Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2016/2016

Feuille de travaux dirigés

Méthode d'élimination de Gauss

Exercice 1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss, en donnant l'expression de toutes les matrices et seconds membres intermédiaires, le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Répondre à la même question avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

1. Est-il possible d'utiliser la méthode d'élimination de Gauss (sans échange) pour la résolution de ce système linéaire ?
2. Trouver une permutation de A, de la forme PAQ, sur laquelle on peut réaliser l'élimination. Comment transforme-t-elle le système linéaire ?

Exercice 3. Soit la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer son inverse en résolvant le système matriciel $UX = I_4$ dans lequel X désigne une matrice carrée d'ordre 4 par la méthode d'élimination de Gauss–Jordan.

Exercice 4. Donner une formulation matricielle (c'est-à-dire en termes d'un produit de matrices) de la réduction à la forme échelonnée de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 5. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. En utilisant la méthode d'élimination de Gauss–Jordan, déterminer le système sous forme échelonnée réduite équivalent à $(\mathcal{S})$.
2. Préciser le rang et la dimension du noyau de la matrice échelonnée réduite obtenue et en déduire ceux de la matrice A.
3. Déterminer une base de l'espace image et du noyau de la matrice A.
4. Quelle(s) condition(s) doit vérifier le vecteur $\boldsymbol{b}$ pour que le système $(\mathcal{S})$ ait une solution ?

Feuille de travaux dirigés

Méthodes de factorisation pour la résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. On considère le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
2. Résoudre le système linéaire en utilisant la factorisation trouvée à la question précédente.
3. Calculer le déterminant de la matrice A.

Exercice 2. Déterminer les factorisations LU des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

en précisant à chaque étape les matrices intervenant dans le procédé de factorisation.

Exercice 3 (factorisation LU d'une matrice bande). On dit qu'une matrice est une matrice bande si elle n'admet que des éléments non nuls sur un « certain nombre » de diagonales autour de la diagonale principale. Plus précisément, une matrice A de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ de largeur de bande valant $2p+1$ est telle qu'il existe un entier naturel p tel que $a_{ij} = 0$ pour $|i-j| > p$.
Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bandes au sens suivant : *soit A une matrice carrée d'ordre n admettant une factorisation LU, alors*

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i-j| > p \Rightarrow\ l_{ij} = 0 \text{ pour } i-j > p \text{ et } u_{ij} = 0 \text{ pour } j-i > p.$$

Exercice 4 (factorisation LU d'une matrice tridiagonale). Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ d_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & d_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & d_n & a_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale d'ordre n.

1. Vérifier que si A admet une factorisation LU alors les matrices L et U sont de la forme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que les coefficients u_i, $1 \leq i \leq n$, et l_j, $2 \leq j \leq n$, satisfont les relations

$$u_1 = a_1,\ l_i = \frac{d_i}{u_{i-1}},\ u_i = a_i - l_i c_{i-1},\ 2 \leq i \leq n.$$

3. Obtenir les formules découlant de l'utilisation de cette factorisation pour la résolution du système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$ donné.
4. Donner le nombre d'opérations nécessaires pour la résolution de ce système.

Exercice 5 (factorisation LU d'une matrice à diagonale strictement dominante). Soit A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant les conditions

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'une telle matrice est inversible et qu'elle admet une factorisation LU.

1. Montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes est inversible.
2. Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que A admet une factorisation LU si et seulement si A^T admet une factorisation LU.
3. Soit A une matrice carrée d'ordre n, que l'on partitionne en quatre blocs de la manière suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{v} & A_1 \end{array}\right),$$

avec $a = a_{11} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et A_1 une matrice carrée d'ordre $n-1$. En effectuant un produit par blocs, vérifier alors que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \frac{\boldsymbol{v}}{a} & I_{n-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{w}^T \\ \hline \boldsymbol{0} & I_{n-1} \end{array}\right),\ \text{avec } B = A_1 - \frac{1}{a}\,\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T,$$

où $\boldsymbol{0}$ désigne le vecteur nul de $\mathbb{R}^{n-1}$.
4. Montrer que si la matrice B admet une factorisation LU, alors A également.
5. Dans cette question, on suppose que la matrice A est à diagonale strictement dominante par *colonnes*.

   a. En utilisant la décomposition et les notations introduites dans la question précédente, Montrer que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |v_i| < |a| - |v_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   puis que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| < |(A_1)_{jj}| - |w_j|,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

   et enfin que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |b_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |(A_1)_{ij}| + \frac{|w_j|}{|a|} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n-1} |v_i|,\ 1 \leq j \leq n-1.$$

   En déduire que la matrice B est à diagonale strictement dominante par colonnes.

b. En raisonnant par récurrence, montrer que A admet alors une factorisation LU.

