Université Paris-Dauphine
Executive Master of Artificial Inteligence
Année universitaire 2018/2019

Rappels d'algèbre linéaire

Olga Mula

mula@ceremade.dauphine.fr

Description du cours

Le master en intelligence artificielle et la science des données a pour objectif de présenter les fondements des principaux algorithmes à la base de l'intelligence artificielle et le big data ainsi que de maîtriser les techniques d'implémentation. Le public visé est celui des professionnels possédant des connaissances et compétences avérées en informatique, ainsi que des bases en mathématiques appliquées.
Ce cours de dix heures est une remise à niveau en algèbre linéaire où nous rappellerons certaines notions fondamentales qui sont indispensables pour comprendre les bases théoriques sur lesquelles reposent les algorithmes d'intelligence artificielle.

Notes de cours

- Le cours est essentiellement basé sur le polycopié d'Algèbre Linéaire de première année à Dauphine écrit par Alexandre Afgoustidis. Une version en ligne se trouve sur ce lien. Les exercices proposés sont tirés de la collection d'exercices de ce cours.
- Une autre excellente référence est le livre *Algèbre linéaire numérique* écrit par Grégoire Allaire et Sidi Mahmoud Kaber.

Collection d'exercices

Exercice 1

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$,
   (a) le vecteur $(1,2,3)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(-2,3,1)$ et $(1,-1,0)$?
   (b) le vecteur $(7,7,1)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(4,3,0)$ et $(3,4,0)$?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,
   (a) le vecteur $x \mapsto \cos^2(x)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \cos(2x)$?
   (b) le vecteur $x \mapsto \sin(2x)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs sin et cos ?

Exercice 2

1. Montrer que pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, A^2 est combinaison linéaire de A et I_2.

Exercice 3

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y \text{ et } x \geq 0\right\}$
   (b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 5y = 1\right\}$
   (c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\right\}$
2. Soit n un entier, $n \geq 2$. Les parties suivantes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
   (a) $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$ la deuxième colonne de M est nulle$\}$,
   (b) $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),$ deux colonnes de M sont identiques$\}$.

Exercice 4

Parmi les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ (familles a, b, c) ou $\mathbb{R}^2$ (famille d), lesquelles sont génératrices ?

a. $(1,0,0)$, $(1,1,1)$.

b. $(2,2,1)$, $(1,2,1)$, $(4,6,3)$.

c. $(3,4,5)$, $(4,0,6)$, $(0,8,9)$.

d. $(1,-1)$, $(0,1)$, $(32,-7)$.

Exercice 5

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1,0,1)$, $\vec{v_2} = (0,2,2)$ et $\vec{v_3} = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (0,1,1)$ et $\vec{v_3} = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

1. Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $w = (1,1,1)$.
2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,0,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
   Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur celles du vecteur $(1,0,0)$, celles du vecteur $(1,2,-3)$, celles du vecteur $(1,1,1)$, celles du vecteur $(0,1,-1)$.

Exercice 7

1. Donner la dimension et une base de $E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y+z=0\right\}$.
2. Donner la dimension et une base de $E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{matrix} x+y=0 \\ 2x-z=0 \end{matrix}\right\}$.

Exercice 8

Soit E le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$u = (1,-2,5,-3), \quad v = (2,3,1,-4) \quad \text{et} \quad w = (3,8,-3,-5).$$

1. La famille (u,v,w) est elle libre ? Génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Trouver une base de E dont les éléments seront choisis parmi les vecteurs donnés précédemment. On la note $\mathscr{B}$.
3. Le vecteur $(13,16,11,-27)$ appartient-il à E ?
4. Compléter la base $\mathscr{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Donner la dimension et une base de chacun des espaces $\mathbf{Ker}(T_A)$ et $\mathbf{Im}(T_A)$.

Exercice 10

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Montrer que $g \circ f = \mathbf{0}_{\mathscr{L}(E,G)}$ si et seulement si $\mathbf{Im}(f) \subset \mathbf{Ker}(g)$.

Exercice 11

Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On définit trois vecteurs v_1,v_2,v_3 de $\mathbb{R}^3$ par :

$$v_1 = 2e_1 - 4e_2 + e_3$$
$$v_2 = -e_1$$
$$v_3 = e_2 - 2e_1 .$$

On note $\mathcal{V}$ la famille (v_1, v_2, v_3). C'est une base de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi ?).
On considère un endomorphisme u défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Écrire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{V}$.

Exercice 12
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 13
Soit A une matrice carrée à coefficients réels.

1. Exprimer les polynômes caractéristiques et les spectres des matrices $-A$, $2A$, A^T, A^2, $A+kI$ $(k \in \mathbb{R})$ en fonction de ceux de A.
2. À quelle condition sur ses valeurs propres la matrice A est-elle inversible ? Si c'est le cas, quelles sont les valeurs propres de A^{-1} ?

Exercice 14
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable et donner une base de diagonalisation de A.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.