Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Méthodes numériques
Année 2016/2017

Contrôle continu du 14 Mars 2017

Les documents de cours, calculatrices, téléphones et ordinateurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la rédaction dans l'évaluation.

Durée : 2 heures.

Exercice 1: Matrices monotones (7 points).
Définitions préliminaires :

— Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que $x \geq 0$ si toutes les composantes de x sont positives.

— On dit qu'une matrice à coefficients réels A est *positive*, et on note $A \geq 0$, si tous ses coefficients sont positifs.

— On dit que A est *monotone* si elle est inversible et si $A^{-1} \geq 0$.

Questions :

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est monotone alors A^T est monotone.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. montrer que $A \geq 0$ si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est monotone si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.
4. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ des réels strictement positifs. Montrer que la matrice suivante est monotone :
$$\begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2+c_2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

Exercice 2: Questions préliminaires pour l'exercice 3 (2 points).
Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Prouver que si les matrices A et B commutent et si l'une d'entre elles (par exemple B) est inversible, alors les matrices A et B^{-1} commutent.
2. Prouver que si les matrices A et B commutent et sont symétriques, alors la matrice AB est symétrique.
3. Prouver que si A et B sont semblables (i.e. $\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = P^{-1}BP$), alors elles ont les mêmes valeurs propres et le même rayon spectral.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et l'on considère la résolution du système $Ax = b$. Rappeler la définition d'un schéma itératif basé sur une décomposition régulière de A et rappeler la condition nécessaire et suffisante suivant laquelle ce schéma converge.

Exercice 3: Étude d'une méthode itérative (7 points).
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la résolution du système $Ax = b$ par la méthode itérative suivante. On introduit la décomposition $A = D + H + V$ où

— $D \coloneqq c\,\mathrm{Id}$ avec $c > 0$ et Id la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
— H et V sont deux matrices symétriques telles que les matrices $D + H$ et $D + V$ soient inversibles.

On considère la méthode itérative définie pour tout $k \geq 0$ comme

$$\begin{cases} (D+H)x_{k+\frac{1}{2}} & = -Vx_k + b \\ (D+V)x_{k+1} & = -Hx_{k+\frac{1}{2}} + b, \end{cases} \tag{0.1}$$

et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donné.

Questions (on pourra utiliser les propriétés prouvées à l'exercice 2) :

1. Exprimer x_{k+1} en fonction de x_k et en déduire que $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ si et seulement si
$$\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) < 1.$$
2. On pose $B \coloneqq D^{-1}H$ et $C \coloneqq D^{-1}V$.
   (a) Vérifier que
   $$\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) = \rho\left(B(\mathrm{Id}+B)^{-1}C(\mathrm{Id}+C)^{-1}\right).$$
   (b) Montrer que les matrices $B(\mathrm{Id}+B)^{-1}$ et $C(\mathrm{Id}+C)^{-1}$ sont symétriques. En déduire que
   $$\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) \leq \rho\left(B(\mathrm{Id}+B)^{-1}\right)\rho\left(C(\mathrm{Id}+C)^{-1}\right).$$
3. Vérifier que l'on a
$$\rho\left(B(\mathrm{Id}+B)^{-1}\right) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{Id} + B \text{ est définie positive.}$$
En déduire que la méthode itérative (0.1) converge dès que les matrices $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont définies positives.

Exercice 4: Implémentation sur Python (4 points).
On considère l'implémentation de la méthode itérative introduite à l'exercice 3. Pour cela, on supposera que les matrices D, H et V sont données et telles que la méthode converge (i.e. telles que $\frac{1}{2}D + H$ et $\frac{1}{2}D + V$ sont symétriques définies positives).

1. Justifier pourquoi la résolution par la méthode de Cholesky des deux systèmes linéaires dans (0.1) est judicieuse.
2. Supposons dans un premier temps que l'on dispose des deux fonctions suivantes :
   — Une fonction `Cholesky(A)` qui retourne la matrice B triangulaire inférieure telle que $A = BB^T$.
   — Une fonction `resoudreAvecCholesky` telle que l'instruction
   `resoudreAvecCholesky(B,c)`
   retourne un array avec la solution x du système $BB^Tx = c$ pour une matrice inversible et triangulaire inférieure B et un vecteur c donné.

En utilisant ces deux fonctions, écrire une fonction

`resolutionIterative(D,H,V,x0,eps)`

qui retourne une approximation x_k de la solution x par le schéma itératif (0.1). Les itérations se poursuivent tant que la norme euclidienne du résidu $Ax_k - b$ est plus grande que la tolérance `eps`.

3. Écrire les fonctions `Cholesky(A)` et `resoudreAvecCholesky(B,c)`.