EXERCICE 1 (UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE DE NEWTON-RAPHSON)

1 – En soustrayant x_0 dans chaque membre de la relation de récurrence définissant la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient

$$x^{(k+1)} - x_0 = x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)})}{f'(z)} = x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)}) - f(x_0) + f(x_0)}{f'(z)}$$

$$= x^{(k)} - x_0 - \frac{f(x^{(k)}) - f(x_0)}{f'(z)} - \frac{f(x_0)}{f'(z)}$$

Raisonnons par récurrence

Par définition de I_δ, on a $x^{(0)} = x_0 \in I_\delta$.

Supposons à présent que $x^{(k)} \in I_\delta$, pour $k\in\mathbb{N}$. La fonction f étant de classe C^1, il existe $\eta^{(k)}$ vérifiant $|x^{(k)} - \eta^{(k)}| \leq |x^{(k)} - x_0|$ tel que $f(x^{(k)}) = f(x_0) + (x^{(k)} - x_0) f'(\eta^{(k)})$. Il vient alors

$$x^{(k+1)} - x_0 = x^{(k)} - x_0 - \frac{f'(\eta^{(k)})(x^{(k)} - x_0)}{f'(z)} - \frac{f(x_0)}{f'(z)}$$

$$= (x^{(k)} - x_0)\left(1 - \frac{f'(\eta^{(k)})}{f'(z)}\right) - \frac{f(x_0)}{f'(z)}$$

$$= (x^{(k)} - x_0)\,\frac{f'(z) - f'(\eta^{(k)})}{f'(z)} - \frac{f(x_0)}{f'(z)}$$

x_0 et z appartiennent à I_δ donc $\eta^{(k)}$ aussi. On a alors

$$|x^{(k+1)} - x_0| \leq |x^{(k)} - x_0| \left|\frac{f'(z) - f'(\eta^{(k)})}{f'(z)}\right| + \left|\frac{f(x_0)}{f'(z)}\right|$$

(d'après (iii), (iv) et (ii))

$$\leq |x^{(k)} - x_0| \frac{K}{2}\frac{1}{K} + \frac{\delta K}{2}\frac{1}{K} = \frac{1}{2}|x^{(k)} - x_0| + \frac{\delta}{2}$$

$|x^{(k)} - x_0| \leq \delta$ par hypothèse de récurrence et donc

$$|x^{(k+1)} - x_0| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \text{ d'où } x^{(k+1)} \in I_\delta.$$

2 – En procédant comme dans la question précédente en remplaçant x_0 par ξ, on trouve, en utilisant que $f(\xi) = 0$,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ x^{(k+1)} - \xi = (x^{(k)} - \xi)\,\frac{f'(z) - f'(\gamma^{(k)})}{f'(z)}$$

avec $|x^{(k)} - \gamma^{(k)}| < |x^{(k)} - \xi|$.

$\gamma^{(k)} \in I_\delta$, on a donc

$$|x^{(k+1)} - \xi| \leq |x^{(k)} - \xi| \left|\frac{f'(z) - f'(\gamma^{(k)})}{f'(z)}\right| \leq |x^{(k)} - \xi| \frac{K}{2}\frac{1}{K}$$

(d'après (iii) et (iv))

On conclut par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |x^{(k)} - \xi| \leqslant 2^{-k} |x^{(0)} - \xi| \leqslant 2^{-k} \delta$$
puisque $\xi \in I_\delta$ d'après (i).

On a finalement que
$$0 \leqslant \lim_{k \to +\infty} |x^{(k)} - \xi| \leqslant \delta \lim_{k \to +\infty} 2^{-k} = 0.$$

3. D'après la question 2, on a que $\lim_{k \to +\infty} \eta^{(k)} = \xi$ et que
$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|} = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{f'(\eta^{(k)}) - f'(z)}{f'(z)} \right| = \left| \frac{f'(\xi) - f'(z)}{f'(z)} \right| \leqslant \frac{1}{2}$$
La convergence est donc au moins linéaire.

