Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
Année 2018/2019

Contrôle continu du 19 Mars 2019

Les documents de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.
Le barême est orientatif.

Durée : 2 heures.

Exercice 1: Décomposition de Jacobi et de Gauss-Seidel (0.5+1.5+1.5 = 3.5 points).
Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Étudier la convergence de la méthode itérative de Jacobi pour résoudre un système $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^3$.
3. Même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

Exercice 2: Calcul de valeurs propres par la méthode LR.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres λ_i sont réelles et vérifient

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0.$$

Il existe donc une matrice inversible P telle que

$$A = P\Lambda P^{-1}, \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier la méthode itérative suivante, appelée méthode LR, pour calculer les valeurs propres d'une matrice A :

— Pour $k = 1$, on pose $A_1 = A$.

— À l'étape $k \geq 1$, on calcule la factorisation LU de A_k, notée

$$A_k = L_k U_k,$$

et on pose

$$A_{k+1} = U_k L_k.$$

Nous allons montrer que la suite de matrices $(A_k)_{k\geq 1}$ converge vers une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. L'exercice se compose de quatre parties, les parties 1 et 4 étant indépendantes des parties 2 et 3.

Première partie : Existence (1+0.5+1=2.5 points)
Nous allons garantir tout d'abord que la méthode itérative est bien définie au sens où toutes les décompositions LU existent bien. Pour cela :

1. Montrer que toute matrice carrée inversible admet une décomposition LU.
2. En déduire que P et P^{-1} admettent une décomposition LU, que l'on notera

$$P = LU, \quad \text{et} \quad P^{-1} = MV.$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$, A_k admet une factorisation LU.

Deuxième partie : Résultats intermédiaires (1+2+1+1.5+1+1=7.5 points)

4. On pose
$$\mathcal{L}_k = L_1 \dots L_k \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_k = U_k \dots U_1, \quad \forall k \geq 1.$$
Montrer que pour tout $k \geq 1$, $A_{k+1} = L_k^{-1} A_k L_k$, puis que $A_{k+1} = \mathcal{L}_k^{-1} A \mathcal{L}_k$.
5. On rappelle que deux matrices Q_1, $Q_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice W inversible telle que $Q_1 = WQ_2W^{-1}$.
   (a) Montrer que des matrices semblables ont le même spectre.
   (b) En déduire que pour tout $k \geq 1$, A_k a les mêmes valeurs propres que A.
6. En raisonnant par récurrence, montrer que $A^k = \mathcal{L}_k \mathcal{U}_k$ pour tout $k \geq 1$.
7. On pose
$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{-k} \end{pmatrix}, \quad \forall k \geq 1.$$
Exprimer les éléments de la matrice $\Lambda^k M \Lambda^{-k}$ en fonction des éléments de M et des valeurs propres de A. En déduire que
$$\Lambda^k M \Lambda^{-k} = \mathrm{Id} + E_k,$$
avec $\lim_{k\to\infty} E_k = 0$.
8. En utilisant que $A^k = P\Lambda^k P^{-1}$, déduire de la question 7 que
$$A^k = L(\mathrm{Id} + F_k)R_k$$
où R_k est une matrice triangulaire supérieure dont on donnera l'expression.
9. Montrer que $\lim_{k\to\infty} F_k = 0$ et en déduire que la matrice $\mathrm{Id} + F_k$ est inversible pour une valeur de k suffisamment grande.

Troisième partie : Convergence de la méthode (2+1.5+1+1=5.5 points)

10. On pose
$$T_k = R_k \mathcal{U}_k^{-1}, \quad \forall k \geq 1.$$
En utilisant les formules pour A^k des questions 6 et 8, montrer que $\lim_{k\to\infty} T_k = \mathrm{Id}$.
11. Déduire des questions précédentes que la suite $(\mathcal{L}_k)_{k\geq 1}$ converge vers L, puis que la suite $(L_k)_{k\geq 1}$ converge vers Id.
12. En utilisant l'expression de R_k trouvée à la question 8, montrer que
$$T_k U_k = U \Lambda U^{-1} T_{k-1}, \quad k \geq 2$$
et en déduire que la suite $(U_k)_{k\geq 1}$ est convergente.
13. Conclure que la suite $(A_k)_{k\geq 1}$ converge vers une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

Quatrième partie : Implémentation sur Python (1+3=4 points)

14. Écrire une fonction `normInf(A)` qui calcule la norme infini d'une matrice carrée A,
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$
15. D'après l'étude théorique qui précède, à chaque itération k de l'algorithme LR, une approximation des valeurs propres de A est donnée par la diagonale de matrice A_k. Écrire une fonction
`algoLR(A,eps,nmax)`
qui retourne un vecteur avec les valeurs propres approchées de A calculées par la méthode LR. On arrêtera les itérations lorsque la norme infini de la différence entre deux itérées successives devient plus petite que `eps`,
$$||A_k - A_{k-1}||_\infty \leq \texttt{eps}$$
ou bien quand on itère plus de `nmax` fois.