TD 8 : Variables gaussiennes, conditionnement

On traitera en priorité les exercices notés d'un ☞. On traitera en dernier (ou pas) les exercices (difficiles, redondants, ...) notés d'un ♠.

1 Variables gaussiennes

Exercice 1. ☞ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $M \in \mathcal{M}_{kd}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que
$$\mathbb{E}(MX) = M\mathbb{E}(X), \; D_{MX} = MD_X \,{}^tM.$$

b) X suit une loi $\mathcal{N}_d(0, I)$ et M est une matrice orthogonale à coefficients réels. Déterminer la loi de $U = MX$.

c) Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, D)$ où
$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale. Déterminer la loi du vecteur $Y = P^{-1}X$.

Exercice 2. ☞ Soient $X_1, X_2, ...X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. $a_1, a_2, ...a_n$ et $b_1, b_2, ...b_n$ sont des réels.
On pose $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$.

a) Montrer que le vecteur $Z = (X, Y)$ est gaussien.

b) Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$.

Exercice 3. ♠ Soient X et Y deux variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et de coefficient de corrélation $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in]0, 1[$.
On suppose que le couple (X, Y) est gaussien. Soit $Z = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(Y - \rho X)$.

a) Déterminer la loi de (X, Z) avec le moins de calculs possibles. Quelle est la loi de (X, Y) ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0)$.

Exercice 4. ☞ Soient X, Y, Z indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

a) Déterminer la loi de $U = X + Y + Z$

b) Montrer que les variables $U = X + Y + Z$, $V = 2X - Y - Z$ et $W = Y - Z$ sont indépendantes.

Exercice 5. ♠ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ, d'espérance et de variance finies.
Soient $Y_1 = \frac{1}{2}X_1,\ Y_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + X_2), ...Y_n = \frac{1}{2}(Y_{n-1} + X_n)$...

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
b) On suppose que X_1 suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Exercice 6. ♠ Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance K satisfait $\det K > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $X = \mu + BY$ où Y suit la loi $\mathcal{N}_d(0, I)$.

Exercice 7. ♠ Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de densité

$$f(x) = C \exp -\frac{1}{2}\left(7\|x\|^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3\right).$$

Soit de plus Y le vecteur défini par $X = AY$ avec

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Y admet une densité de probabilité, et déterminer : cette densité, la valeur de C, la matrice de covariance de Y et celle de X.

Exercice 8. ☞ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{V}ar(X_n) \to \sigma^2 \in \mathbb{R}$ impliquent que (X_n) converge en loi vers une va gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

2 Conditionnement.

Exercice 9. ☞ On lance deux dés (de façon indépendante). On note X et Y le résultat de chaque dé.

a) Calculer $\mathbb{E}(X + Y \mid X)$
b) Calculer $\mathbb{E}(X \mid X + Y)$

Exercice 10. ☞ Soient $X, Y \in L^2$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y\ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})] = \mathbb{E}[X\ \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{B})].$$

Exercice 11. ☞ Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_3$ est indépendante de $\sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, et soit X une var $\mathcal{B}_1$-mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3).$$

Exercice 12. ♠ Soient $\mathcal{B}$ une sous-tibu et $\mathbb{Q}$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$: $d\mathbb{Q} = f\ d\mathbb{P}$ où $f \in L^2$ et $f \geq 0$.

a) Soit X est une v.a. mesurable et bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{B})\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(fX \mid \mathcal{B}).$$

b) Montrer que, si f est $\mathcal{B}$-mesurable,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{B})\ \ p.s. \text{ sur } \{f > 0\}.$$

Exercice 13. ♠ Soient X et Y deux v.a.i. de même loi de densité $\left(x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right)$. On pose $T = X + Y$. Calculer $\mathbb{E}(g(X) \mid T)$ pour g mesurable et positive.

Exercice 14. ♠ Soient X,Y et Z trois variables réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Calculer, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X|X + sY + tZ)$ et $\mathbb{E}[\exp(isXY + itXZ)|X]$.

b) Montrer que la fonction caractéristique du couple (XY, XZ) est donnée par

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{(1+s^2+t^2)^{1/2}} \text{ où } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application Ψ_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par

$$\Psi_n(s,t) = \frac{1}{(1+s^2+t^2)^{n/2}} \text{ où } (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

est la fonction caractéristique d'un couple (U_n, V_n) que l'on déterminera.

d) Etudier la convergence en loi éventuelle de (U_n, V_n) quand $n \to \infty$.

Exercice 15. ♠ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ, d'espérance et de variance finies.
Soient $Y_1 = \frac{1}{2}X_1,\ Y_2 = \frac{1}{2}(Y_1 + X_2), ...Y_n = \frac{1}{2}(Y_{n-1} + X_n)$...