Si $f'(z) = f'(\xi)$, on a $\lim_{k \to +\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \xi|}{|x^{(k)} - \xi|} = 0$ et la convergence est superlinéaire.

EXERCICE 2 (FORMULES DE QUADRATURE AVEC CORRECTIONS AUX EXTRÉMITÉS)

1– La règle du point milieu a un degré d'exactitude égal à 1.

Le degré d'exactitude ne dépendant pas de l'intervalle d'intégration, on se place dans le cas $a=-1$, $b=1$.

On remarque que la formule corrigée coïncide avec la règle du point milieu pour les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$.

Son degré d'exactitude est donc au moins égal à 1.

Pour la fonction $x \mapsto x^2$, on a $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$ et $I_{1,cor}(x \mapsto x^2; -1,1) = \frac{1}{6}(2-(-2)) = \frac{2}{3}$. Le degré d'exactitude est donc au moins égal à 2.

Pour $x \mapsto x^3$, on a $\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$ et $I_{1,cor}(x \mapsto x^3; -1,1) = \frac{1}{6}(3-3) = 0$

Le degré d'exactitude est donc au moins égal à 3.

En revanche, pour $x \mapsto x^4$, on a $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$ et $I_{1,cor}(x \mapsto x^4; -1,1) = \frac{1}{6}(4-(-4)) = \frac{4}{3}$.

Le degré d'exactitude de la formule est donc 3.

2– On veut que la formule soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 5. On obtient donc des conditions sur les coefficients en prenant $f(x) = 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$.

Pour des raisons de symétrie dans la formule, seuls les choix $f(x) = 1, x^2, x^4$ fournissent des conditions utiles.

On a : $\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + 4\gamma = \frac{2}{3} \\ 2\alpha + 8\gamma = \frac{2}{5} \end{cases}$ d'où $\alpha = \frac{7}{15}$, $\beta = \frac{16}{15}$ et $\gamma = -\frac{1}{15}$

3– Partitionnons l'intervalle $[a,b]$ en m sous-intervalles $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots, m$. Les formules de quadrature composées sont données respectivement par $\sum_{j=1}^{m} I_{1,cor}(f; x_{j-1}, x_j)$ et $\sum_{j=1}^{m} I_{2,cor}(f; x_{j-1}, x_j)$, qui font toutes deux intervenir la somme télescopique $\sum_{j=1}^{m} (f'(x_j) - f'(x_{j-1})) = f'(x_m) - f'(x_0) = f'(b) - f'(a)$

EXERCICE 3 (PREMIÈRE RÈGLE DE FEJÉR)

1 - Les polynômes de Lagrange associés aux nœuds x_i, $i=0,\dots,n-1$, sont par définition donnés par

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad i=0,\dots,n-1.$$

Les nœuds étant les racines du polynôme T_n, on peut écrire que $T_n(x) = a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$, où le réel a_n est le coefficient du terme de plus degré de T_n (note : $a_n = 2^n$). On a aussi $T_n'(x) = a_n \sum_{i=0}^{n-1} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x-x_j)$

d'où $T_n'(x_i) = a_n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)$, $i=0,\dots,n-1$.

On a donc bien

$$\frac{T_n(x)}{T_n'(x_i)(x-x_i)} = \frac{a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)}{a_n(x-x_i)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}(x_i-x_j)} = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} = l_i(x) \quad i=0,\dots,n-1.$$

2 - $\forall x \in]-1,1[$, $T_n'(x) = n\dfrac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$. En particulier, $\forall \theta \in]0,\pi[$, $T_n'(\cos(\theta)) = n\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

$$T_n'(x_i) = T_n'(\cos(\theta_i)) = \frac{n\sin(i\pi+\frac{\pi}{2})}{\sin(\theta_i)} = \frac{n(-1)^i\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\theta_i)} = \frac{n(-1)^i}{\sin(\theta_i)}$$