6. En supposant à présent que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes, déduire des questions précédentes qu'elle admet une factorisation LU.
7. On considère les trois matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en justifiant très simplement la réponse, lesquelles de ces matrices admettent une factorisation LU et, le cas échéant, calculer leur factorisation LU en précisant à chaque étape les opérations effectuées sur les lignes de la matrice factorisée.

Exercice 6 (factorisation de Cholesky). Une matrice symétrique d'ordre n définie positive est une matrice symétrique d'ordre n telle que

$$\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} \geq 0,\ \text{et } \boldsymbol{v}^T A \boldsymbol{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A admet une factorisation de Cholesky s'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B à diagonale principale strictement positive telle que

$$A = BB^T.$$

1. Montrer que si A est symétrique définie positive alors A est inversible.
2. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A est une matrice symétrique définie positive.
3. Montrer que si A admet une factorisation de Cholesky alors A admet une factorisation LDL^T. En déduire que si A admet une factorisation de Cholesky, cette factorisation est unique dès lors que les coefficients diagonaux de B sont strictement positifs.

Dans toute la suite, on suppose que A est une matrice symétrique d'ordre n définie positive.

4. Dans cette question, on veut prouver que la matrice A admet une factorisation de Cholesky par un raisonnement par récurrence.

   a. Pour $n > 1$, écrire la matrice A sous la forme

   $$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{l}^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$

   où $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a_{nn} \in \mathbb{R}$ et A_{n-1} est une matrice symétrique d'ordre $n-1$. Montrer que A_{n-1} est définie positive.

   b. On suppose que A_{n-1} admet une décomposition de Cholesky, c'est-à-dire qu'il existe une matrice triangulaire inférieure inversible B_{n-1} telle que $A_{n-1} = B_{n-1}{B_{n-1}}^T$. Montrer que l'on peut déterminer de manière unique $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, tels que

   $$B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & 0 \\ \boldsymbol{m}^T & b \end{pmatrix}$$

   et $A = BB^T$.

   c. En déduire que A admet une factorisation de Cholesky.
5. Écrire l'algorithme permettant de calculer les coefficients de la matrice B.
6. Comparer le nombre d'opérations nécessaires à la résolution d'un système linéaire à matrice symétrique définie positive par la méthode de Cholesky avec celui de la méthode d'élimination de Gauss.

7. **Application :** déterminer la factorisation de Cholesky des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & 7 & 21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 35 & 5 \\ 4 & 10 & 5 & 45 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 & -4 \\ 3 & -7 & 14 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre ε la matrice A est symétrique définie positive.
2. On suppose tout d'abord que $\varepsilon = 0$. On veut résoudre le système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par une méthode directe ; quelle factorisation de la matrice A envisager dans ce cas ?
3. On suppose maintenant que $\varepsilon = 2$.
   a. Vérifier que la matrice A est définie positive et en calculer la factorisation de Cholesky.
   b. En supposant que $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$, résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant la factorisation calculée à la question précédente.

Exercice 8 (factorisation QR). Soit A une matrice réelle d'ordre n inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que
$$A^T A = R^T R.$$
2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q, c'est-à-dire vérifiant $Q^T Q = QQ^T = I_n$, telle que
$$A = QR. \tag{1}$$
3. Montrer que la décomposition (1) est unique.
4. On note $(\boldsymbol{a}_j)_{1\leq j\leq n}$ les colonnes de la matrice A, $(\boldsymbol{q}_j)_{1\leq j\leq n}$ celles de Q et on pose $R = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
   a. Montrer que $\boldsymbol{a}_j = \sum_{k=1}^{j} r_{kj}\boldsymbol{q}_k$, $j = 1, \ldots, n$.
   b. En déduire qu'obtenir la factorisation (1) équivaut à construire une base orthonormale à partir de la famille $\{\boldsymbol{a}_j\}_{1\leq j\leq n}$.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2016/2016

Feuille de travaux dirigés

Méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 (normes matricielles subordonnées). Soit n un entier strictement positif. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'anneau des matrices d'ordre n à coefficients complexes et on rappelle qu'une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ est une application vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A\| \geq 0$ et $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $\forall B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Pour toute norme vectorielle $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \dots, \infty$, sur $\mathbb{C}^n$, on définit la norme matricielle subordonnée associée par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A\|_p = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}.$$

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, montrer les propriétés suivantes :

1. $\|A\|_p \geq \rho(A)$, où $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ est le rayon spectral de A,
2. $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$,
3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right)$,
4. $\|A\|_2 = \|UA\|_2 = \|AU\|_2 = \|U^*AU\|_2$ pour toute matrice unitaire U (c'est-à-dire telle que $UU^* = I_n$),
5. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$.

