Éléments de correction de l'examen du 28/05/2018

Exercice 1 :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 13 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

$\downarrow \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$ $\qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix}$

$\downarrow L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2$; $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = U}$

Donc $L^{-1} = E_2 E_1 \iff \boxed{L = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}$

2) $\det A = \det U = 36 \neq 0 \rightarrow A$ inversible.

3) $LUx = b$ donc on résout d'abord $Ly = b$ puis $Ux = y$

On trouve $y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\boxed{x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

4) A est symétrique définie positive (on pourra par exemple utiliser le critère de Sylvester) donc elle admet une décomposition de Cholesky, notée $A = RR^T$ avec R triangulaire inférieure.

Notons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{u_{ii}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors $A = LU = \underbrace{L\Delta}_{R}\underbrace{\Delta^{-1}U}_{R^T}$ et $\boxed{R = L\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$

Exercice II :

1) La CNS est que $p_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, n$.

2) En écrivant $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, la CNS donne lieu au système $p_n(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Va = b} \quad \text{avec } V = (x_i^j)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$b = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

V est la matrice de Vandermonde associées aux points $x_0, \dots, x_n$.

3) cf. Code.

Exercice III :

1). Dév Taylor demandé est

$$f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f(x_n) f'(x_n) + \frac{f^2(x_n)}{2} f''(\xi_n)$$

avec $\xi_n \in]x_n, x_n + f(x_n)[$.

- En l'injectant dans la formule pour x_{n+1}, on trouve

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_{n+1} - x^*}_{e_{n+1}} = \underbrace{x_n - x^*}_{e_n} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} f(x_n)}$$

2) Dév. Taylor-Lagrange de $f(x^*)$ à l'ordre 2 au point x_n :

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)\underbrace{(x^* - x_n)}_{-e_n} + f''(\xi_n^*)\frac{e_n^2}{2} \quad ; \quad \xi_n^* \in]x_n, x^*[$$

$$\Leftrightarrow f(x_n) = f'(x_n)e_n - \frac{1}{2}f''(\xi_n^*)e_n^2.$$

En injectant cette formule au numérateur de l'équation obtenue en 1), on obtient

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f'(x_n)e_n - \frac{1}{2}f''(\xi_n^*)e_n^2}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}f(x_n)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{e_n f(x_n) f''(\xi_n) + f''(\xi_n^*)e_n^2}{f'(x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}f(x_n)}.$$

3) Dév Taylor-Lagrange de $f(x^*)$ à l'ordre 1 au point x_n : $0 = f(x^*) = f(x_n) + \underbrace{(x^* - x_n)}_{-e_n} f'(\xi_n^+)$.

En injectant cette formule au numérateur de l'équation obtenue en 2), on trouve la formule demandée.

4) Par 3), on a

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n^2|} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\xi_n)f'(\xi_n^+) + f''(\xi_n^*)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi_n)f(x_n)}\right|$$

Comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors f, f' et f'' son continues.

Alors, comme $x_n \longrightarrow x^*$, alors ξ_n, ξ_n^* et $\xi_n^+ \longrightarrow x^*$

et $$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(x^*)f'(x^*) + f''(x^*)}{f'(x^*)}\right| = \boxed{\underbrace{\frac{|f''(x^*)|\,|1 + f'(x^*)|}{2|f'(x^*)|}}_{=C}}$$

5) Algorithme de Newton : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

L'avantage de l'algorithme de Steffensen est qu'il ne nécessite pas le calcul de la dérivée sans perdre l'ordre de convergence $\underbrace{\text{}}_{2}$.

C'est bien une variante de l'algorithme car on remplace le calcul de la dérivée par des différences finies, i.e :

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}$$

Exercice ~~IV~~ (Interpolation d'Hermite)

1) Comme $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i,j = 0, \dots, n$, il vient

$$\begin{cases} h_i(x_j) = \delta_{ij}, & h_i'(x_j) = 0 \\ \tilde{h}_i(x_j) = 0 & \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

2) Tout d'abord $p_n \in \mathbb{P}_{2n+1}$ car les $l_i \in \mathbb{P}_n$ et donc, par construction, les h_i et $\tilde{h}_i \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

Pour prouver l'unicité du polynôme p_n tel que

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad p_n'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

on suppose l'existence d'un autre polynôme $g \in \mathbb{P}_{2n+1}$ tel que

$$g(x_i) = f(x_i) \quad \text{et} \quad g'(x_i) = f'(x_i) \quad i = 0, \dots, n.$$

Alors, le polynôme $r := p_n - g \in \mathbb{P}_{2n+1}$ et

$$r(x_i) = r'(x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \dots, n.$$

Donc ~~les~~ x_i sont des zéros de r de multiplicité au moins deux. Donc r est de la forme

$$r(x) = q(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2.$$

Or $\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n+2}$ et $r \in \mathbb{P}_{2n+1}$ donc forcément

$$q(x) = 0.$$

Par conséquent $r = p_n - g = 0$ d'où l'unicité du polynôme d'interpolation.

