Université Paris-Dauphine **2010-2011**
M1 MMD, Processus Continus Approfondis

Examen du Lundi 30 Mai, 15h30 - 18h
Aucun document ni calculatrice n'est autorisé

Dans tous les exercices $B = B_t$ un mouvement brownien réel standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t^B$ est la filtration canonique associée.

Exercice 1

On définit $X_s := s\, B_{1/s}$, $s > 0$, $X_0 = 0$.

a) - Montrer que la loi de X_s est identique à celle de B_s pour tout $s > 0$. Montrer que $X_s \to 0$ lorsque $s \to 0$ en loi et en probabilité. Peut-on en déduire que $X_s \to 0$ p.s. lorsque $s \to 0$?

b) - Enoncer précisément la loi forte des grands nombres. Montrer que B_n/n converge p.s. vers une limite (que l'on déterminera) lorsque $n \in \mathbb{N}$, $n \to +\infty$.

c) - On introduit la suite de va

$$\xi_n := \sup_{n<t\leq n+1} |B_t - B_n|.$$

Montrer que les (ξ_n) forment une suite de va iid.

d) - Montrer que

$$\mathbf{E}(\xi_1) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon)\, d\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\xi_1 \geq \varepsilon) \leq 2\, P(|B_1| \geq \varepsilon).$$

En déduire que $\xi_1 \in L^1$, que p.s. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i$ converge lorsque $n \to \infty$ vers une limite que l'on déterminera et enfin que

$$p.s. \qquad \frac{\xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

e) Montrer que

$$p.s. \qquad \frac{B_t}{t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et que X_s est un mouvement Brownien.

Exercice 2

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on définit

$$T_a := \inf\{t > 0; \quad B_t = a\}.$$

a) - Que peut-on dire de T_a?

b) - Enoncer précisément le théorème d'arrêt pour une martingale à temps continu.

c) - On suppose $a > 0$. Montrer que la transformée de Laplace de T_a est donnée par:

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathbf{E}\big[e^{-\lambda T_a}\big] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

d) - Calculer la transformée Laplace de la loi sur $\mathbb{R}_+^*$ de densité $f(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-a^2/(2x)} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$. En déduire la loi de T_a.

e) - Quelle est la loi de T_a si $a < 0$?

Exercice 3

On définit le processus $(Z_t)_{0\le t\le 1}$ par la formule

$$Z_t := B_t - t\,B_1.$$

a) - Pour tous $0 \le t_1 < ... < t_n \le 1$, montrer que le vecteur

$$(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n}, B_1)$$

est un vecteur gaussien et calculer sa matrice de covariance.
b) - Montrer que $(Z_t)_{0\le t\le 1}$ est un processus gaussien indépendant de B_1.
c) - Montrer que le processus $Z'_t = Z_{1-t}$, $0 \le t \le 1$, a même loi que Z.
d) - On définit $Y_t := (1-t)\,B_{t/(1-t)}$, $0 \le t \le 1$.
Montrer que $Y_t \to 0$ p.s. lorsque $t \to 1$; on pose $Y_1 = 0$.
Montrer que Y_t, $0 \le t \le 1$, a même loi que Z.

Exercice 4

a) - Démontrer que si une variable aléatoire Y s'écrit sous la forme

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \psi_i\,\Delta_i, \qquad \psi_i \in L^\infty,\ \ \Delta_i \in L^p,\ \ p \in [1,\infty],$$

alors $Y \in L^p$. En déduire que si $\psi \in \mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$ alors le processus d'Itô

$$Y_t := \int_0^t \psi_s\,dB_s$$

appartient à tous les espaces L^p, $1 \le p < \infty$.
b) - Démontrer que si M^n est une suite de martingales et que $M^n_t \to M_t$ dans L^1 pour tout $t \ge 0$, alors M est encore une martingale.
c) - Soit $\phi \in L^2(\mathrm{Prog})$. On rappelle qu'il existe $\phi^n \in \mathscr{E}\mathrm{sc}(\mathrm{Prog}) \cap L^\infty$ telle que $\phi^n \to \phi$ dans L^2. On définit le processus d'Itô

$$(1) \qquad\qquad X_t := \int_0^t \phi_s\,dB_s.$$

Démontrer que $X_t^2 - \int_0^t \phi_s^2\,ds$ est une martingale.
d) - Soit $\phi \in L^4(\mathrm{Prog})$. Démontrer que le processus X défini par (1) satisfait $X_t \in L^4$ pour tout $t \ge 0$.