Exercice 2 (rayon spectral et série de Neumann). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ une norme matricielle. Montrer que

1. on a $\rho(A) < 1$ si et seulement si A^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini,
2. si $\rho(A) < 1$, alors les matrices $I_n - A$ et $I_n + A$ sont inversibles,
3. la série de terme général A^k converge (vers $(I_n - A)^{-1}$) si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Exercice 3 (convergence de méthodes itératives pour les matrices à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante par lignes, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ 1 \leq i \leq n.$$

Montrer alors que la matrice A est inversible et que les méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel, utilisées pour la résolution du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{b}$ un vecteur donné, convergent toutes deux.

Exercice 4. On considère la matrice carrée d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss–Seidel pour cette matrice.
2. Vérifier que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, où B_{GS} et B_J désignent respectivement les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi. Laquelle de ces deux méthodes converge le plus rapidement ?

Exercice 5. On considère les méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Étudier la convergence de ces deux méthodes en fonction de la valeur du paramètre réel α.

Exercice 6. Soit α et β deux réels. On considère les matrices

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C_\beta = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \beta & 1 & \beta \\ \beta & \beta & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de α (resp. β) la matrice A_α (resp. C_β) est-elle définie positive ?
2. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi associée à A_α (resp. C_β). Pour quelles valeurs de α (resp. β) cette méthode converge-t-elle ?
3. Écrire la matrice d'itération de la méthode de Gauss–Seidel associée à A_α et calculer son rayon spectral. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence de cette méthode ?

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer (par des exemples) qu'on ne peut établir un résultat général de comparaison de convergence entre les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi.

1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_J) < 1 < \rho(B_{GS})$, où B_{GS} et B_J désignent les matrices d'itération des méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi respectivement.
2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\rho(B_{GS}) < 1 < \rho(B_J)$.

Exercice 8 (une méthode de relaxation). On considère pour la résolution d'un système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, avec A une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont tous non nuls, la méthode itérative définie par la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (D - E)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = F\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \text{ et } \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \omega\, \boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)\, \boldsymbol{x}^{(k)},$$

où ω est un paramètre réel, D est la partie diagonale de A, E est la partie triangulaire inférieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$ et F est la partie triangulaire supérieure stricte (*i.e.*, sans la diagonale) de $-A$.

1. Réécrire cette méthode itérative sous la forme
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B(\omega)\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}(\omega),$$
en explicitant la matrice d'itération $B(\omega)$ et le vecteur $\boldsymbol{c}(\omega)$. Vérifier que l'on retrouve la méthode de Gauss–Seidel lorsque $\omega = 1$.

2. Soit maintenant
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Donner les valeurs du paramètre ω pour lesquelles la méthode itérative est convergente dans ce cas.

Exercice 9. Soit A une matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = I_3 - E - F$ avec
$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que la matrice $\dfrac{1}{\omega} I_3 - E$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Pour $\omega \in]0,2[\setminus\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, on considère, pour la résolution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, la méthode itérative définie par
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3 \text{ et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \left(\frac{1}{\omega} I_3 - E\right) \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} I_3\right) \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b},$$
et on pose $B(\omega) = \left(\dfrac{1}{\omega} I_3 - E\right)^{-1} \left(F + \dfrac{1-\omega}{\omega} I_3\right)$. Calculer, en fonction de ω, les valeurs propres de $B(\omega)$ et son rayon spectral.
4. Pour quelles valeurs de ω cette méthode converge-t-elle ?
5. Déterminer $\omega_0 \in]0,2[$ vérifiant $\rho(B(\omega_0)) = \min\left\{\rho(B(\omega)) \,|\, \omega \in]0,2[\setminus\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right\}$.

