Matrices monotones :

A positive ($A \geq 0$) ssi $a_{ij} \geq 0$.

A monotone ssi A inversible et $A^{-1} \geq 0$.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mtq $A \geq 0 \iff (\forall x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0)$:

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \geq 0$. Le vecteur $v = Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)_{1 \leq i \leq n}$ a tous ses coefs positifs car a_{ij} et $v_j \geq 0$ $\forall i, j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On a $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \Rightarrow Ax \geq 0$.

Montrons qu'alors $A \geq 0$:

Les vecteurs de la base canonique e_j ($1 \leq j \leq n$) sont $e_j \geq 0$.
Alors $Ae_j \geq 0$. Mais comme Ae_j est égal à la j-ème colonne de A, alors $a_{ij} \geq 0$ $\forall 1 \leq i \leq n$.
Ceci étant valable $\forall j$, on en déduit que $A \geq 0$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mtq A monotone $\iff \forall x \in \mathbb{R}^n$, si $Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$:

$\boxed{\Rightarrow}$ On sait que A est monotone, ie ~~#~~, A inversible et $A^{-1} \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $Ax \geq 0$.
On écrit $v = Ax \geq 0$. Comme $v \geq 0$, et que $A^{-1} \geq 0$, par 1) on en déduit que $A^{-1}v \geq 0$. Or $A^{-1}v = x$ donc $\boxed{x \geq 0}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Il faut mtq que A^{-1} existe bien et que $A^{-1} \geq 0$.

- A inversible : Supposons $x \neq 0 \in \operatorname{Ker}(A)$. Alors $Ax = 0 \Rightarrow Ax \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
De plus $-x \in \operatorname{Ker}(A)$. Alors $A(-x) = 0 \Rightarrow A(-x) \geq 0 \Rightarrow -x \geq 0$ $\Big\} \Rightarrow x = 0$

- $A^{-1} \geq 0$: Soit $x \geq 0$. On veut prouver que $A^{-1}x \geq 0$.

On pose $v = A^{-1}x$. Alors $x = Av \geq 0$. Alors, par hypothèse sur A, on aura $v \geq 0$ càd que $A^{-1}x \geq 0$. Par 1), $\boxed{A^{-1} \geq 0}$.

3) Soient $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que la matrice M est monotone :

$$M = \begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & & 0 \\ -1 & 2+c_2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 \\ & & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

Pour le prouver, on va utiliser la caractérisation 2).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $Mx \geqslant 0$. Alors

$$\begin{cases} (1) & (2+c_1)x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ (2) & -x_{j-1} + (2+c_j)x_j - x_{j+1} \geqslant 0 \quad \text{pour } 2 \leqslant j \leqslant n-1 \\ (3) & -x_{n-1} + (2+c_n)x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

* Prouvons tout d'abord par récurrence que $x_j \geqslant \dfrac{x_{j+1}}{\gamma_j}$ avec $\gamma_j > 1$ et pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

- Par (1), on a $x_1 \geqslant \dfrac{x_2}{2+c_1}$ donc en posant $\gamma_1 = 2+c_1$ on a bien $x_1 \geqslant x_2/\gamma_1$ avec $\gamma_1 > 1$.
- Supposons que l'on ait pour $1 \leqslant p \leqslant j-1$, $x_p \geqslant \dfrac{x_{p+1}}{\gamma_p}$, $\gamma_p > 1$.

Par (2), on a donc

$$0 \leqslant -x_{j-1} + (2+c_j)x_j - x_{j+1} \underset{\uparrow}{\leqslant} \left(2+c_j - \frac{1}{\gamma_{j-1}}\right)x_j - x_{j+1}$$

Hypothèse de récurrence pour $p = j-1$

Donc $x_j \geqslant \dfrac{x_{j+1}}{2+c_j - \frac{1}{\gamma_{j-1}}} = \dfrac{x_{j+1}}{\gamma_j}$ et $\gamma_j = 2+c_j - \dfrac{1}{\gamma_{j-1}} > 1$.

* Par conséquent, on a prouvé que $x_{n-1} \geqslant \dfrac{x_n}{\gamma_{n-1}}$ avec $\gamma_{n-1} > 1$.

Or, par (3), on a aussi $x_{n-1} \leqslant (2+c_n)x_n$. En soustrayant ces deux inégalités, on obtient $x_n\left(2+c_n - \dfrac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \geqslant 0$

d'où $\boxed{x_n \geqslant 0}$ vu que $2+c_n - \dfrac{1}{\gamma_{n-1}} > 1 \geqslant 0$.