Exercice 5

Soit X un processus d'Itô qui s'écrit

$$\forall\, t \ge 0 \qquad X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s\,dB_s + \int_0^t \psi_s\,ds = X'_0 + \int_0^t \phi'_s\,dB_s + \int_0^t \psi'_s\,ds,$$

avec $X_0, X'_0 \in \mathcal{F}_0$, ϕ, ψ, ϕ', $\psi' \in L^2(\mathrm{Prog})$. Le but de cet exercice est de montrer que $X_0 = X'_0$ p.s., $\phi_s = \phi'_s$ p.s. et $\psi_s = \psi'_s$ p.s.
a) - Montrer $X_0 = X'_0$ p.s.

On définit

$$Z_t := \int_0^t (\psi' - \psi)\, ds = \int_0^t (\phi_s - \phi'_s)\, dB_s.$$

b) - Montrer que Z_t est une martingale et que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 < .. < t_n = t$

$$\mathbf{E}(Z_t^2) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}\right]^2.$$

En déduire que

$$\mathbf{E}(Z_t^2) \leq \sup_{1\leq k\leq n} (t_k - t_{k-1})\, \mathbf{E}\left[\int_0^t (\psi_s - \psi'_s)^2\, ds\right],$$

et que $Z \equiv 0$.

c) - Montrer que pour toute fonction $\chi \in C^1([0,T])$ telle que $\chi(T) = 0$, on a

$$\int_0^T \chi\, (\psi - \psi')\, ds = 0 \;\; p.s.,$$

et en déduire $\psi = \psi'$ p.s.

d) - Montrer enfin que $\phi = \phi'$ p.s.

Exercice 6

Soient deux fonctions b, σ Lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, i.e.

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad |b(y) - b(x)| \leq L\,|x-y|, \quad |\sigma(y) - \sigma(x)| \leq L\,|x-y|,$$

et une variable aléatoire X_0 indépendante de B définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On définit l'application qui à $X \in L^2([0,T]; \text{Prog})$ associe $\Lambda(X) = Y$ le processus défini par

$$Y_t := X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

a) - Montrer que $\Lambda : L^2([0,T]; \text{Prog}) \to L^2([0,T]; \text{Prog})$.

b) - Etant donnés deux processus $X_i \in L^2(\text{Prog})$, $i = 1,2$, et en notant $Y_i := \Lambda(X_i)$, montrer que

$$\int_0^T \mathbf{E}(|Y_{2t} - Y_{1t}|^2)\, dt \quad \leq \quad (T^2 + 2\,T)\, L^2 \int_0^T \mathbf{E}\left(|X_{2s} - X_{1s}|^2\right)\, ds.$$

c) - En déduire que pour $T > 0$ assez petit, puis pour tout $T > 0$, il existe un unique processus $X \in L^2([0,T]; \text{Prog})$ tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s.$$

d) - On note μ_t la loi de X_t. Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^2([0,T[\times\mathbb{R})$ on a

$$\mathbf{E}(\varphi(T, X_T)) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,.)\, \mu_0(dx) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left\{\partial_t \varphi + b\, \partial_x \varphi + \frac{\sigma^2}{2}\, \partial_{xx}^2 \varphi\right\}(t,x)\, \mu_t(dx).$$

En supposant que $\mu_t(dx) = u(t,x)\, dx$ avec $u(t,x) \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$, en déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par u.