Exercice 10 (méthode de Richardson). Pour résoudre le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on considère la suite construite par la méthode de Richardson stationnaire, encore connue sous le nom de méthode du gradient à pas fixe, définie par la relation de récurrence
$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\,(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}),$$
avec α un réel non nul.

1. Montrer que, si la méthode converge, la limite $\boldsymbol{x}$ de la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que, si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
il n'existe pas de α non nul tel que la méthode converge.
3. Discuter la convergence de la méthode lorsque A est une matrice symétrique définie positive.

Exercice 11 (convergence de la méthode de Richardson pour une matrice symétrique définie positive). On suppose l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, noté $(\cdot\,,\cdot)$, et de la norme associée $\|\boldsymbol{v}\|_2 = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})^{1/2}$. Soit A une matrice symétrique d'ordre n vérifiant
$$\exists c > 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n,\ (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq c\,\|\boldsymbol{v}\|_2{}^2.$$

1. Montrer que $\ker A = \{\boldsymbol{0}\}$. En déduire que, pour tout $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ admet une unique solution.

2. On fixe $\alpha > 0$ et on construit la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ donné et, } \forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}).$$

   On note $\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^{(k)}$ le résidu à l'étape k.

   a. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{r}^{(k+1)} = (I_n - \alpha\, A)\boldsymbol{r}^{(k)}$, puis que $\boldsymbol{r}^{(k)} = (I_n - \alpha\, A)^k \boldsymbol{r}^{(0)}$.

   b. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$. Montrer que

$$\|(I_n - \alpha\, A)\boldsymbol{x}\|_2{}^2 \leq \alpha^2 \|A\|_2{}^2 - 2c\alpha + 1.$$

   c. En déduire que $\|I_n - \alpha\, A\|_2 < 1$ pour α appartenant à un intervalle bien choisi.

3. Déduire de la question précédente une condition nécessaire sur α pour que la suite $\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2016/2016

Feuille de travaux dirigés

Méthodes de résolution des équations non linéaires

Exercice 1 (vitesse de convergence de la méthode de la fausse position). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a)f(b) < 0$. La méthode de la fausse position appliquée à la recherche d'un zéro de f est obtenue en remplaçant dans l'algorithme de la méthode de dichotomie le point milieu $x^{(k)} = \frac{1}{2}(a^{(k)} + b^{(k)})$ par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$ et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses.

1. Déterminer $x^{(k)}$ en fonction de $a^{(k)}$, $f(a^{(k)})$, $b^{(k)}$ et $f(b^{(k)})$.
2. Pour étudier la vitesse de convergence de cette méthode, on fait les hypothèses additionnelles que f est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et que les dérivées f' et f'' ne s'annulent pas sur cet intervalle, de telle sorte que ξ soit un zéro simple de f. Dans ces conditions, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode converge vers ξ.

   a. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\theta \in [a, b]$ tel que

   $$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a) + \frac{1}{2}\,(x - a)(x - b)f''(\theta).$$

   Indication : on pourra introduire, pour x fixé dans $]a, b[$ et tout t dans $[a, b]$, la fonction auxiliaire

   $$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{(x - a)(x - b)}\,(t - a)(t - b),\ \textit{avec}\ p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a),$$

   et utiliser le théorème de Rolle.

   b. En appliquant le résultat précédent au point ξ et à l'intervalle $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, montrer qu'il existe $\theta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que

   $$\frac{f(b^{(k)}) - f(a^{(k)})}{b^{(k)} - a^{(k)}}\,(\xi - x^{(k)}) = -\frac{1}{2}\,(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})f''(\theta^{(k)}).$$

   c. En déduire que, $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe $\eta^{(k)} \in [a^{(k)}, b^{(k)}]$ tel que

   $$\xi - x^{(k)} = -\frac{1}{2}\,(\xi - a^{(k)})(\xi - b^{(k)})\frac{f''(\theta^{(k)})}{f'(\eta^{(k)})}.$$

   d. On suppose à présent que, $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $b^{(k+1)} = b$ et $a^{(k+1)} = x^{(k)}$. Étudier alors le comportement de la suite $\left(\frac{|x^{(k+1)}-\xi|}{|x^{(k)}-\xi|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 2 (étude de convergence de la méthode de point fixe). Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et g une application continue de $[a, b]$ dans lui-même.