3) $\bullet\ \phi(x) = f(x) - p_1(x) - (f(x) - p_1(x)) = 0$

$\bullet\ \phi(x_0) = \phi(x_1) = 0$ car $f(x_0) = p_1(x_0)$ et $f(x_1) = p_1(x_1)$

Par ailleurs, $\phi \in \mathcal{C}^4([a,b])$ car $f \in \mathcal{C}^4$ et donc on peut ~~utiliser~~ appliquer le th. de Rolle à ϕ entre $[x_0, x]$ et $[x, x_1]$ pour conclure qu'il existe $\tilde{x}_0 \in]x_0, x[$ et $\tilde{x}_1 \in]x, x_1[$ tq $\boxed{\phi'(\tilde{x}_0) = \phi'(\tilde{x}_1) = 0}$.

4) La dérivée de ϕ vaut

$$\phi'(t) = f'(t) - p_1'(t) - \frac{2(t-x_0)(t-x_1)(2t-x_0-x_1)}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}\,(f(x) - p_1(x))$$

d'où

$$\phi'(x_0) = f'(x_0) - p_1'(x_0) = 0$$

$$\phi'(x_1) = f'(x_1) - p_1'(x_1) = 0$$

par la propriété d'interpolation sur la dérivée de f.

5) Par 3) et 4), on sait que

$$\phi'(x_0) = \phi'(\tilde{x}_0) = \phi'(x_1) = \phi'(\tilde{x}_1) = 0$$

et les 4 points $x_0, \tilde{x}_0, x_1, \tilde{x}_1$ sont distincts.

En appliquant le théorème de Rolle ~~au~~ ϕ' entre $[x_0, \tilde{x}_0]$, $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$, $[\tilde{x}_1, x_1]$ on déduit qu'il existe $\tilde{\tilde{x}}_0$, $\tilde{\tilde{x}}_1$ et $\tilde{\tilde{x}}_2$ tq

$$\phi^{(2)}(\tilde{\tilde{x}}_0) = \phi^{(2)}(\tilde{\tilde{x}}_1) = \phi^{(2)}(\tilde{\tilde{x}}_2) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{x}}_0 \neq \tilde{\tilde{x}}_1 \neq \tilde{\tilde{x}}_2$$

En procédant de façon similaire pour φ'' et puis pour $\phi^{(3)}$, on en déduit qu'il existe bien $\xi \in [a, b]$ tel que $\boxed{\phi^{(4)}(\xi) = 0}$.

6) La dérivée quatrième de ϕ vaut

$$\phi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \underbrace{p_1^{(4)}(t)}_{=0 \text{ car } p_1 \in \mathbb{P}_3} - \frac{24}{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}\left(f(x) - p_1(x)\right)$$

Donc $\phi^{(4)}(\xi) = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) - p_1(x) = \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2}{24} f^{(4)}(\xi).$$

7) De 6), il vient que $\forall x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{\max\limits_{a \leq x \leq b} (x-x_0)^2(x-x_1)^2}{24} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(4)}(\xi)|$$

$$\leq \frac{(b-a)^4}{24} \|f^{(4)}\|_{L^\infty([a,b])}.$$

8) Pour généraliser le résultat, il suffit de considérer

$$\phi(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{\prod\limits_{i=0}^{n} (t-x_i)^2}{\prod\limits_{i=0}^{n} (x-x_i)^2} \left(f(x) - p_n(x)\right)$$

Maintenant, comme $f \in \mathcal{C}^{2n+2} \Rightarrow \phi \in \mathcal{C}^{2n+2}$.

Par ailleurs $\phi(x) = 0$ et $\phi(x_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, n$ par la propriété d'interpolation.

On supposera sans perte de généralité que $x \in [a, x_0]$. Alors en appliquant le th de Rolle à ϕ sur les intervalles $[x, x_0], [x_0, x_1] \dots [x_{n-1}, x_n]$, ou on déduit que

$$\phi'(\tilde{x}_0) = \dots = \phi'(\tilde{x}_n)$$

pour $n+1$ points distincts $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n \in [a,b]$.

Par ailleurs, $\phi'(x_i) = 0$ pour $i = 0, \dots, n$.

En appliquant le th. de Rolle de la même façon à $\phi', \phi^{(2)}, \dots$, puis $\phi^{(2n+2)}$, on en déduit qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tq $\phi^{(2n+2)}(\xi) = 0$.

D'où
$$f(x) - p_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

et $\forall x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leqslant \frac{|\Pi_n(x)|^2}{(2n+2)!} \| f^{(2n+2)} \|_{L^\infty([a,b])}$$

avec $\Pi_n(x) := \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$.

Exercice 2