Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
Année 2018/2019

Examen du 29 Mai 2019

— Les documents de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs sont interdits.
— Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.
— **On ne pourra rendre que trois pages doubles maximum.**

Durée : 2 heures

Exercice 1: Schéma de Jacobi et Gauss-Seidel (4 points).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de α la méthode itérative de Jacobi converge-t-elle ? **[2 pt]**
2. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel. **[2 pt]**

Exercice 2: Quadrature (2 points).
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire pour approcher

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ \sim\ \omega_0 f(0) + \omega_1 f(\xi) + \omega_2 f'(0),$$

où $\xi \in]0,1[$ et $\omega_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{0,1,2\}$. Déterminer les paramètres ω_i et ξ pour que la formule de quadrature soit exacte si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Exercice 3: Polynômes de Lagrange et de Hermite (9 points).
Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$. On note $a = f(0)$, $b = f(1)$ et $M = \sup_{x\in]0,1[} |f'''(x)|$.

1. Déterminer le polynôme d'interpolation P_ε de f relativement aux points 0, ε et 1. **[1 pt]**
2. On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche $f(x)$ par $P_\varepsilon(x)$. Donner une majoration de $E_1(x)$ en fonction de M, ε et x (on pourra ou bien faire appel à des théorèmes du cours ou bien prouver le résultat si on ne se souvient pas par coeur). **[1 pt]**
3. **[2 pt]** Soit $x \in [0,1]$. Montrer que, pour chaque $x \in [0,1]$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} P_\varepsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$
4. Montrer que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant :
$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b.$$
Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction f relativement aux points 0, 1 et aux entiers 1, 0, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1. **[2 pt]**

5. On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M. Pour cela, on pourra considérer la fonction ϕ définie par
$$\phi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{x^2(x-1)} t^2(t-1)$$
pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\phi'''(\xi) = 0$. **[3 pt]**

Exercice 4: Méthode de Newton-Chebyshev (10 points).
On propose d'étudier une variante de la méthode de Newton qui améliore l'ordre de convergence que la méthode classique.

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $x^* \in \mathbb{R}$ un point fixe de ϕ tel que
$$x^* = \phi(x^*), \quad \phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0.$$
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n \geq 0, \\ x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné.} \end{cases} \tag{PF}$$
   (a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que si $|y - x^*| \leq a$, alors $|\phi'(y)| \leq 1/2$. **[1 pt]**
   (b) Montrer par récurrence sur n que si $|x_0 - x^*| \leq a$, alors $|x_n - x^*| \leq a/2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. **[2 pt]**
   (c) En déduire que la suite (x_n) converge localement, c'est à dire qu'il existe un voisinage $V = [x^* - \eta, x^* + \eta]$ de x^* tel que si $x_0 \in V$, alors $x_n \to x^*$ lorsque $n \to \infty$. **[0.5 pt]**
   (d) Montrer que la vitesse de convergence de la suite est au moins cubique. Pour cela, on pourra prouver grâce à un développement de Taylor-Lagrange que, si la donnée initiale est choisie dans un certain voisinage de x^*, alors il existe $\beta > 0$ tel que $|x_{n+1} - x^*| \leq \beta |x_n - x^*|^3$ pour tout $n \geq 0$. **[1.5 pt]**
2. Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. On pose
$$\phi(x) = x + f(x)h(x),$$
avec $h \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (a) On suppose $h(x^*) \neq 0$. Montrer que x^* est un zéro de f si et seulement si x^* est un point fixe de ϕ. **[1 pt]**
   (b) En utilisant la question 1, donner une expression de $h(x^*)$ et $h'(x^*)$ en fonction de $f'(x^*)$ et $f''(x^*)$ telle que la méthode de point fixe (PF) appliquée à la recherche du point fixe de ϕ converge localement vers x^* avec une vitesse de convergence au moins cubique. **[2 pt]**
3. Soit $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit $x^* \in \mathbb{R}$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$. On considère la modification suivante de la méthode de Newton (due à Chebyshev) :
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)[f(x_n)]^2}{2[f'(x_n)]^3} \tag{NC}$$
En utilisant les questions 1 et 2, montrer que la méthode (NC) converge localement et que la vitesse de convergence est au moins cubique. On supposera que les $f'(x_n)$ ne s'annulent pas. **[2 pt]**