**Université Paris-Dauphine** | **2018-2019**
Cours de “Intégrale de Lebesgue et probabilités" | Décembre 2018

**Chapitres 9 - Retour sur l’asymptotique**

# Table des matières



Dans ce chapitre on désigne par $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

## 1 Version $\mathcal{L}^4$ de la loi forte des grands nombres

**Théorème 1.1** *Soit $(X_n)$ une suite de var iid $\mathcal{L}^4$. Alors*

$$Y_n := \frac{1}{n}\,(X_1 + \ldots + X_n) \to \mathbf{E}(X_1) \quad p.s.$$

Pour aléger les notations on suppose $\mathbf{E}(X_1) = 0$. On calcule

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n^4) &= \frac{1}{n^4}\mathbf{E}\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_4} X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\Big) \\
&= \frac{1}{n^4}\Big(\sum_{i_1=I_2=i_3=i_4} +3 \sum_{i_1=i_2\neq i_3=i_4}\Big)\mathbf{E}X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4} \\
&= \frac{1}{n^4}\big(n^2\mathbf{E}X_1^4 + 3n(n-1)(\mathbf{E}X_1^2)^2\big) \le \frac{C}{n^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbf{E}\Big(\sum_n Y_n^4\Big) = \sum_n \mathbf{E}(Y_n^4) \le \sum_n \frac{C}{n^2} < \infty,$$

puis donc

$$\sum_n Y_n^4 < \infty \quad \text{p.s.}$$

On conclut que $Y_n^4 \to 0$ p.s. □

En particulier, si $(A_n)$ est une suite d’évenements indépendants de même probabilité, alors

$$\frac{1}{n}\,(\mathbf{1}_{A_1} + \ldots + \mathbf{1}_{A_n}) \to \mathbf{P}(A_1) \quad \text{p.s.}$$

## 2 Lemme de Borel-Cantelli

Pour une suite d'évenements $(A_n)$, on définit

$$\limsup A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k, \quad \liminf A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k.$$

**Lemme 2.1 (de Borel-Cantelli)** *Soit $(A_n)$ une suite d'événements.*

*(i) Si $\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors*

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0,$$
*soit donc, p.s. $\{n \in \mathbb{N};\ \omega \in A_n\}$ est fini.*

*(ii) Si $\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(A_n) = \infty$ et les $A_n$ sont indépendants, alors*

$$\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1,$$
*soit donc p.s. $\{n \in \mathbb{N};\ \omega \in A_n\}$ est infini.*

*Preuve du Lemme 2.1.* (i) On écrit

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq n}\mathbf{P}(A_k) = 0,$$

où on utilise la propriété de limite monotone à la suite décroissante $\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$ dans la première égalité et on utilise la $\sigma$-sous-additivité pour avoir l'inégalité.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k^c\big) &= \lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\big(\bigcap_{k=n}^{N} A_k^c\big) = \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1-\mathbf{P}(A_k)) \\
&= e^{\sum_{k=n}^{\infty}\ln(1-\mathbf{P}(A_k))} \leq e^{-\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}(A_k)} = 0.
\end{aligned}$$

D'où également $\mathbf{P}(\liminf A_n^c) = 0$. Et en passant au complémentaire $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$. $\square$

## 3 Théorème du 0-1 de Kolmogorov

**Théorème 3.1 (Tout ou rien)** *Soit $(X_n)$ une suite de var indépendantes. On définit les tribus $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_\infty$ par*

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_k;\ k \geq n), \quad \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{n\geq 1}\mathcal{F}_n.$$

*La tribu $\mathcal{F}_\infty$ est grossière au sens où $\mathbf{P}(B) = 0$ ou $1$ pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$.*

*Preuve du Théorème 3.1.* Par définition, pour tout $n > m$, on a

$$\mathcal{F}_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_m := \sigma(X_k;\ k \leq m)$$

On a donc également

$$\mathcal{F}_\infty \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_m.$$

Comme $\cup_{m=1}^{\infty}\mathcal{G}_m$ est stable par intersections finies, cette famille de parties est une algèbre, et d'après le Lemme VII-2.3, on a

$$\mathcal{F}_\infty \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{G}_m,\ m \geq 1) = \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_\infty.$$

Pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$, on a donc $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B\cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(B)$, et donc $\mathbf{P}(B) = 0$ ou 1. $\square$

# 4 Marche aléatoire

**Théorème 4.1** *Soit $(X_n)$ une suite de var indépendantes de même loi définie par $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = 1/2$. Pour tout $n \geq 1$, on pose*

$$S_n := X_1 + \ldots + X_n.$$

*Alors*

$$p.s. \qquad \sup_{n \geq 1} S_n = +\infty \quad et \quad \inf_{n \geq 1} S_n = -\infty.$$

*La tribu $\mathcal{F}_\infty$ est grossière au sens où $\mathbf{P}(B) = 0$ ou $1$ pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$.*

*La preuve du Théorème 3.1 est présentée sous forme d'exercice.*

1. Pour deux entiers $p \geq 1$ et $k > 2p$ fixés, et pour tout $j \geq 0$, on définit

$$A_j := \{X_{jk+1} = X_{jk+2} = \ldots = X_{jk+k} = 1\}.$$

   Calculer $\mathbf{P}(A_j)$ et montrer que les $(A_j)$ sont indépendants. En déduire que

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\Big) = 1,$$

   puis que

$$\mathbf{P}\Big(\big\{\inf S_n \leq -p\big\} \cup \big\{\sup_n S_n \geq p\big\}\Big) = 1.$$

2. On définit $\mathcal{B}_n := \sigma(X_\ell,\, \ell \geq n\ )$, puis la tribu asymptotique $\mathcal{B}_\infty := \lim \mathcal{B}_n$. Montrer que

$$\mathbf{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) + \mathbf{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big) \geq 1,$$

$$\mathbf{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) = \mathbf{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big),$$

   ainsi que

$$\{\inf_n S_n = -\infty\} \in \mathcal{B}_\infty \quad \text{et} \quad \{\sup_n S_n = +\infty\} \in \mathcal{B}_\infty.$$

   En déduire que

$$\mathbf{P}\big(\{\inf_n S_n = -\infty\}\big) = \mathbf{P}\big(\{\sup_n S_n = +\infty\}\big) = 1.$$

# 5 Version $\mathcal{L}^2$ loi forte des grands nombres

**Théorème 5.1** *Soit $(X_n)$ une suite de var iid $\mathcal{L}^2$. Alors*

$$Y_n := \frac{1}{n}\,(X_1 + \ldots + X_n) \to \mathbf{E}(X_1) \quad p.s.$$

# 6 Version $\mathcal{L}^1$ loi forte des grands nombres

**Théorème 6.1** *Soit $(X_n)$ une suite de var iid $\mathcal{L}^1$. Alors*

$$Y_n := \frac{1}{n}\,(X_1 + \ldots + X_n) \to \mathbf{E}(X_1) \quad p.s.$$