d\mu_n \le 1,$$

et en fixant $\varepsilon > 0$ et choisissant R convenablement grâce au critère de tension, on a

$$\mu(B_{2R}) \ge \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} \chi_R d\mu_n \ge 1 - \lim_n \int_{B_R^c} d\mu_n \ge 1 - \varepsilon,$$

on en déduit $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. Soit donc μ est une mesure de probabilité. ◻

Théorème 5.2 (de Lévy - version forte) *Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité telle que $\hat{\mu}_n \to \phi$ ponctuellement avec ϕ continue en 0. Alors ϕ est la transformation de Fourier d'une mesure μ et $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faiblement.*

Ebauche de la preuve. Le point essentiel est d'établit la tension de la suite (μ_n). Pour tout $u > 0$ (petit), on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\phi_n(\xi))\,d\xi &= \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\int_{\mathbb{R}}(1-e^{ix\xi})\,d\mu_n(x)\,d\xi \\
&= \frac{1}{u}\int_{\mathbb{R}}\int_{-u}^{u}(1-e^{ix\xi})\,d\xi\,d\mu_n(x) \\
&= \frac{2}{u}\int_{\mathbb{R}}\Big(u-\frac{e^{ixu}-e^{-ixu}}{2i\xi}\Big)\,d\mu_n(x) \\
&= 2\int_{\mathbb{R}}\Big(1-\frac{\sin(xu)}{xu}\Big)\,d\mu_n(x) \\
&\geq \int_{\mathbb{R}}2\Big(1-\frac{\sin(xu)}{xu}\Big)\,\mathbf{1}_{xu\geq 1}\,d\mu_n(x),
\end{aligned}$$

où on a utiliser le théorème de Fubini à la deuxième ligne. En définissant

$$K := \inf_{|y|\geq 1} 2\Big(1-\frac{\sin y}{y}\Big) > 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\phi_n(\xi))\,d\xi \geq K\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{xu\geq 1}\,d\mu_n(x) = K\mu_n\big([-1/u,1/u]^c\big).$$

Par hypothèse de convergence de ϕ_n vers ϕ et de continuité de ϕ en 0, on a $\phi(0)=1$ et $\phi(s)\geq 1-\varepsilon/2$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $|s|\geq u$, u assez petit, de sorte que

$$\mu_n\big([-1/u,1/u]^c\big) \leq K^{-1}\,\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\phi_n(\xi))\,d\xi \leq K^{-1}\,\varepsilon,$$

pour tout n assez grand. Cela prouve la tension de (μ_n). Grâce au Théorème 5.1 de Prokhorov , on en déduit l'existence d'une sous-suite (μ_{n_k}) et d'une mesure de probabilité μ telles que $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ faiblement. On obtient alors $\phi_{n_k} \to \hat{\mu} = \phi$, et par injectivité de la transformation de Fourier, et donc unicité de la limite, on obtient que $\mu_n \rightharpoonup \mu$. ◻

6 Loi conditionnelle

Définition 6.1 *Soient $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ deux espace mesurables. On appelle probabilité (ou noyau) de transition de E dans F une application*

$$K : E\times\mathcal{F} \;\to\; [0,1]$$

telle que

- *pour tout $x\in E$, $K(x,\cdot)$ est une mesure de probabilité sur $(F,\mathcal{F})$;*
- *pour tout $A\in\mathcal{F}$, $K(\cdot,A)$ est une application mesurable sur $(E,\mathcal{E})$.*

Si f est mesurable et bornée sur $(F,\mathcal{F})$ et λ est une mesure de probabilité sur $(E,\mathcal{E})$, on définit la fonction mesurable Kf sur E et la mesure de probabilité λK sur F par

$$(Kf)(x) := \int_E f(y)K(x,dy), \quad (\lambda K)(A) := \int_E K(x,A)\lambda(dx).$$

Définition 6.2 *Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et Y une variable aléatoire à valeurs dans $(F, \mathcal{F})$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant X tout noyau de transition K telle que pour toute fonction mesurable et bornée sur $(F, \mathcal{F})$, on a*

$$\mathbf{E}(\varphi(Y)|X) = \int_F \varphi(y) K(X, dy).$$

Théorème 6.3 (de Jirina) *Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Il existe alors une loi conditionnelle de Y sachant X.*

7 Suite de variables aléatoires

La dernière question que l'on se pose est de comment exhiber une suite de var iid, ou même plus généralement, une suite de var indépendantes de lois prescrites. On se donne donc une suite de mesures (μ_n) sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Commençons par un cas plus simple. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on peut définir la "mesure produit" ν_N sur $\mathbb{R}^N$, par

$$\nu_N := \prod_{i=1}^{N} \mu_i,$$

donc l'existence est assurée par la théorie de Fubini-Tonelli. On construit alors une famille (X_n), $1 \leq n \leq N$, de var indépendantes telle que $X_n \sim \mu_n$ de la manière suivante. On pose $\Omega := \mathbb{R}^N$, $\mathscr{A} := \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathbf{P} := \nu_N$, et $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_n(\omega) = \omega_n$, la nième coordonnée de $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, puisqu'alors

$$\mathbf{P}(X_n \in A) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_{x_n \in A} \, d\nu_N(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{y \in A} \, d\mu_n(y) = \mu_n(A).$$

Venons-en au cas d'une suite (dénombrable). La plus grosse difficulté est de construire la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la tribu produit définie comme la plus petite tribu engendrée par les tribus boréliennes sur chaque coordonnée. Sur l'algèbre des "cylindres", c'est-à-dire, des ensembles de la forme

$$A := A_1 \times \ldots \times A_N \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots, \quad A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

on définit

$$\mu^\sharp(A) := \nu_N(A \cap \mathbb{R}^N) = \prod_{i=1}^{N} \mu_i(A_i).$$

On applique le Théorème 1.3 de Carathéodory afin d'obtenir une mesure μ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui coïncide avec $\mu^\sharp$ sur l'algèbre des cylindres. On conclut de manière similaire au cas précédent. ◫

Remarques. (1) La tribu sur $\mathbb{R}^N$ est également la tribu borélienne associée à la distance

$$d(x, y) := \sum_{n=1} 2^{-n} (|x_n - y_n| \wedge 1),$$

pour toutes suites $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in \mathbb{R}^N$.
(2) On introduit la suite (ν_N) de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$\nu_N(A) := \prod_{i=1}^{N} \mu_i(A \cap \mathbb{R}^N).$$

Si on sait montrer que (ν_N) est tendue et que l'on étend le Théorème 5.1 de Prokhorov en une version valable sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit l'existence d'une mesure μ obtenue comme limite d'une suite extraite des (ν_N) ... .