3 - La formule étant interpolatoire, ses poids sont donnés par $\alpha_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)\,dx$ et, d'après les questions 1 et 2, on a

$$\alpha_i = \frac{1}{T_n'(x_i)}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{x-x_i}\,dx = \frac{(-1)^i\sin(\theta_i)}{n}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{x-x_i}\,dx \quad i=0,\dots,n-1$$

On déduit de l'identité que

$$\frac{T_n(x)}{x-x_i} = -\frac{1}{T_{n+1}(x_i)}\left(1+2\sum_{k=1}^{n} T_k(x_i)T_k(x)\right), \quad i=0,\dots,n-1$$

et donc

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)}{x-x_i}\,dx = -\frac{1}{T_{n+1}(x_i)}\left(\int_{-1}^{1}dx + 2\sum_{k=1}^{n} T_k(x_i)\int_{-1}^{1}T_k(x)\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{T_{n+1}(x_i)}\left(1+\sum_{k=1}^{n} T_k(x_i)\int_{-1}^{1}T_k(x)\,dx\right)$$

4 – En posant $y = \arccos(x)$ ($dx = -\sin(y)\,dy$), il vient $\forall k \geq 1$

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos(k \arccos(x))\,dx = \int_0^{\pi} \cos(ky)\sin(y)\,dy$$

1ère possibilité : on effectue deux intégrations par parties successives

$$\int_0^{\pi} \cos(ky)\sin(y)\,dy = \cos(k\pi) + 1 - \int_0^{\pi} k\sin(ky)\cos(y)\,dy$$

$$= \cos(k\pi) + 1 + \int_0^{\pi} k^2 \cos(ky)\sin(y)\,dy$$

d'où $\quad (1-k^2)\int_0^{\pi} \cos(ky)\sin(y)\,dy = 1 + (-1)^k$

Pour k pair, on trouve $\int_0^{\pi} \cos(ky)\sin(y)\,dy = \dfrac{2}{1-k^2}$

Pour k impair avec $k > 1$, on a $1-k^2 \neq 0$ et $(1-k^2)\int_0^{\pi}\cos(ky)\sin(y)\,dy = 0$

et on vérifie que $\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)\,dx = 0$ pour $k = 1$.

2nde possibilité :

$\forall k \in \mathbb{N}, k > 1$

$$\int_0^{\pi} \cos(ky)\sin(y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \sin((k+1)x)\,dx - \int_0^{\pi}\sin((k-1)x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} + \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(0+0) & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k-1}\right) = \frac{2}{1-k^2} & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$$

et on traite le cas $k = 1$ comme précédemment.

5 – $T_{n+1}(x_i) = T_{n+1}(\cos(\theta_i)) = \cos((n+1)\arccos(\cos(\theta_1)))$

$$= \cos((n+1)\theta_i) = \cos\left(i\pi + \frac{\pi}{2} + \theta_i\right)$$

$$= (-1)^i \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right)$$

$$= -(-1)^i \sin(\theta_i)$$

6 – On a, en utilisant les questions 3, 4 et 5,

$$\alpha_i = -\frac{(-1)^i \sin(\theta_i)}{n(-1)^{i+1}\sin(\theta_i)}\, 2\left(1 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} T_{2j}(x_i)\frac{2}{1-(2j)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{T_{2j}(\cos(\theta_i))}{4j^2-1}\right) = \frac{2}{n}\left(1 - 2\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\cos(2j\theta_i)}{4j^2-1}\right)$$

7 – On voit que $\alpha_i > 0$ ssi $\displaystyle\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\cos(2j\theta_i)}{4j^2-1} < \frac{1}{2}$

Or $\displaystyle\left|\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\cos(2j\theta_i)}{4j^2-1}\right| \leq \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{4j^2-1} < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j+1}\right) = \frac{1}{2}$