EXERCICE 1 (Résolution d'une modification de rang un d'un système linéaire)

1 _ Posons $X = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$. Il suffit de vérifier que

$$(A+uv^T)\,X = X\,(A+uv^T) = I_n.$$

On a

$$(A+uv^T)X = AA^{-1} - \frac{AA^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} + uv^TA^{-1} - \frac{uv^TA^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$= I_n - \frac{uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} + uv^TA^{-1} - \frac{(v^TA^{-1}u)\,uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$$

$$= I_n - \frac{(1+v^TA^{-1}u)\,uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u} + uv^TA^{-1} = I_n$$

De même pour $X\,(A+uv^T)$.

2 _ La factorisation LU de A étant connue, on sait facilement calculer (i.e. en résolvant deux systèmes triangulaires) les vecteurs $A^{-1}b$ et $A^{-1}u$ apparaissant dans $(A+uv^T)^{-1}b = A^{-1}b - \dfrac{A^{-1}uv^TA^{-1}b}{1+v^TA^{-1}u}$. On peut alors :

1 _ Calculer $A^{-1}b$ pour un coût de l'ordre de $2n^2$ opérations.

2 _ Calculer $A^{-1}u$ " " " " " " "

3 _ Calculer le scalaire $v^T(A^{-1}u)$ pour un coût de n multiplications et $n-1$ additions, soit de l'ordre de $2n$ opérations.

4 _ Calculer le scalaire $v^T(A^{-1}b)$ pour un coût de l'ordre de $2n$ opérations.

5 _ Calculer le vecteur $\dfrac{v^T(A^{-1}b)}{1+v^T(A^{-1}u)}\,A^{-1}u$ pour un coût d'une addition, une division et n multiplications, soit de l'ordre de n opérations

6 _ Calculer $A^{-1}b - \dfrac{v^T(A^{-1}b)}{1+v^T(A^{-1}u)}\,A^{-1}u$ pour un coût de n soustractions

Au total, l'ordre du nombre d'opérations nécessaires est $4n^2$.

EXERCICE 2 (Etude d'une méthode itérative)

1- Supposons que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode est convergente, de limite $l \in \mathbb{R}^n$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve :

$$l = (I_n - \alpha D^{-1} A)\, l + \alpha D^{-1} b$$
$$\iff 0 = -\alpha D^{-1} A l + \alpha D^{-1} b$$
$$\iff \alpha A l = \alpha b$$

d'où $A l = b$, α étant non nul. l est donc solution de $Ax = b$ et la méthode itérative est consistante.

Pour $\alpha = 1$, on peut écrire la relation de récurrence sous la forme
$$D x^{(k+1)} = (D-A)\, x^{(k)} + b$$
$$= (E+F)\, x^{(k)} + b$$
où E et F sont les matrices de la décomposition $A = D-E-F$ donnée dans le cours. On retrouve la méthode de Jacobi.

2- Posons $B = I_n - \alpha D^{-1} A$ la matrice d'itération de la méthode. On a :
$$b_{ij} = \begin{cases} 1-\alpha & \text{si } i=j, \\ -\alpha \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3- On a, d'après la caractérisation de la norme subordonnée $\|\cdot\|_\infty$,
$$\|B\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left(\frac{\alpha}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + 1-\alpha \right) < \alpha + 1 - \alpha = 1$$
puisque $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$, $\alpha > 0$ et $1-\alpha \geq 0$

4- On sait que la méthode est convergente ssi $\rho(B) < 1$ et on sait par ailleurs que, pour toute norme matricielle $\|\ \|$, le rayon spectral $\rho(B)$ est majoré par $\|B\|$. On déduit donc du résultat de la question précédente que $\rho(B) < 1$.

EXERCICE 3 (calcul de valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique)

1- Soit λ une valeur propre de A et v un vecteur propre associé. On a $Av = \lambda v$ d'où $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$, soit encore $\overline{A}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$. A étant réelle, on a encore $A\overline{v} = \overline{\lambda}\,\overline{v}$

Il vient que $v^T A \overline{v} = v^T \overline{\lambda}\,\overline{v} = \overline{\lambda}\, v^T \overline{v} = \overline{\lambda}\, \|v\|_2^2$

D'autre part, A étant symétrique, $v^T A \overline{v} = (Av)^T \overline{v} = \lambda v^T \overline{v} = \lambda \|v\|_2^2$

v étant non nul, on a établi que $\lambda = \overline{\lambda}$.

2- On a

$$T - \lambda I_n = \begin{pmatrix} \alpha_1-\lambda & \beta_1 & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2-\lambda & \beta_2 & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & \beta_{n-1} & \alpha_n-\lambda \end{pmatrix}$$

et le mineur principal d'ordre k de $T-\lambda I_n$ est le déterminant de la matrice d'ordre k, extraite de $T-\lambda I_n$,

$$C_k = \begin{pmatrix} \alpha_1-\lambda & \beta_1 & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{k-1} \\ 0 & & \beta_{k-1} & \alpha_k-\lambda \end{pmatrix}$$

Pour $k=1$, la matrice C_1 est réduite au scalaire $\alpha_1-\lambda$.

Pour $2 \leq k \leq n$, il suffit de développer par rapport à la dernière ligne :

$$|C_k| = (-1)^{2k-1}\beta_{k-1} \begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda & \beta_1 & & 0 & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \beta_{k-3} & \vdots \\ 0 & & & \alpha_{k-2}-\lambda & 0 \\ & & & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2k}(\alpha_k-\lambda)\,|C_{k-1}|$$

$$= (-1)^{4k-3}\beta_{k-1}^2\,|C_{k-2}| + (-1)^{2k}(\alpha_k-\lambda)|C_{k-1}|$$

$$= -\beta_{k-1}^2\, p^{(k-2)}(\lambda) + (\alpha_k-\lambda)\, p^{(k-1)}(\lambda)$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

3- L'évaluation de $p^{(1)}(\lambda)$ nécessite une soustraction.

