

CHAPITRE 1 - LE MOUVEMENT BROWNIEN

Dans tout ce cours, le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace de probabilité, et $\mathbf{E}$ l'espérance associée.

1 Propriété de Markov forte.

1.1 Principe de Réflexion.

Dans cette section B désigne un mouvement brownien, et pour $a \in \mathbb{R}^*$, on note T_a le tda p.s. fini.

Théorème 1.1 (Principe de réflexion 1). *On définit le processus brownien réfléchi en $a \in \mathbb{R}^*$ par*

$$X_t := B_t \text{ si } t < T_a; \quad X_t := 2B_{T_a} - B_t = 2a - B_t \text{ si } t \geq T_a.$$

Alors $X_t \sim B_t$.

Le principe de réflexion dit donc que après l'instant T_a la droite $y = a$ est un axe de symétrie pour le mouvement Brownien (comme l'est la droite $y = 0$ après l'instant $T_0 = 0$).

Preuve du théorème 1.1. On va appliquer la propriété de Markov forte au tda T_a

Preuve 1. On considère les processus

$$Y_t := B_{t \wedge T_a} \quad \text{et} \quad Z_t := B_{t + T_a} - a.$$

Le processus Y est $\mathcal{F}_{T_a}$ -mesurable. En effet, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 \leq t \leq s$, on a (cela a été démontré dans la preuve du lemme affirmant que $B_{T_a} \in \mathcal{F}_{T_a}$) $B_{t \wedge T_a} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ et donc

$$\{B_{t \wedge T_a} \in A\} \cap \{T_a \leq s\} \in \mathcal{F}_s,$$

alors que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $0 \leq s < t$ on a

$$\begin{aligned} \{Y_t \in A\} \cap \{T_a \leq s\} &= \{B_{t \wedge T_a} \in A\} \cap \{T_a \leq s < t\} \\ &= \{B_{t \wedge T_a} \in A \text{ et } T_a \leq t\} \cap \{T_a \leq s\} \\ &= \{B_{T_a} \in A\} \cap \{T_a \leq s\}, \end{aligned}$$

car B_{T_a} est $\mathcal{F}_{T_a}$ mesurable (même lemme), donc $\{B_{T_a} \in A\} \in \mathcal{F}_{T_a}$ et la définition de $\mathcal{F}_{T_a}$ permet de conclure. La propriétés de Markov forte implique que Z est un mouvement brownien (donc $-Z$ également) et qu'il est indépendant de Y (donc $-Z$ également). Il s'ensuit que $\mathcal{L}(Y, Z) = \mathcal{L}(Y, -Z)$. On définit l'application

$$\varphi : (U, V) \mapsto (U_t \mathbf{1}_{t \leq T_a} + (a + V_{t - T_a}) \mathbf{1}_{t > T_a})_{t \geq 0},$$

qui à une paire de processus (U, V) $\mathcal{F}^B$ -adaptés associe un processus $\varphi(U, V)$ $\mathcal{F}^B$ -adapté (le vérifier!). On a d'une part que $\mathcal{L}(\varphi(Y, Z)) = \mathcal{L}(\varphi(Y, -Z))$ et d'autre part $\varphi(Y, Z) = B$ et $\varphi(Y, -Z) = X$.

Preuve 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, en utilisant que $B_{T_a} = a$ et en notant $Y_t := B_{t+T_a} - B_{T_a}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_t \geq x) &= \mathbf{P}(X_t \geq x, t \leq T_a) + \mathbf{P}(X_t \geq x, t > T_a) \\ &= \mathbf{P}(B_t \geq x, t \leq T_a) + \mathbf{P}(B_{T_a} - B_t \geq x - a, t > T_a) \\ &= \mathbf{P}(B_t \geq x, t \leq T_a) + \mathbf{P}(-Y_{t-T_a} \geq x - a, t > T_a). \end{aligned}$$

La propriété de Markov forte implique que le processus Y est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_a}^B$, donc de T_a . On a donc également $-Y$ est un mouvement Brownien indépendant de T_a et donc enfin $\mathcal{L}(T_a, Y) = \mathcal{L}(T_a, -Y)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_{T_a} - B_t \geq x - a, T_a > t) &= \mathbf{P}(-Y_{t-T_a} \geq x - a, t > T_a) \\ &= \mathbf{P}(Y_{t-T_a} \geq x - a, t > T_a) \\ &= \mathbf{P}(B_t - B_{T_a} \geq x - a, T_a > t) = \mathbf{P}(B_t \geq x, T_a > t). \end{aligned}$$