* Comme $x_n \geqslant 0$ et on a prouvé que $x_j \geqslant x_{j+1}/\gamma_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, une récurrence inverse de $j = n-1 \to 1$ donne $\boxed{x_j \geqslant 0 \text{ pour } 1 \leqslant j \leqslant n-1}$

* On a donc prouvé que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Mx \geq 0$, alors $Mx \geq 0$. Par la question 2), ceci est équivalent au fait que M est monotone.

#

Ex. 2 :

1) A et B commutent $\Leftrightarrow AB = BA$

Donc si B est inversible, en multipliant $B^{-1}(AB = BA)B^{-1}$

on trouve $B^{-1}A = AB^{-1} \Leftrightarrow A$ et B^{-1} commutent.

2) $(AB)^T = B^T A^T \underset{\substack{\uparrow \\ A,B \text{ sym}}}{=} BA \underset{\substack{\uparrow \\ A,B \text{ commutent}}}{=} AB$ donc AB est symétrique.

3) Soient $(\lambda_i, v_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ les valeurs propres et vecteurs propres de A. On a $A v_i = \lambda_i v_i$

$$\Leftrightarrow P^{-1} B P v_i = \lambda_i v_i$$

$$\Leftrightarrow B(P v_i) = \lambda_i (P v_i)$$

Donc λ_i est vp de B associée au $\vec{vp}$ $P v_i \in \mathbb{C}^n$.

Par conséquent $\sigma(A) = \sigma(B)$ et $\rho(A) = \rho(B)$.

4) Soit A inversible. On appelle décomposition régulière de A un couple de matrices $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ avec M inversible tel que $\boxed{A = M - N}$. Une méthode itérative basée sur la décompo régulière (M, N) est définie par

$$(*) \begin{cases} M x_{k+1} = N x_k + b, & \forall k \geq 0 \\ x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \end{cases}$$

CNS conv : $(*)$ converge ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Ex. 3 :

Données :

- $A = D + H + V$
- $D = c\,Id$, $c > 0$
- $H = H^T$ et $V = V^T$
- $D + H$ et $D + V$ inv.
- $\left\{\begin{array}{l} (D+H)\,x_{k+\frac{1}{2}} = -V x_k + b \\ (D+V)\,x_{k+1} = -H x_{k+\frac{1}{2}} + b \end{array}\right.$, $\forall k \geq 0$

x_0 donné

1) On trouve tout comptes faits

$$x_{k+1} = (D+V)^{-1} H (D+H)^{-1} V x_k - (D+V)^{-1} \boxed{H(D+H)^{-1} b - b}$$

et $x_k \longrightarrow x$ ssi $\rho\left((D+V)^{-1} H (D+H)^{-1} V\right) < 1$.

2) a) $B := D^{-1}H$ et $C := D^{-1}V$

$$(D+V)^{-1} H (D+H)^{-1} V$$

$$= \left[D(Id + D^{-1}V)\right]^{-1} H \left[D(Id + D^{-1}H)\right]^{-1} V$$

En factorisant par D. $D = c\,Id$ inversible.

$$= (Id + \underbrace{D^{-1}V}_{=C})^{-1} \underbrace{D^{-1}H}_{=B} (Id + \underbrace{D^{-1}H}_{=B})\underbrace{D^{-1}V}_{=C}$$

$$= (Id + C)^{-1} B (Id + B)^{-1} C$$

On fait apparaître $(Id+C)^{-1}(Id+C)$

$$= (Id + C)^{-1} \left[B(Id+B)^{-1} C (Id+C)^{-1}\right] (Id + C)$$

Par conséquent, les matrices $(D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V$ et $B(Id+B)^{-1}C(Id+C)^{-1}$ sont semblables. Par la question 3 de l'exercice 2, on a donc

$$\rho\left((D+V)^{-1} H (D+H)^{-1} V\right) = \rho\left(B(Id+B)^{-1} C (Id+C)^{-1}\right)$$

b) On va prouver que B et $(Id+B)^{-1}$ commuttent et sont symétriques. Par la question 2 de l'exercice 2, cela nous permettra de conclure que $B(Id+B)^{-1}$ est symétrique. Le même raisonnement permet aussi de prouver que

$C(Id+C)^{-1}$ est symétrique.