1. Montrer que g possède au moins un point fixe ξ dans l'intervalle $[a, b]$.

2. On suppose à présent que la fonction g est continûment dérivable dans un voisinage $I = [\xi - h, \xi + h]$ de ξ et que, **uniquement dans cette question**, $|g'(\xi)| < 1$. On va montrer que la suite définie par
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$
converge vers ξ dès que l'initialisation $x^{(0)}$ est suffisamment proche de ξ. On dit alors que ξ est un point fixe *attractif* de g.
   a. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq h$ tel que
$$\forall x \in I_\delta = [\xi - \delta, \xi + \delta],\ |g'(x) - g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}\left(1 - |g'(\xi)|\right).$$
   b. En déduire qu'il existe une constante $0 < L < 1$ telle que, $\forall x \in I_\delta$, $|g'(x)| \leq L$.
   c. En déduire que si $x^{(k)} \in I_\delta$, alors
$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq L\,|x^{(k)} - \xi|,$$
   et que, si $x^{(0)} \in I_\delta$, alors
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k)} \in I_\delta \text{ et } |x^{(k)} - \xi| \leq L^k\,|x^{(0)} - \xi|.$$
   d. En conclure que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.
3. On suppose dans cette question que $|g'(\xi)| > 1$. En s'inspirant des étapes de la question précédente, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour k suffisamment grand, $x^{(k)}$ n'appartient pas à I_δ. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut *a priori* converger vers ξ, quelle que soit l'initialisation $x^{(0)} \neq \xi$. On dit alors que ξ est un point fixe[1] *répulsif* de g.
4. **Application.** Étudier les méthodes de point fixe associées aux fonctions suivantes :
$$g_1(x) = \ln(1+x) + 0{,}2,\ g_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + c),\ \text{avec } 0 \leq c < 1,\ \text{et } g_3(x) = -\ln(x).$$

Exercice 3. On souhaite calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^3 - 2$ par une méthode de point fixe utilisant la fonction
$$g(x) = \left(1 - \frac{\omega}{3}\right)x + (1-\omega)\,x^3 + \frac{2\omega}{3\,x^2} + 2(\omega - 1),$$
ω étant un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω le zéro de la fonction f est-il un point fixe de la méthode ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre ω la convergence de la méthode est-elle d'ordre supérieur à un ?
3. Existe-t-il une valeur du paramètre ω telle que l'ordre de la méthode soit supérieur à deux ?

Exercice 4 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro simple). Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ξ un zéro simple de f, c'est-à-dire tel que $f(\xi) = 0$ et $f'(\xi) \neq 0$, contenu dans $[a, b]$.

On se propose de déterminer le zéro ξ par la méthode de Newton–Raphson, c'est-à-dire en tant que limite de la suite récurrente définie par
$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),$$
l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. Le réel ξ étant aussi un point fixe de la fonction ϕ, on rappelle que l'ordre de convergence d'une méthode itérative de la forme $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ est égal à r, avec $r \geq 1$, s'il existe, pour k suffisamment grand, une constante $C > 0$ telle que
$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq C|x^{(k)} - \xi|^r.$$

1. En effet, si $x^{(0)} = \xi$, alors la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et vaut ξ.

1. Montrer que, pour $x^{(k)}$ suffisamment proche de ξ, $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\xi - x^{(k+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{f'(x^{(k)})} f''\left(x^{(k)} + \theta(\xi - x^{(k)})\right) (\xi - x^{(k)})^2,\ 0 < \theta < 1,$$

et en conclure que l'ordre de convergence de la méthode de Newton–Raphson est deux.

2. En déduire qu'il existe $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$, alors la méthode de Newton–Raphson converge.

Exercice 5 (exemple de divergence de la méthode de Newton–Raphson). On considère la fonction $f(x) = \arctan(x)$, qui a pour zéro $\xi = 0$.

1. Écrire l'équation de récurrence de la méthode de Newton–Raphson utilisée pour approcher le zéro de f. On notera g la fonction dont ξ est le point fixe ainsi définie.
2. Montrer que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors $|g(x)| > |x|$.

