Proposition de correction du partiel du 20/03/2018

Exercice 1 :

1) $d_1(t) = 2t$ et $d_2(t) = 4t^2 - 1$

2) En développant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne, on obtient $d_n(t) = 2t\, d_{n-1}(t) - d_{n-2}(t)$, $\forall n \geq 3$.

3) • $\boxed{d_1(\cos\theta) = 2\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}}$ (par les formules de duplication).

• $\boxed{d_2(\cos\theta)} = 4\cos^2\theta - 1 = \dfrac{\sin^2(2\theta)}{\sin^2\theta} - 1 = \dfrac{\sin^2(2\theta) - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}\right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta})\right)$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[e^{i\theta}\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right) + e^{-i\theta}\left(e^{-3i\theta} - e^{3i\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\underbrace{\left(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}\right)}_{2i\sin(3\theta)}\underbrace{\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}_{2i\sin\theta}$$

$$= \boxed{\frac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}}$$

• La formule est donc vraie au rang $n=1$ et $n=2$. Pour prouver qu'elle reste vraie pour $n \geq 3$, on procède par récurrence. Au rang n, l'hypothèse de récurrence est que $d_k(\cos\theta) = \dfrac{\sin((k+1)\theta)}{\sin\theta}$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

On a donc pour

$$\boxed{d_n(\cos\theta)} = 2\cos\theta\, d_{n-1}(\cos t) - d_{n-2}(\cos t)$$

$$= \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta}$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour $k = n-2$, $k = n-1$.

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[\sin(2\theta)\sin(n\theta) - \sin\theta\sin((n-1)\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta})(e^{in\theta}-e^{-in\theta}) - (e^{i\theta}-e^{-i\theta})(e^{(n-1)i\theta}-e^{-(n-1)i\theta})\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2\left[e^{i(n+2)\theta}+e^{-i(n+2)\theta}-e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{1}{2i}\right)^2(e^{i\theta}-e^{-i\theta})(e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta})$$

$$= \boxed{\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}}$$

<u>Remarque</u> : Comme $\theta \in]0,\pi[$, alors $\sin\theta \neq 0$ $\forall \theta \in]0,2\pi[$

4) $d_n(\cos\theta) = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0$

Comme $\theta \in]0,\pi[$, alors $\sin\theta \neq 0$

$$\iff \begin{cases} (n+1)\theta = k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{et } 0 < \theta < \pi & \text{(intervalle donné dans l'énoncé)} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\theta = \theta_k = \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n}$$

5) $P_n(\lambda) = d_n(-\lambda/2)$

6) Les valeurs propres de $K_n(0)$ satisfont $f_n(\lambda)=0$

$$\Leftrightarrow d_n\left(-\frac{\lambda}{2}\right)=0.$$

Or d'après la question 4), on sait que d_n s'annule aux points $t_k = \cos\theta_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k=1,\dots,n$.
Ces point sont deux à deux distincts car la fonction cos est strictement décroissante sur $]0,\pi[$.

Par conséquent, $\lambda_k = -2\,t_k = -2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, $k=1,\dots,n$, sont les n valeurs propres de $K_n(0)$ et elles sont bien distinctes.

On a $\lambda_n > \dots > \lambda_1$ et $\lambda_n = -\lambda_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

Par conséquent, le rayon spectral de $K_n(0)$ vaut

$$\boxed{\rho_0 = 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}$$

7) $\lambda_n = \rho_0$ et $\lambda_1 = -\rho_0$ sont valeurs propres de $K_n(0)$.

8) A est symétrique ssi $c_1 = \dots = c_n$. On notera $c_i = c$.

9) a) $D = \frac{c}{\alpha}\,Id$ et $E+F = c\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{J = D^{-1}(E+F) = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\,K_n(0)}$

b) Comme $J_\omega = (1-\omega)\,Id + \omega\,J = (1-\omega)\,Id + \omega\,\alpha\,K_n(0)$, alors λ est valeur propre de $K_n(0) \Rightarrow (1-\omega)+\omega\alpha\lambda$ est valeur propre de J_ω. Réciproquement, si $(1-\omega)+\omega\alpha\lambda$ est vp de J_ω, alors λ est vp de $K_n(0)$.