On a :

- $B = D^{-1}H = \frac{1}{c}H$ et H est symétrique $\Rightarrow$ B est symétrique
- $\left[(Id+B)^{-1}\right]^T = \left[(Id+B)^T\right]^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ est symétrique} : B = B^T}}{=} (Id+B)^{-1} \Rightarrow (Id+B)^{-1}$ est symétrique

Le produit de ces deux matrices commute vu que

$$\begin{aligned} B(Id+B)^{-1} &= (B + Id - Id)(Id+B)^{-1} \\ &= Id - (Id+B)^{-1} \\ &= (Id+B)^{-1}\left[(Id+B) - Id\right] \\ &= (Id+B)^{-1}B \end{aligned}$$

On factorise par $(Id+B)^{-1}[\ldots]$

3) Prouvons $\rho\left(B(Id+B)^{-1}\right) < 1 \iff \frac{1}{2}Id + B$ déf $\oplus$:

$\boxed{\Leftarrow}$ $\frac{1}{2}Id + B$ étant déf $\oplus$, $\forall \lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}Id+B\right)$, $\lambda > 0$.

Soit $\lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}Id+B\right)$ et $v_{x_0} \in \mathbb{R}^n$ son vecteur propre associé. Alors,

$$\left(\frac{1}{2}Id + B\right)v = \lambda v \iff (Id+B)v = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)v$$

$$\iff (Id+B)^{-1}v = \frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}v$$

D'où en multipliant par B, il vient

$$\boxed{B(Id+B)^{-1}v = \frac{1}{\lambda+\frac{1}{2}}Bv = \frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda+\frac{1}{2}}v}$$

$$\left(\frac{1}{2}Id+B\right)v = \lambda v \iff Bv = \left(\lambda-\frac{1}{2}\right)v.$$

Alors $\sigma\left(B(Id+B)^{-1}\right) = \left\{\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda+\frac{1}{2}} : \lambda \in \sigma\left(\frac{1}{2}Id+B\right)\right\}$.

Comme $\lambda > 0$, il vient $\rho\left(B(Id+B)^{-1}\right) < 1$ car

$$\left|\frac{\lambda-\frac{1}{2}}{\lambda+\frac{1}{2}}\right| < 1, \ \forall \lambda > 0.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $B(Id+B)^{-1}$ est symétrique par la question 2b). Elle est donc diagonalisable et ses valeurs et vecteurs propres sont dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. De plus, $\rho(B(Id+B)^{-1})<1$ donc $\forall(\lambda, v)$ vp et $\vec{vp}$ on a $\boxed{|\lambda|<1 \quad \forall \lambda \in \sigma(B(Id+B)^{-1})}$.

$$B(Id+B)^{-1}v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow (B+Id-Id)(Id+B)^{-1}v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow \left[Id-(Id+B)^{-1}\right]v = \lambda v$$

$$\Leftrightarrow (Id+B)^{-1}v = (1-\lambda)v$$

$$\Leftrightarrow (Id+B)v = \frac{1}{1-\lambda}v$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{1}{2}Id+B\right)v} = \left(\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{2}\right)v = \boxed{\frac{\lambda+1}{2(1-\lambda)}v}$$

D'où $\sigma\left(\frac{1}{2}Id+B\right) = \left\{\frac{\lambda+1}{2(1-\lambda)} : \lambda\in\sigma(B(Id+B)^{-1})\right\}$.

Comme $\rho(B(Id+B)^{-1})<1$, alors $|\lambda|<1$ ce qui implique que $\frac{\lambda+1}{2(1-\lambda)}>0 \quad \forall\lambda\in\sigma(B(Id+B)^{-1})$.

Par conséquent, $\frac{1}{2}Id+B$ est définie positive.

Convergence de la méthode itérative :

- Si $\frac{1}{2}D+H$ est définie positive, comme $\frac{1}{2}D+H = c\left(\frac{1}{2}Id+B\right)$ et que $c>0$, on aura que $\frac{1}{2}Id+B$ est définie positive. Par l'équivalence que l'on vient de prouver, cela entraîne que $\rho(B(Id+B)^{-1})<1$.
- Comme l'équivalence est vraie aussi en remplaçant B par C, on aura de la même façon que $\frac{1}{2}D+V \Rightarrow$

$\rho\left(C(Id+C)^{-1}\right) < 1$

Par 2b), on aura alors que

$$\rho\left((D+V)^{-1}H(D+H)^{-1}V\right) < 1$$

ce qui, par 1), implique que la méthode est convergente.