3. Étudier l'application $x \mapsto (1+x^2)\arctan(x) - 2\,x$ sur $[0, +\infty[$. En déduire que si

$$\arctan(|x|) > \frac{2\,|x|}{1+x^2}$$

alors

$$\arctan(|g(x)|) > \frac{2\,|g(x)|}{1+g(x)^2}.$$

4. En conclure que si

$$\arctan(|x^{(0)}|) > \frac{2\,|x^{(0)}|}{1+(x^{(0)})^2}$$

alors

$$\lim_{k\to+\infty} |x^{(k)}| = +\infty.$$

Exercice 6 (étude de convergence de la méthode de Newton–Raphson vers un zéro multiple). Soit f une fonction $m+1$ fois continûment dérivable ($m \geq 2$) dans l'intervalle $[a, b]$ et ξ un zéro multiple de f d'ordre m, c'est-à-dire tel que

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(m-1)}(\xi) = 0 \text{ et } f^{(m)}(\xi) \neq 0,$$

contenu dans $[a, b]$. On cherche à appliquer la méthode de Newton–Raphson pour approcher ξ, en définissant la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g(x^{(k)}),$$

l'initialisation $x^{(0)}$ étant donnée. On note que la fonction g n'est pas définie au point ξ.

1. Montrer alors que l'on peut prolonger g par continuité et que la fonction ainsi obtenue est dérivable au voisinage de ξ, telle que

$$g'(\xi) = 1 - \frac{1}{m}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que si $|x^{(0)} - \xi| \leq K$ alors la méthode de Newton–Raphson converge et que cette convergence est linéaire.

3. On suppose la valeur de l'entier m connue *a priori*. On a alors recours à la méthode modifiée, définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},$$

avec $x^{(0)}$ donné. Quel est l'ordre de convergence de cette nouvelle méthode ?

Exercice 7 (étude de la méthode de Héron pour le calcul de $\sqrt{2}$). Pour calculer $\sqrt{2}$, on propose de construire une suite récurrente définie par

$$x^{(0)} = 1 \text{ et},\ \forall k \in \mathbb{N},\ x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{2}{x^{(k)}}\right).$$

1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et tracer son graphe.
2. Construire graphiquement les premiers termes de la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Vérifier que g est une application contractante de $[1,2]$ dans lui-même. En déduire que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Pour quelles valeurs de l'initialisation $x^{(0)}$ la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
5. Montrer que la convergence de cette méthode est quadratique. Que dire d'autre ?

Feuille de travaux dirigés

Interpolation polynomiale

Exercice 1. Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-1,1]$, interpolée aux nœuds -1 et 1. Montrer que, si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-1,1]$, on a alors

$$\forall x \in [-1,1],\ |f(x) - \Pi_1 f(x)| \leq \frac{M_2}{2}(1-x^2) \leq \frac{M_2}{2},$$

où $M_2 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f''(x)|$. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est une égalité.

Exercice 2. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré un, noté $\Pi_1 f$, de la fonction $f : x \mapsto x^3$, interpolée aux nœuds 0 et a. Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,a[$, il existe un point $c \in [0,a]$ tel que

$$f(x) - \Pi_1 f(x) = \frac{f''(c)}{2}\, x(x-a),$$

et établir que $c = \frac{1}{3}(x+a)$.
Considérer ensuite la fonction $f : x \mapsto (2x-a)^4$ et montrer que, dans ce cas, il y a deux valeurs possibles pour c. Les déterminer.

Exercice 3. Soit n un entier naturel. Étant donnés $n+2$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n+1$, et $n+2$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n+1$, on note $\Pi_{0,\dots,n}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n}$ et $\Pi_{1,\dots,n+1}$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n associé à l'ensemble de couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,n+1}$. On pose

$$p(x) = \frac{(x-x_0)\,\Pi_{1,\dots,n+1}(x) - (x-x_{n+1})\,\Pi_{0,\dots,n}(x)}{x_{n+1}-x_0}.$$

Montrer que p est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $n+1$ associé aux couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,n+1}$.

Exercice 4 (forme de Newton du polynôme d'interpolation). Soit n un entier strictement positif. Étant donné $n+1$ nœuds distincts x_i, $i = 0,\dots,n$, et $n+1$ valeurs y_i, $i = 0,\dots,n$, on note, pour tout j dans $\{0,\dots,n\}$, Π_j le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré j associé aux couples $\{(x_i,y_i)\}_{i=0,\dots,j}$.

1. On pose
$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \Pi_{j-1}(x) + q_j(x).$$
Montrer que $q_j(x) = a_j\,\omega_j(x)$, où a_j est un coefficient à expliciter et $\omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$. La constante a_j est appelée la j^{e} *différence divisée de Newton* et sera notée $[x_0,\dots,x_j]\boldsymbol{y}$ dans la suite de l'exercice.
2. On pose $[x_0]\boldsymbol{y} = y_0$ et $\omega_0 \equiv 1$. Montrer que
$$\forall j \in \{0,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \sum_{k=0}^{j} [x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}\,\omega_k(x),$$
où $[x_0,\dots,x_k]\boldsymbol{y}$ est la k^{e} différence divisée de Newton. Cette écriture est appelée la *forme de Newton* du polynôme d'interpolation de Lagrange.

