Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
année 2015/2016

Contrôle continu du 22 mars 2016

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2h

Exercice 1 (résolution d'une modification de rang un d'un système linéaire). Soit A une matrice inversible d'ordre n et deux vecteurs non nuls $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $1+\boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$.

1. Vérifier la *formule de Sherman–Morrisson* :

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T A^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

2. Étant donné un vecteur $\boldsymbol{b}$ de $\mathbb{R}^n$ et supposant la factorisation LU de la matrice A connue, expliquer comment résoudre à moindre coût le système linéaire $(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Donner un ordre du nombre d'opérations arithmétiques nécessaires [1] à cette résolution.

Exercice 2 (étude d'une méthode itérative). Soit A une matrice d'ordre n à coefficients réels inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls et $\boldsymbol{b}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On considère pour la résolution numérique du système $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ la méthode itérative définie par la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I_n - \alpha\, D^{-1}A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha\, D^{-1}\boldsymbol{b},$$

dans laquelle I_n désigne la matrice identité d'ordre n, D est la matrice diagonale constituée de la diagonale de A (*i.e.*, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $d_{ii} = a_{ii}$) et α est un réel non nul.

1. Montrer que la méthode est consistante. Que dire de cette méthode pour le choix $\alpha = 1$?
2. Exprimer les coefficients de la matrice d'itération de la méthode en fonction de ceux de A.

On suppose à partir de maintenant que la matrice A est à diagonale strictement dominante par lignes [2] et que $0 < \alpha \leq 1$.

3. Montrer que $\|I_n - \alpha\, D^{-1}A\|_\infty < 1$.
4. En déduire que la méthode est convergente.

Exercice 3 (calcul de valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique). *Les trois séries de questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

On considère la matrice réelle tridiagonale symétrique d'ordre n

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix},$$

1. On ne prendra évidemment pas en compte le coût de la factorisation LU de la matrice A, puisque celle-ci est supposée déjà connue.
2. On rappelle qu'une matrice A d'ordre n est dite à diagonale strictement dominante par lignes si

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,.$$

sous l'hypothèse

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\},\ \beta_i \neq 0.$$

1. Justifier que les valeurs propres de cette matrice sont réelles.

Soit la famille de fonctions polynomiales $\{p^{(k)}\}_{k=0,\dots,n}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ p^{(0)}(\lambda) = 1,\ p^{(1)}(\lambda) = \alpha_1 - \lambda,$$
$$\forall k \in \{2, \dots, n\},\ p^{(k)}(\lambda) = (\alpha_k - \lambda)\, p^{(k-1)}(\lambda) - {\beta_{k-1}}^2\, p^{(k-2)}(\lambda).$$

2. Soit k un entier appartenant à $\{1, \dots, n\}$. Montrer que le mineur principal d'ordre k de la matrice $T - \lambda\, I_n$, avec I_n la matrice identité d'ordre n, vaut $p^{(k)}(\lambda)$.
3. En déduire le coût de calcul de l'évaluation du polynôme caractéristique de T au point λ.

On va à présent montrer que les valeurs propres de T sont toutes distinctes.

4. En utilisant la relation de récurrence ci-dessus et en raisonnant par l'absurde, établir que

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\},\ p^{(k)}(\lambda) = 0 \Rightarrow p^{(k-1)}(\lambda)\, p^{(k+1)}(\lambda) < 0. \tag{1}$$

5. **(preuve difficile pouvant être admise, question hors barême)** Montrer au moyen d'un raisonnement par récurrence que le polynôme $p^{(k)}$, $1 \leq k \leq n-1$, admet k racines distinctes séparant les racines du polynômes $p^{(k+1)}$.
Indication : on pourra utiliser la propriété (1) *et étudier le monôme de plus haut degré de* $p^{(k)}$ *en fonction de* k*. L'initialisation de la récurrence revient à prouver que* $p^{(2)}$ *possède deux racines, l'une strictement inférieure et l'autre strictement supérieure à* α_1*. Pour* $2 \leq k \leq n-1$*, il convient tout d'abord de montrer que le polynôme* $p^{(k+1)}$ *possède une racine entre chaque paire de racines adjacentes de* $p^{(k)}$*, puis de distinguer le cas où l'entier* k *est pair du cas où il est impair pour achever la preuve.*
6. En conclure que les valeurs propres de T sont toutes distinctes.

Pour tout réel λ, on admet que le nombre de changements de signe[3] entre les termes de la suite $S_\lambda = \{p^{(0)}(\lambda), p^{(1)}(\lambda), \dots, p^{(n)}(\lambda)\}$ donne le nombre de valeurs propres de T strictement plus petites que λ. En supposant les valeurs propres de la matrice ordonnées de la façon suivante

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n,$$

on propose d'approcher la i^{e} valeur propre de T en utilisant la méthode de dichotomie.

7. Partant d'un intervalle borné $[a^{(0)}, b^{(0)}]$, avec $a^{(0)} \neq b^{(0)}$, contenant la valeur propre λ_i, expliquer le fonctionnement de cette méthode pour le calcul de λ_i.
8. On pose $a^{(0)} = -\|T\|_\infty$ et $b^{(0)} = \|T\|_\infty$. Justifier la validité de ce choix et expliciter les valeurs des bornes $a^{(0)}$ et $b^{(0)}$.
9. Donner une majoration de l'erreur commise sur la valeur de λ_i après k itérations de la méthode de dichotomie.

3. En raison de la propriété (1), on adopte la convention que le signe de $p^{(k)}(\lambda)$ est l'opposé de celui de $p^{(k-1)}(\lambda)$ si $p^{(k)}(\lambda) = 0$.