Proposition de correction Examen du 23/05/2017

Exercice 1 :

1) On trouve $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$

2) $\boxed{\det(A) = \det(L)\det(U) = \det(U) = 8(1-\alpha)}$

Le système $Ax = b$ admet une unique solution ssi $\det(A) \neq 0$

$\iff \boxed{\alpha \neq 1}$.

3) $Ax = b \iff LUx = b$

On pose $y = Ux$ et on résout $Ly = b$ par descente.

On trouve $y = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$.

Ensuite on résoud $Ux = y$ par remontée ce qui donne

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 :

1) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$, $n \geq 0$. Algo Newton est convergent localement d'ordre 2 sous certaines hypothèses de régularité.

Ici $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc $\boxed{x_{n+1} = x_n + \dfrac{2}{\tan\left(\frac{x_n}{2}\right)}}$

2) Avantage : Pas besoin de calculer la dérivée de f. Ceci est intéressant car parfois l'algorithme de Newton doit être appliqué à des fonctions f qui ne sont pas explicitement connues.

Désavantage : L'évaluation de $f(x_n + f(x_n))$ peut être coûteuse (car double évaluation de f).

b) Python.

Exercice 3 :

1) $f(x) = x^2 - a$ convient.

2) $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^2 - a}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)}$, $n \geq 0$.

$\boxed{x_0 > 0 \text{ donné}}$

3) On prouve que $x_n > 0$ $\forall n \geq 0$ par récurrence :

n=0 : $x_0 > 0$ par hypothèse

n>0 : $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > 0$ car $\begin{cases} a > 0 \\ x_n > 0 \text{ par} \\ \text{hypoth. récurrence} \end{cases}$

4) Par la relation trouvée en 2) :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1} - \sqrt{a}} = (x_n - \sqrt{a}) - \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n}$$

$$= (x_n - \sqrt{a})\left(1 - \frac{x_n + \sqrt{a}}{2x_n}\right)$$

$$\boxed{= \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}, \quad \forall n \geq 0}$$

Prouvons par récurrence que $\underbrace{x_n > \sqrt{a}}_{, n \geq 1,}$ si $x_0 \neq \sqrt{a}$:

- $x_1 - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2x_0}(x_0 - \sqrt{a})^2 > 0$ car $\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 \neq \sqrt{a} \end{cases}$

- $n \geq 1$: $x_n - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{a})^2 > 0$ car

$$\begin{cases} x_{n-1} > 0 & \text{(question 3)} \\ x_{n-1} \neq a & \text{(hypothèse de récurrence)} \end{cases}$$

5) • Pour $n \geq 1$, $\boxed{x_{n+1} - x_n} = \dfrac{1}{2}\left(-x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{a - x_n^2}{x_n}\right)}$$

Or on a prouvé en 4) que $x_n > \sqrt{a}$, ie, $a - x_n^2 < 0$ pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent, $x_{n+1} - x_n < 0$ pour tout $n \geq 1$.

• La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante strictement et ~~majorée~~ minorée par $\sqrt{a}$. Elle est donc convergente vers une valeur $0 < x_\infty < \infty$. En prenant la limite $n \to \infty$ dans la relation trouvée dans 2), il vient

$$x_\infty = x_\infty - \frac{x_\infty^2 - a}{2x_\infty} \Longrightarrow x_\infty = \pm\sqrt{a}$$

Comme la suite des x_n est > 0, $x_\infty > 0$ et donc $\boxed{x_\infty = \sqrt{a}}$

6) $a = 2$ et $x_0 = 1$

· Méthode de Newton :

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6} + \frac{8}{6}\right) = \frac{17}{12}$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2 \times 12}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

Dichotomie : L'algorithme est :

$k=0$: $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{3}{2}$

$k \geqslant 1$: $\begin{cases} a_k = a_{k-1} , \; b_k = x_{k-1} & \text{si } f(x_{k-1}) f(a_{k-1}) \leqslant 0 \\ a_k = x_{k-1} , \; b_k = b_{k-1} & \text{sinon} \end{cases}$

On trouve :

$a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $x_0 = \frac{3}{2}$

$a_1 = 1$, $b_1 = \frac{3}{2}$, $x_1 = \frac{1 + 3/2}{2} = \frac{5}{4}$

Exercice 4 :

1) $f(x) = p_m(x) + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)\, dt$.

Dans l'intégrale, $x \geqslant a$ est fixé et $t \in [a, x]$.

Donc $(x-t)^m \geqslant 0$ et donc $(x-t)^m = g_{t,m}(x)$. On a

donc $f(x) = p_m(x) + \frac{1}{m!} \int_a^x \underbrace{(x-t)^m}_{= g_{t,m}(x)} f^{(m+1)}(t)\, dt$.

Comme $g_{t,m}(x) = 0$ pour $t \in [x, b]$, alors on peut étendre le domaine d'intégration jusqu'à $[a,b]$ et

$f(x) = p_m(x) + \frac{1}{m!} \int_a^b g_{t,m}(x) f^{(m+1)}(t)\, dt$.

