Examen du 29 Juin 2019

Éléments de correction

Ex. 1 :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} = D - E - F \quad \text{avec} \quad D = 2\,Id.$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} ; \; F = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Matrice d'itération :

$$J = D^{-1}(E+F) = -\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Convergence $\Leftrightarrow \rho(J) < 1$.

Calculons le spectre de J :

$$p_J(\lambda) = \det(J - \lambda Id) = -\lambda^3 + \frac{1}{2}\alpha^2\lambda \Rightarrow \boxed{\sigma(J) = \left\{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha|\right\}}$$

Donc convergence ssi $\frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha| < 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[}$

2) Matrice d'itération :

$$G = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{-\alpha}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\alpha^2}{8} & -\frac{\alpha}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -4\alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 & -4\alpha \\ 0 & -\alpha^3 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\sigma(G) = \left\{0, \frac{\alpha^2}{2}\right\}} \Rightarrow$ Convergence ssi $\boxed{\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[}$

Ex. 2 :

- Soit $f \in \mathbb{P}_3([0,1])$ s'écrivant $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- La formule de quadrature est exacte pour f ssi

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \omega_0 f(0) + \omega_1 f(\xi) + \omega_2 f'(0)$$

$$= \omega_0 d + \omega_1 (a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d) + \omega_2 c.$$

De plus, $\int_0^1 f(x)\,dx = a\int_0^1 x^3\,dx + b\int_0^1 x^2\,dx + c\int_0^1 x\,dx + d$

$$= \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

Donc $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = \omega_0 d + \omega_1 (a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d) + \omega_2 c$

$$\iff a\left(\frac{1}{4} - \omega_1\xi^3\right) + b\left(\frac{1}{3} - \omega_1\xi^2\right) + c\left(\frac{1}{2} - \omega_1\xi - \omega_2\right) + d\left(1 - \omega_0 - \omega_1\right) = 0$$

- Pour que l'égalité soit valable $\forall f \in \mathbb{P}_3([0,1])$, il faut que

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \omega_1\xi^3 = 0 \\ \frac{1}{3} - \omega_1\xi^2 = 0 \\ \frac{1}{2} - \omega_1\xi - \omega_2 = 0 \\ 1 - \omega_0 - \omega_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\xi = 0 \\ \omega_1\xi^2 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} - \omega_1\xi - \omega_2 = 0 \\ \omega_0 = 1 - \omega_1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} \xi = \frac{3}{4} \\ \omega_1 = \frac{1}{3\xi^2} = \frac{16}{27} \\ \omega_2 = \frac{1}{2} - \omega_1\xi = \frac{1}{18} \\ \omega_0 = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27} \end{array}}$$

Ex. 3 :

$\varepsilon \in]0,1[$, $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$ et $a = f(0)$, $b = f(1)$, $M = \sup_{x \in [0,1]} |f'''(x)|$.

1) $P_\varepsilon(x) = f(0)\, \ell_0(x) + f(\varepsilon)\, \ell_\varepsilon(x) + f(1)\, \ell_1(x)$, $\forall x \in [0,1]$

avec ℓ_0, ℓ_ε et ℓ_1 les fonctions de Lagrange relatives aux points $0, \varepsilon, 1$.

$$\ell_0(x) = \frac{(x-\varepsilon)(x-1)}{(0-\varepsilon)(0-1)} = \frac{(x-\varepsilon)(x-1)}{\varepsilon}$$

$$\ell_\varepsilon(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(\varepsilon-0)(\varepsilon-1)} = \frac{x(1-x)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-\varepsilon)}{(1-0)(1-\varepsilon)} = \frac{x(x-\varepsilon)}{1-\varepsilon}$$

Donc, $\boxed{P_\varepsilon(x) = a \cdot \frac{(x-\varepsilon)(x-1)}{\varepsilon} + f(\varepsilon) \cdot \frac{x(1-x)}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + b \cdot \frac{x(x-\varepsilon)}{1-\varepsilon}}$

2) Le théorème sur l'erreur d'interpolation vu en cours affirme que si $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$, alors il existe $\xi \in]0,1[$ tq

$$\boxed{|E_1(x)|} = \frac{|f'''(\xi)|}{3!} |(x-0)(x-\varepsilon)(x-1)|$$

$$\boxed{\leq \frac{M}{6} |x(x-\varepsilon)(x-1)|}$$

3) $P_\varepsilon(x)$ peut se réécrire comme :

$$P_\varepsilon(x) = \underbrace{\left(-\frac{f(\varepsilon)-a}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \frac{b-a}{1-\varepsilon}\right)}_{\downarrow \lim_{\varepsilon\to0^+}} x^2 + \underbrace{\left(\frac{f(\varepsilon)-a}{\varepsilon(1-\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(a-b)\right)}_{\downarrow \lim_{\varepsilon\to0^+}} x + a.$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} P_\varepsilon(x) = \left(-f'(0) + b - a\right)x^2 + f'(0)x + a.$$

On a utilisé le fait que $\lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{f(\varepsilon)-a}{\varepsilon(1-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} = f'(0)$

car f dérivable en 0.

