Université Paris-Dauphine **2019-2020**
Cours de "Intégration et Probabilités" Juin 2019

Présentation du cours

L'intégrale de Riemann permet de donner un sens à la quantité

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de Riemann connait différentes généralisations (aux fonctions continues par morceaux, aux fonctions continues définies sur $]a, b[$, $a, b \in [-\infty, +\infty]$, ...).

L'objectif de ce cours est de donner un sens à l'intégrale de Lebesgue

$$\int_E f\,d\mu$$

pour des ensembles E, des fonctions f et des "mesures" μ plus généraux que nous allons définir.

Cette intégrale jouit de deux propriétés essentielles :

- Les normes $\|\cdot\|_p$ usuelles pemettent de définit des espaces de Banach, ce qui est essentiel pour avoir certains théorèmes d'existence. Son utilisation dans le domaine de l'analyse fonctionnelle a été cruciale dans le développement de cette branche des mathématiques au cours du XXième siècle et reste fondamental dans ce domaine et dans le domaine de l'analyse en général ;
- L'ensemble E peut-être pris "très gros" comme $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou même $E = C([0, \infty); \mathbb{R})$, ce qui est essentiel pour pouvoir définir des "suites de variables aléatoires" ou des "processus" en théorie des probabilités. La théorie de Lebesgue s'est définitivement imposée part le fait qu'elle permet de fonder la théorie des probabilités (par Komogrov).

Une fois l'intégrale de Lebesgue construite, nous disposerons de théorèmes assez faciles à utiliser pour calculer des intégrales multiples, passer à la limite sous le signe intégrale, ..., et une théorie qui unifie la théorie de l'intégration usuelle et la théorie de sommation (séries numériques ou séries de fonctions). Le prix à payer est une théorie sensiblement plus abstraitre et subtile que celle de Riemmann.

- Une des motivations historiques était la question de savoir pour quelle classe de fonctions (la plus large possible) était-il possible d'écrire

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx.$$

La théorie de Lebesgue (et son extension par Sobolev) permet d'y donner une réponse satisfaisante (au moins pour un large domaine d'applications). Une autre motivation était de classer les ensembles de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ suivants leur taille. La théorie de Lebesgue permet également d'aborder avec succès cette question et a été à la base du développement de la théorie géométrique de la mesure et de l'analyse fine (analyse harmonique, inégalités fonctionnelles) contemporaine.

- Dans un premier chapitre, on introduira les classes d'ensembles et de fonctions qui peuvent apparaitre dans l'intégrale.

- Le second chapitre sera consacré à la construction de l'intégrale propement dite. On commencera par définir

$$\int_E \mathbf{1}_A \, d\mu =: \mu(A)$$

pour la classe des ensembles A exhibée au premier chapitre et pour une mesure μ convenablement définie. Nous généraliserons ensuite l'intégration à la classe de fonctions du premier chapitre grâce à un procédé d'approximation.

- Dans le troisème chapitre nous exposerons différents "théorèmes limites" qui font que la théorie de Lebesgue est particulèrement agréable et simple d'utilisation et nous présenterons quelques inégalités fonctionnelles élémentaires.

- Le quatrième chapitre sera consacré au théorème de Fubini sur les intégrales multiples, au transport de mesures et au théorème de changement de variables.

- Le cinquième chapitre sera consacré aux espaces L^p de Lebesgue sur un espace mesuré général, au moins dans le cas $p = 1, 2, \infty$.

- Le sixième chapitre sera consacré au cas particulier de $E = \mathbb{R}^d$ et à plusieurs objets/notions qui peuvent être définis dans ce cadre (convolution, densité, transformation de Fourier).

- Le septième chapitre sera consacré aux fondements des Probabilités (variable aléatoire, indépendance, convergence en loi, autres converegnces, marche aléatoire).

- Les huitième chapitre sera consacré aux vecteurs gaussiens et au conditionnement.

- Le neuvième (et dernier) chapitre sera consacré à des compléments hors programme : construction de la mesure de Lebesgue, tribu de Lebesgue, mesures signées, dualité, ...

Le cours est inspiré de

- G. Ben Arous, "Intégration" (notes personnelles)
- J. Deny (notes personnelles)
- C. Villani, "cours d'intégration" (pobablement sur le net)
- J.-F. Le Gall, "Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires" (pobablement sur le net)

On trouve une bibliographie abondante sur le net :

- F. Bolley, R. Dujardin, A. Lambert, "Théorie de la Mesure et Intégration" (cours de Paris 6) ;
- J. Féjoz, "Chapitres d'intégration et de probabilités" (cours UPD 2012-2015) ;
- H. Doss, "Probabilités" (cours UPD 2016-2018) ;
- C. Suquet, "Intégration, Analyse de Fourier, Probabilités" ;
- F. Hérau, "Cours Intégration" ;
- A. Yger, "Théorie de l'intégration" ;
- R. Danchin, "Cours Intégration" ;
- O. Garet, "Intégration et Probabilités".