3. Montrer que
$$\forall j \in \{0,\dots,n\},\ \Pi_j(x) = \sum_{i=0}^{j} \frac{\omega_{j+1}(x)}{(x-x_i)\,\omega'_{j+1}(x_i)}\, y_i,$$
et en déduire que
$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ [x_0,\dots,x_j]\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{j} \frac{y_i}{\omega'_{j+1}(x_i)}.$$
4. Obtenir enfin la formule de récurrence permettant le calcul des différences divisées :
$$\forall j \in \{1,\dots,n\},\ [x_0,\dots,x_j]\boldsymbol{y} = \frac{[x_1,\dots,x_j]\boldsymbol{y} - [x_0,\dots,x_{j-1}]\boldsymbol{y}}{x_j - x_0}.$$
Peut-on en déduire un avantage de la forme de Newton du polynôme d'interpolation sur la forme de Lagrange ?

Exercice 5 (polynômes de Chebyshev et meilleurs points d'interpolation). Soit n un entier naturel. Le but de cet exercice est de montrer que les points $x_0, \dots, x_n$ appartenant à un intervalle $[a,b]$ et minimisant [1]
$$\sup_{x\in[a,b]} |\omega_{n+1}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$
sont reliés aux racines d'un polynôme particulier. Quitte à effectuer un changement de variable affine, on peut supposer que $[a,b] = [-1,1]$. Pour tout x dans l'intervalle $[-1,1]$, on pose alors $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Montrer que $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et que l'on a la relation de récurrence
$$T_{n+2}(x) = 2x\, T_{n+1}(x) - T_n(x).$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire que le polynôme T_n est de degré n, que son monôme de plus haut degré est $2^{n-1}x^n$ et que ses racines sont les nombres $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n-1$ (T_n est appelé le n^{e} *polynôme de Chebyshev de première espèce*).
3. Montrer que la fonction T_n admet sur $[-1,1]$ des extrema locaux aux points $x'_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n$, et que $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
4. Montrer alors que
$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)|,$$
pour tout polynôme Q normalisé de degré $n+1$, les points x_k, $k = 0, \dots, n$, étant les racines du polynôme T_{n+1}.

1. Cette quantité apparaît dans l'erreur d'interpolation $E(x) = f(x) - \Pi_n f(x)$, mesurée en norme de la convergence uniforme, d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$.

Feuille de travaux dirigés

Formules de quadrature

Exercice 1. On considère la formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$ donnée par

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0\, f\left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha_1\, f(0) + \alpha_2\, f\left(\frac{1}{2}\right).$$

1. Déterminer α_0, α_1 et α_2 de sorte que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
2. Quel est le degré d'exactitude de la formule ainsi obtenue ?

Exercice 2. Étant donnés deux points x_0 et x_1 dans l'intervalle $[-1,1]$ tels que $x_0 < x_1$ et deux réels α_0 et α_1, on considère la formule de quadrature suivante sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([-1,1]),\ I_{ap}(f) = \alpha_0\, f(x_0) + \alpha_1\, f(x_1).$$

Le but de cet exercice est de déterminer les valeurs x_0, x_1, α_0 et α_1 conduisant à une formule de quadrature de degré d'exactitude le plus élevé possible.

1. Construire les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 associés aux points x_0 et x_1.
2. Déterminer les poids α_0 et α_1 tels que la formule soit exacte pour ces deux polynômes. En déduire qu'elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à un.
3. Déterminer une relation entre les nœuds x_0 et x_1 pour que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.
4. Répondre à la même question pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
5. Montrer que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au plus égal à trois. *Indication : on pourra utiliser le polynôme* $\omega(x) = ((x-x_0)(x-x_1))^2$.
6. En déduire la formule de quadrature à deux nœuds sur l'intervalle $[-1,1]$ et de degré d'exactitude égal à trois.

Exercice 3 (erreur pour la formule de quadrature de Simpson). Soit $[a,b]$ un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La formule de Simpson est une formule de quadrature interpolatoire pour laquelle une approximation de l'intégrale de la fonction f entre a et b est obtenue en remplaçant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange de degré deux aux nœuds $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$, noté $\Pi_2 f$.