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) On suppose que X_1 suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Quelle est la loi de Y_n ? Calculer sa fonction caractéristique et montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire Y que l'on précisera.

Exercice 16. ♠ Soit X un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ dont la matrice de covariance K satisfait $\det K > 0$. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $X = \mu + BY$ où Y suit la loi $\mathcal{N}_d(0, I)$.

Exercice 17. ♠ Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de densité

$$f(x) = C \exp -\frac{1}{2}\left(7\|x\|^2 + 6x_1x_2 + 8x_2x_3\right).$$

Soit de plus Y le vecteur défini par $X = AY$ avec

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que Y admet une densité de probabilité, et déterminer : cette densité, la valeur de C, la matrice de covariance de Y et celle de X.

Exercice 18. ☞ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes. Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to \mu \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{V}ar(X_n) \to \sigma^2 \in \mathbb{R}$ impliquent que (X_n) converge en loi vers une va gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

3 Conditionnement.

Exercice 19. ☞ On lance deux dés (de façon indépendante). On note X et Y le résultat de chaque dé.

a) Calculer $\mathbb{E}(X+Y \mid X)$

b) Calculer $\mathbb{E}(X \mid X+Y)$

Exercice 20. ☞ Soient $X, Y \in L^2$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y\ \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B})] = \mathbb{E}[X\ \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{B})].$$

Exercice 21. ☞ Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{B}_3$ est indépendante de $\sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, et soit X une var $\mathcal{B}_1$-mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3).$$

Exercice 22. ♠ Soient $\mathcal{B}$ une sous-tibu et $\mathbb{Q}$ une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$: $d\mathbb{Q} = f\ d\mathbb{P}$ où $f \in L^2$ et $f \geq 0$.

a) Soit X est une v.a. mesurable et bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{B})\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(fX \mid \mathcal{B}).$$

b) Montrer que, si f est $\mathcal{B}$-mesurable,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{B})\ \ p.s. \text{ sur } \{f > 0\}.$$

Exercice 23. ♠ Soient X et Y deux v.a.i. de même loi de densité $\left(x \mapsto e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\right)$. On pose $T = X + Y$. Calculer $\mathbb{E}(g(X) \mid T)$ pour g mesurable et positive.

Exercice 24. ♠ Soient X,Y et Z trois variables réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Calculer, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(X|X+sY+tZ)$ et $\mathbb{E}[\exp(isXY+itXZ)|X]$.

b) Montrer que la fonction caractéristique du couple (XY, XZ) est donnée par

$$\Psi(s,t) = \frac{1}{(1+s^2+t^2)^{1/2}} \text{ où } (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application Ψ_n de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, donnée par

$$\Psi_n(s,t) = \frac{1}{(1+s^2+t^2)^{n/2}} \text{ où } (s,t) \in \mathbb{R}^2,$$

est la fonction caractéristique d'un couple (U_n, V_n) que l'on déterminera.

d) Etudier la convergence en loi éventuelle de (U_n, V_n) quand $n \to \infty$.

Exercice 25. ☞

a) Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien centré à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ tel que $Cov\,(X_2, X_3) = 0$. Démontrer que

$$\mathbb{E}\,(X_1 \,|\sigma(X_2, X_3)) = \mathbb{E}\,(X_1 \,|X_2) + \mathbb{E}\,(X_1 \,|X_3) \;\; p.s.$$

b) On suppose de plus que les v.a. X_i sont indépendantes, de même loi $\mathcal{N}\,(0, 1)$. On pose $T := (T_1, T_2)$, où $T_1 = X_1 - X_2$ et $T_2 = 2X_1 - X_3$.
Calculer les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}\,(X_1 \,|T)\,,\, \mathbb{E}\left(X_1\,(2X_2 - X_3)^2 \,|T\right),$$
$$\mathbb{E}\left((X_1 + X_2 + 2X_3)^2 \;\, |T\right) \text{ et } \mathbb{E}\,(\exp\,(itX_1) \;\, |T)\,,\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26. ♠ Soient X_1, X_2, X_3 trois v.a. indépendantes, de même loi $\mathcal{N}\,(0, 1)$. Posons

$$U = X_1 - 2X_2 + 2X_3,\, V = 2X_1 + 2X_2 + X_3 \;\text{ et } S = X_1 + X_2 + X_3.$$

a) Montrer qu'il existe une unique constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $U - \alpha S$ soit indépendante de S. Calculer α.

b) Soit H l'ensemble des applications mesurables $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\phi\,(S) \in L^2$. Déterminer la constante

$$\underset{\phi \in H}{Inf}\; \mathbb{E}\left[(U - \phi\,(S))^2\right]$$