Pour justifier la deuxième égalité ci-dessus, on introduit la partie

$$H = H_{x-a,t} := \{(s, w) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}); s \leq t, w(t-s) \geq x-a\} \subset \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$$

qui est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ (pour voir cela il faudrait définir proprement la tribu canonique sur $C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$! On en dira un mot dans la suite du cours). On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(-Y_{t-T_a} \geq x - a, t > T_a) &= \mathbf{P}((T_a, -Y) \in H_{x-a,t}) \\ &= \mathbf{P}((T_a, Y) \in H_{x-a,t}) = \mathbf{P}(Y_{t-T_a} \geq x - a, t > T_a) \end{aligned}$$

En recollant les morceaux, on obtient

$$\mathbf{P}(X_t \geq x) = \mathbf{P}(B_t \geq x, T_a \leq t) + \mathbf{P}(B_t \geq x, T_a > t) = \mathbf{P}(B_t \geq x),$$

et donc X_t a même loi que B_t . □

Théorème 1.2 (Principe de réflexion 2). Notons $S_t := \sup_{s \leq t} B_s$. Pour tout $b \geq 0$ et $a \leq b$, on a

$$P(S_t \geq b, B_t \leq a) = P(B_t \geq 2b - a).$$

En particulier, S_t a même loi que $|B_t|$.

Preuve du théorème 1.2. On va appliquer la propriété de Markov forte au tda T_b . On a

$$P(S_t \geq b, B_t \leq a) = P(T_b \leq t, B_t - b \leq a - b) = P(T_b \leq t, B_t - B_{T_b} \leq a - b),$$

puisque $B_{T_b} = b$. Puisque le processus $Y_s = B_{s+T_b} - B_{T_b}$ est indépendant de $\mathcal{F}_{T_b}^B$, donc de T_b , et qu'il suit une loi gaussienne, donc symétrique, on a (voir la preuve du Théorème 1.1 pour les détails de l'argument)

$$\begin{aligned} P(S_t \geq b, B_t \leq a) &= P(T_b \leq t, B_{T_b} - B_t \leq a - b) \\ &= P(T_b \leq t, -Y_{t-T_b} \leq a - b) \\ &= P(T_b \leq t, Y_{t-T_b} \leq a - b) \\ &= P(T_b \leq t, B_t \geq 2b - a) = P(B_t \geq 2b - a), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que l'événement $\{T_b \leq t\}$ contient l'événement $\{B_t \geq 2b - a\}$.

Maintenant, pour tout $b \geq 0$, on a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_t \geq b) &= \mathbf{P}(S_t \geq b, B_t \geq b) + \mathbf{P}(S_t \geq b, B_t \leq b) \\ &= \mathbf{P}(B_t \geq b) + \mathbf{P}(B_t \geq 2b - b) \\ &= \mathbf{P}(-B_t \geq b) + \mathbf{P}(B_t \geq b) = \mathbf{P}(|B_t| \geq b), \end{aligned}$$

et donc $S_t \sim |B_t|$. □

Corollaire 1.3 *Pour tout $a > 0$, la loi de T_a est la même que celle de a^2/B_1^2 , et donc de densité*

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^3} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{t>0}.$$

Preuve du corollaire 1.3. Pour $a \neq 0$ et $t > 0$, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_a \leq t) &= \mathbf{P}(S_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a) \\ &= \mathbf{P}(B_t^2 \geq a^2) = \mathbf{P}(t B_1^2 \geq a^2) = \mathbf{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right), \end{aligned}$$

de sorte que $T_a \sim \frac{a^2}{B_1^2}$. Enfin, par définition,

$$\begin{aligned} f_{T_a}(t) &= \frac{d}{dt} \{\mathbf{P}(T_a \leq t)\} = \frac{d}{dt} \{\mathbf{P}(B_1^2 \geq a^2/t)\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ 2 \int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right\} = \frac{a}{t^{3/2}} \frac{e^{-\frac{a^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

pour tout $t > 0$. □

Corollaire 1.4 *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |B_s| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \mathbf{P}(|B_t| \geq \varepsilon).$$