1. Définir et expliciter le polynôme d'interpolation $\Pi_2 f$, puis déterminer

$$I_2(f) = \int_a^b \Pi_2 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i\, f(x_i).$$

2. On suppose maintenant que $f \in \mathscr{C}^4([a,b])$ et on introduit l'erreur de quadrature $E_2(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - \Pi_2 f(x))\,\mathrm{d}x$. On va montrer que

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c),\ \text{avec } c \in]a,b[.$$

Pour t appartenant à $[-1, 1]$, on pose $F(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$ et

$$G(t) = \int_{-t}^{t} F(u)\,\mathrm{d}u - \frac{t}{3}\left[F(-t) + 4F(0) + F(t)\right].$$

a. Montrer que $E_2(f) = \frac{1}{2}(b-a)G(1)$.

b. Soit $H(t) = G(t) - t^5 G(1)$. Montrer qu'il existe $\zeta \in]-1, 1[$ tel que $H'''(\zeta) = 0$.

c. En déduire qu'il existe $\xi \in]-\zeta, \zeta[$ tel que

$$H'''(\zeta) = -\frac{2\zeta^2}{3}\left[F^{(4)}(\xi) + 90G(1)\right],$$

et, par suite, que

$$G(1) = -\frac{1}{90}F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^4}{1440}f^{(4)}(c),$$

avec $c \in]a, b[$.

3. Quel est le degré d'exactitude de cette formule de quadrature ?

Exercice 4 (erreur de quadrature et noyau de Peano). Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à k.

1. Soit une fonction $f \in \mathscr{C}^0([-1, 1])$. On note $\Pi_2 f \in \mathbb{P}_2$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, 0 et 1. Donner l'expression des polynômes de Lagrange l_i, $i = 0, 1, 2$, tels que

$$\Pi_2 f(x) = f(-1)\,l_0(x) + f(0)\,l_1(x) + f(1)\,l_2(x).$$

En déduire les valeurs des poids α_i, $i = 0, 1, 2$, telles que la formule de quadrature

$$I_2(f) = \alpha_0\,f(-1) + \alpha_1\,f(0) + \alpha_2\,f(1), \tag{2}$$

approchant l'intégrale de f entre -1 et 1, soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

2. On suppose que $f \in \mathbb{P}_3$ et on note $s \in \mathbb{P}_3$ le polynôme tel que

$$f(x) = \Pi_2 f(x) + s(x).$$

Montrer que s est de la forme

$$s(x) = a(x^2 - 1)x,\ a \in \mathbb{R},$$

et en déduire que la formule (2) est en fait exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

3. On supposera dans toute la suite que $f \in \mathscr{C}^4([-1, 1])$ et on rappelle que, par la formule de Taylor avec reste intégral, on a, $\forall x \in [-1, 1]$,

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(t)(x-t)_+^3\,\mathrm{d}t,$$

avec $p \in \mathbb{P}_3$ et où

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x - t & \text{si } t \leq x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}.$$

En déduire dans ce cas que l'erreur $E_2(f)$ de la formule de quadrature s'écrit

$$E_2(f) = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} K(t) f^{(4)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

où K est une fonction définie sur $[-1, 1]$ dont on précisera l'expression générale [1].

1. La fonction K est le noyau de Peano associée à la formule de quadrature considérée.

4. On admet le fait que la fonction K est paire. Calculer explicitement $K(t)$ pour $t \in [0,1]$ et montrer que l'on trouve

$$K(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(1-t)^3(1+3t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ K(-t) & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \end{cases}.$$

5. Vérifier que la fonction K ne change pas de signe sur l'intervalle $[-1,1]$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$E_2(f) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\xi) \int_{-1}^{1} K(t) \, \mathrm{d}t.$$

En déduire enfin l'expression

$$E_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.$$

6. On considère maintenant l'intervalle symétrique $[-h,h]$, avec $h > 0$. Déduire de ce qui précède une formule de quadrature

$$\int_{-h}^{h} f(x) \, \mathrm{d}x = b_1 \, f(-h) + b_2 \, f(0) + b_3 \, f(h) + E_{2,h}(f),$$

pour toute fonction f continue sur $[-h,h]$, exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois et dont on déterminera l'erreur de quadrature $E_{2,h}(f)$ lorsque $f \in \mathscr{C}^4([-h,h])$.
Indication : on pourra introduire la fonction g, définie sur $[-1,1]$ par $g(u) = f(h\,u)$.