L'évaluation de $p^{(k)}(\lambda)$ connaissant $p^{(k-1)}(\lambda)$ et $p^{(k-2)}(\lambda)$ nécessite 2 soustractions et 3 multiplications. Le polynôme caractéristique de T au point λ étant égal à $p^{(n)}(\lambda)$ d'après la question précédente, on a besoin de $3(n-1)$ multiplications et $2(n-1)+1 = 2n-1$ soustractions au total pour son évaluation.

4 – Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et λ une racine de $p^{(k)}$.
D'après la relation de récurrence donnée dans l'énoncé, on a

$$p^{(k+1)}(\lambda) = (\alpha_{k+1} - \lambda)\, p^{(k)}(\lambda) - \beta_{k+1}^2\, p^{(k-1)}(\lambda)$$
$$= -\beta_{k+1}^2\, p^{(k-1)}(\lambda) \quad \text{avec } \beta_{k+1} \neq 0.$$

Par conséquent, ou bien $p^{(k+1)}(\lambda)\, p^{(k-1)}(\lambda) < 0$, ou bien $p^{(k-1)}(\lambda) = 0$. Dans ce dernier cas, $p^{(k-1)}(\lambda) = p^{(k+1)}(\lambda) = 0$ et on en déduit que $p^{(i)}(\lambda) = 0 \ \forall i \in \{0, \dots, n\}$. Ceci est absurde puisque $p^{(0)} \equiv 1$.

5 – Pour $k=1$, $p^{(1)}(\lambda) = \alpha_1 - \lambda$ admet α_1 pour unique racine. On a par ailleurs $p^{(2)}(\alpha_1) = -\beta_1^2\, p^{(0)}(\alpha_1) = -\beta_1^2 < 0$
Or, le monôme de plus haut degré de $p^{(2)}(\lambda)$ est λ^2 d'où $\lim_{|\lambda| \to +\infty} p^{(2)}(\lambda) = +\infty$. La fonction $\lambda \mapsto p^{(2)}(\lambda)$ étant polynomiale on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que $p^{(2)}$ possède deux racines, l'une strictement inférieure à α_1 l'autre strictement supérieure à α_1.
Pour $2 \leq k \leq n-1$, on note $\lambda_1^{(k)} < \lambda_2^{(k)} < \dots < \lambda_k^{(k)}$ les racines de $p^{(k)}$. D'après la propriété (1), $\forall i \in \{1, \dots, k\}$,

$$p^{(k-1)}(\lambda_i^{(k)})\, p^{(k+1)}(\lambda_i^{(k)}) < 0.$$

En utilisant alors l'hypothèse de récurrence, qui veut que $p^{(k-1)}(\lambda)$ change de signe entre $\lambda_{i-1}^{(k)}$ et $\lambda_i^{(k)}$, $i \in \{2, \dots, k-1\}$, $p^{(k+1)}(\lambda)$ doit aussi changer de signe entre $\lambda_{i-1}^{(k)}$ et $\lambda_i^{(k)}$ et possède par conséquent une racine entre chaque paire de racines adjacentes de $p^{(k)}$, soit $k-1$. De plus

$$\lim_{\lambda \to -\infty} p^{(k+1)}(\lambda) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} p^{(k+1)}(\lambda) = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ est impair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Ainsi, $p^{(k-1)}(\lambda_1^{(k)}) > 0$ d'où $p^{(k+1)}(\lambda_1^{(k)}) < 0$ et $p^{(k+1)}$ admet par conséquent une racine à gauche de $\lambda_1^{(k)}$.

De même, $p^{(k-1)}(\lambda_k^{(k)}) > 0$ (resp. < 0) si k est impair (resp. k est pair), d'où $p^{(k+1)}(\lambda_k^{(k)}) < 0$ (resp. > 0) et $p^{(k+1)}$ admet par conséquent une racine à droite de $\lambda_k^{(k)}$.

6 _ On a démontré que les racines des polynômes $\{p^{(k)}\}_{k=1,..,n}$ était distinctes. Le polynôme $p^{(n)}$ étant le polynôme caractéristique de T, ses racines sont les valeurs propres de T et sont donc distinctes.

7 _ A chaque étape k de la méthode de dichotomie, on évalue le nombre de changements de signe de la suite $S_{c^{(k)}}$, noté $s^{(k)}$, avec $c^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$ le milieu de l'intervalle courant $[a^{(k)}, b^{(k)}]$. Si $s^{(k)} - i \geq 0$, on pose $a^{(k+1)} = a^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = c^{(k)}$, sinon on pose $a^{(k+1)} = c^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = b^{(k)}$.

8 _ Par définition du rayon spectral $\rho(T)$, on sait que l'ensemble du spectre de T est contenu dans l'intervalle $[-\rho(T), \rho(T)]$ et, par la majoration $\rho(T) \leq \|T\|_\infty$, le spectre est bien contenu dans l'intervalle $[-\|T\|_\infty, \|T\|_\infty]$.

Par caractérisation de la norme subordonnée $\|\cdot\|_\infty$, on a

$$b^{(0)} = -a^{(0)} = \max\{|\alpha_1| + |\beta_1|, |\alpha_i| + |\beta_i| + |\beta_{i-1}|, i = 2,..,n-1, |\alpha_n| + |\beta_{n-1}|\}$$

9 _ D'après le cours, l'erreur sur la valeur de λ_i après k étapes est majorée par $\frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^{k+1}} = \frac{\|T\|_\infty}{2^k}$.