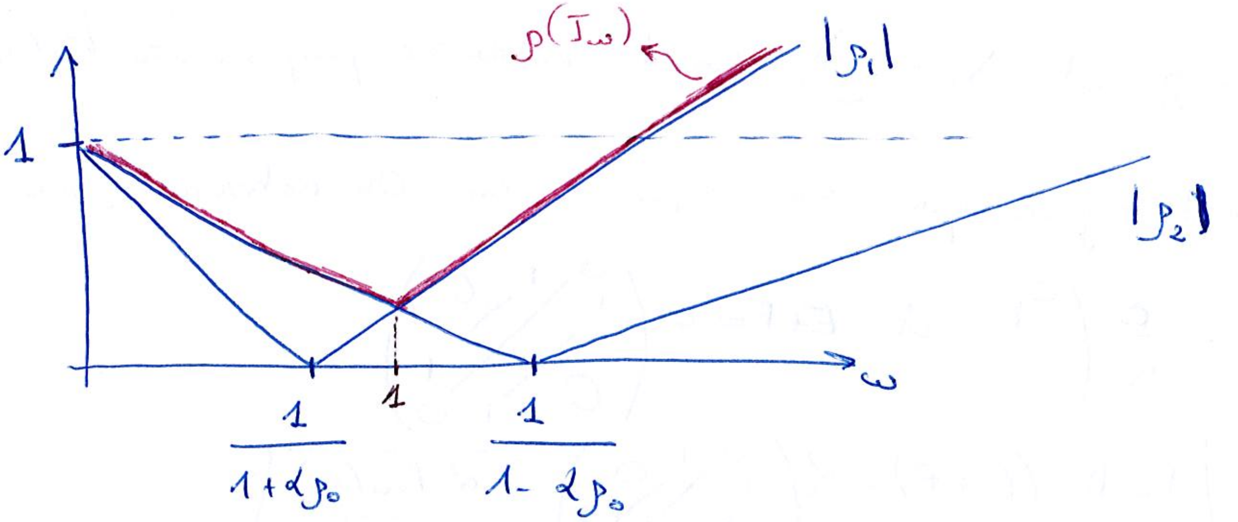
c) Les valeurs propres de J_ω sont de la forme $(1-\omega)+\alpha\omega\lambda$ avec λ vp de $K_n(0)$. La fonction $\lambda \mapsto (1-\omega)+\alpha\omega\lambda$ étant affine, le maximum de $|(1-\omega)+\alpha\omega\lambda|$ est atteint pour $\lambda_1 = -\rho_0$ ou $\lambda_n = \rho_0$. D'où

$$\rho(J_\omega) = \max(|\rho_1|, |\rho_2|).$$

d) Si $\omega<0$, $\rho_1>1$ et donc $\rho(J_\omega)>1$ et la méthode de Jacobi relaxée diverge.

e) Comme $\rho(J)=\alpha\rho_0$, la méthode de Jacobi diverge quand $\alpha\rho_0 \geq 1$. Dans ce cas $\rho_2 \geq 1$ et donc $\rho(J_\omega)\geq 1$ (la méthode de Jacobi relaxée diverge aussi).

f)



g) On voit sur la courbe que $\rho(J_\omega)<1$ pour $0<\omega$ et pour $\omega(1+\alpha\rho_0)-1<1$, soit si

$$0<\omega<\frac{2}{1+\alpha\rho_0}=\frac{2}{1+\rho(J)}$$

9) Il apparaît sur la courbe que le minimum de $\rho(J_\omega)$ est atteint pour $|\rho_1| = |\rho_2|$ soit $\omega = 1$. Dans ce cas, $J_\omega = J$. Il est donc inutile de relaxer la méthode de Jacobi de la façon indiquée ici car $\omega = 1$ est le choix qui donne la plus grande vitesse de convergence.

10) Cf. Notebook.

Exercice 2 :

1) Algorithme :

Soit A diagonalisable avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $v_1, \dots, v_n$.

On choisit $q_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ avec $c_1 \neq 0$.

Pour $k \geq 0$, on construit :

$$\begin{cases} \tilde{q}_{k+1} = A q_k \\ \mu_k = q_k^T \tilde{q}_{k+1} \\ q_{k+1} = \tilde{q}_{k+1} / \|\tilde{q}_{k+1}\|_2 \end{cases}$$

On a $\|q_k - v_n\|_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$

$$|\mu_k - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

2) La méthode approchera la valeur propre plus grande en module de $A - \mu Id$, c'est à dire $\lambda_j - \mu$ avec $|\lambda_j - \mu| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu|$

3) Comme $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, alors, en soustrayant par μ nous avons 3 cas :

i) $\lambda_1 - \mu > \lambda_2 - \mu \geq \dots \geq \lambda_p - \mu \geq 0 \geq \lambda_{p+1} - \mu \geq \dots \geq \lambda_n - \mu$

ii) $0 \geq \lambda_1 - \mu > \lambda_2 - \mu \geq \dots \geq \lambda_n - \mu$

iii) $\lambda_1 - \mu > \lambda_2 - \mu \geq \dots \geq \lambda_n - \mu \geq 0$

Comme, par hypothèse $|\lambda_n - \mu|$ a la plus grande valeur absolue, le cas iii) est exclu et il reste considérer i) et ii). Pour i), la deuxième plus grande valeur absolue est soit $|\lambda_1 - \mu|$, soit $|\lambda_{n-1} - \mu|$. Pour ii), c'est $|\lambda_{n-1} - \mu|$. Donc la deuxième plus grande valeur propre en module de $A - \mu Id$ est

$$\max(|\lambda_1 - \mu|, |\lambda_{n-1} - \mu|).$$

4) La vitesse de convergence pour approcher $\lambda_n - \mu$ est $O\left(\max\left(\frac{|\lambda_1 - \mu|}{|\lambda_n - \mu|}, \frac{|\lambda_{n-1} - \mu|}{|\lambda_n - \mu|}\right)\right)$

Cette quantité atteint son maximum pour $|\lambda_1 - \mu| = |\lambda_{n-1} - \mu|$ soit $\lambda_{n-1} - \mu = \mu - \lambda_1 \iff \mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_{n-1}}{2}$ est la valeur du paramètre pour laquelle la méthode convergera le plus vite.