2) Par linéarité de la fonction erreur,

$$E(f) = E(p_m) + E\left(x \mapsto \frac{1}{m!}\int_a^b g_{t,m}(x) f^{(m+1)}(t)\,dt\right)$$

• $E(p_m) = 0$ car la quadrature est d'ordre m

• $$E\left(x \mapsto \frac{1}{m!}\int_a^b \cdots\right) = \frac{1}{m!}\int_a^b\int_a^b g_{t,m}(x) f^{(m+1)}(t)\,dt\,dx - \frac{b-a}{2}\sum_{j=0}^{n} \omega_j \frac{1}{m!}\int_a^b g_{t,m}(x_j) f^{(m+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{m!}\int_a^b f^{(m+1)}(t)\underbrace{\left(\int_a^b g_{t,m}(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\sum_{j=0}^{n}\omega_j\, g_{t,m}(x_j)\right)}_{=K_m(t)} dt$$

3) $$|E(f)| \leq \frac{1}{m!}\int_a^b \underbrace{|f^{(m+1)}(t)|}_{\leq \max_{a\leq t\leq b}|f^{(m+1)}(t)| = \|f^{(m+1)}\|} |K_m(t)|\,dt \leq \frac{\|f^{(m+1)}\|}{m!}\int_a^b |K_m(t)|\,dt.$$

4) Comme $x = \phi(y)$,

$$K_m(t) = \int_{-1}^{1} g_{t,m}\circ\phi(y)\,d\phi(y) - \frac{b-a}{2}\sum_{j=0}^{n}\omega_j\, g_{t,m}\circ\phi(y_j)$$

$$\underset{d\phi(y) = \frac{b-a}{2}dy}{=} \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^{1}\tilde{g}_{t,m}(y)\,dy - \sum_{j=0}^{n}\omega_j\,\tilde{g}_{t,m}(y_j)\right)$$

5) $$\boxed{\tilde{g}_{\phi(t),m}(y)} = g_{\phi(t),m}(\phi(y))$$

$$= (\phi(y) - \phi(t))_+^m$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}(y-t)\right)_+^m$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^m (y-t)_+^m = \boxed{\left(\frac{b-a}{2}\right)^m g_{t,m}(y)}$$

6) $\cancel{k_\mu(\phi(t))}$

En 4), on a prouvé que $K_\mu(t) = \frac{b-a}{2} k_\mu(t)$.

Donc

$$\boxed{K_\mu(\phi(t))} = \frac{b-a}{2} k_\mu(\phi(t))$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\int_{-1}^{1} \tilde{g}_{\phi(t),\mu}(y)\,dy - \sum_{j=0}^{n} \omega_j \tilde{g}_{\phi(t),\mu}(y_j)\right)$$

$$\boxed{\underset{5)}{=} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\mu+1} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} g_{t,\mu}(y)\,dy - \sum_{j=0}^{n} \omega_j g_{t,\mu}(y_j)\right)}_{= k_\mu(t)}}$$

Par conséquent

$$\int_a^b |K_\mu(x)|\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} |K_m(\phi(t))|\,dt = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+2} \int_{-1}^{1} |k_m(t)|\,dt.$$

7) $$|E(f)| \underset{3)}{\leq} \frac{\|f^{(m+1)}\|}{m!} \int_a^b |K_\mu(t)|\,dt \underset{6)}{=} \frac{\|f^{(m+1)}\|}{m!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\mu+2} \int_{-1}^{1} |k_m(t)|\,dt$$

Donc $|E(f)| \leq \tilde{C}\,(b-a)^{m+2}\,\|f^{(m+1)}\|$

avec $\tilde{C} = \frac{1}{m!}\frac{1}{2^{m+2}} \int_{-1}^{+1} |k_m(t)|\,dt$

8) Par la formule trouvée en 2),

$$\boxed{E(x \mapsto x^{m+1})} = \frac{1}{m!}\int_{-1}^{1} K_m(t)\left(x^{m+1}\right)^{(m+1)}_{x=t}\,dt$$

$$= (m+1)\int_{-1}^{1} K_m(t)\,dt = \boxed{(m+1)\int_{-1}^{1} k_m(t)\,dt}$$

et $K_m(t) = k_m(t)$ pour la quadrature sur $[-1,1]$.

Par ailleurs, un calcul direct de $E(f)$ donne

$$E(f) = \int_{-1}^{1} y^{m+1} dy - \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j^{m+1} \qquad (f(y) = y^{m+1})$$

$$= \frac{\left[y^{m+2}\right]_{y=-1}^{+1}}{m+2} - \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j^{m+1}$$

$$= \frac{1 - (-1)^{m+2}}{m+2} - \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j^{m+1}$$

$$= \frac{1 + (-1)^{m+1}}{m+2} - \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j^{m+1}$$

Comme $\| f^{(m+1)} \| = (m+1)!$ et que $(b-a)^{m+2} = 2^{m+2}$.

On a

$$|E(f)| = \tilde{C} (b-a)^{m+2} \| f^{(m+1)} \| = \tilde{C} \; 2^{m+2} ((m+1)!)$$

avec $\tilde{C} = \dfrac{1}{(m+1)! \; 2^{m+2}} \left| \dfrac{1 + (-1)^{m+1}}{m+2} - \sum_{j=0}^{n} \omega_j y_j^{m+1} \right|$