4) $p(x) = (b-a-f'(0))x^2 + f'(0)x + a$ vérifie bien

$p(0)=a$, $p'(0)=f'(0)$ et $p(1)=b$.

Pour prouver l'unicité, supposons qu'il existe un autre polynôme $g \in \mathbb{P}_2([0,1])$ tq $g(0)=a$, $g'(0)=f'(0)$ et $g(1)=b$.

Donc le polynôme $h = p-g \in \mathbb{P}_2([0,1])$ est tel que

$$\begin{cases} h(0)=h(1)=0 \\ h'(0)=0 \end{cases}$$

Donc 0 est une racine double et 1 une racine simple.

On peut donc écrire h sous la forme :

$h(x) = c(x).\,x^2(x-1)$ avec c un polynôme.

Comme $x^2(x-1)$ est un polynôme de degré 3 et h est de degré 2, on en déduit que $c(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$ (car il faut que le terme en x^3 de $x^2(x-1)$ soit nul).

Par conséquent, $h(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$, d'où $p=g$ et on a unicité

5) $E_2(x) = f(x) - p(x)$, $\forall x \in [0,1]$.

• Si $x=0$ ou $x=1$, $p(x)=f(x)$ donc $E_2(x)=0$

• Pour $x \in]0,1[$, on considère

$$\phi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{x^2(x-1)} t^2(t-1) \quad , \forall t \in [0,1].$$

Comme $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$, alors $\phi \in \mathcal{C}^3([0,1])$.

• Comme $\phi(0) = \phi(1) = \phi(x) = 0$ avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$, alors, par le th. Rolle, $\exists\ \xi_1 \in]0,x[$ et $\xi_2 \in]x,1[$ tq

$$\boxed{\phi'(\xi_1) = \phi'(\xi_2) = 0}$$

De plus $\phi'(t) = f'(t) - p'(t) - \frac{f(x)-p(x)}{x^2(x-1)}\left[2t(t-1)+t^2\right]$, $\forall t$

donc $\boxed{\phi'(0) = 0}$ vu que $p'(0) = f'(0)$ par construction.

ϕ' admet donc 3 zéros <u>distincts</u> et $\phi' \in \mathcal{C}^2([0,1])$.

Par le th. de Rolle généralisé, il existe $\xi \in [0,1]$

tq $\boxed{\phi'''(\xi) = 0}$

Comme $\phi'''(t) = f'''(t) - \underbrace{p'''(t)}_{=0 \text{ car } p \in \mathbb{P}_2} - 6 \frac{\overbrace{f(x)-p(x)}^{=E_2(x)}}{x^2(x-1)}$ $\forall t$, alors

$$\phi'''(\xi) = 0 \iff E_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{6} x^2(x-1).$$

D'où, $\boxed{|E_2(x)| \leq \frac{M}{6} x^2(x-1)}$

Ex. 4 :

1) • $\phi \in \mathcal{C}^3$ et $\phi(x^*) = x^*$, $\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0$.

• $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n \geq 0$.

a) Comme $\phi'(x^*) = 0$, la continuité de ϕ' en 0 entraine que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \alpha(\varepsilon) > 0$ tq si $|y - x^*| \leq \alpha(\varepsilon)$, alors $|\phi'(y)| \leq \varepsilon$. On obtient donc le résultat en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $a = \alpha(\frac{1}{2})$.

b) • $\underline{n = 0}$: $|x_0 - x^*| \leq a / 2^0 = a$ par hypothèse donc ok.

• $\underline{n \geq 1}$: On suppose $|x_{n-1} - x^*| \leq a / 2^{n-1}$.

Comme $x_n - x^* = \phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)$
$= \phi'(c)(x_{n-1} - x^*)$

Th. Accroissements finis à ϕ sur l'intervalle $[x_{n-1}, x^*]$.
$\exists\, c \in]x_{n-1}, x^*[$ tq ...

Comme $c \in]x_{n-1}, x^*[$, alors $|c - x^*| \leq \frac{a}{2^{n-1}} \leq a$ et donc $|\phi'(c)| \leq \frac{1}{2}$ par a).

Il vient : $\boxed{|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - x^*| \leq \frac{a}{2^n}}$

c) On vient de montrer que si $x_0 \in [x^* - a, x^* + a]$, alors $|x_n - x^*| \leq \frac{a}{2^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui montre la conv. locale.

d) Comme $x_n \in [x^* - a, x^* + a]$, par Taylor-Lagrange, il existe $c_n \in [x^* - a, x^* + a]$ tq

$$\underbrace{\phi(x_n)}_{x_{n+1}} = \underbrace{\phi(x^*)}_{= x^*} + (x_n - x^*)\underbrace{\phi'(x^*)}_{= 0} + \frac{1}{2}(x_n - x^*)\underbrace{\phi''(x^*)}_{= 0} + \frac{1}{6}(x_n - x^*)\phi'''(c_n)$$

Donc $|x_{n+1} - x^*| \leqslant \underbrace{\frac{1}{6} \sup_{x \in [x^*+\alpha, x^*-\alpha]} |\phi'''(x)|}_{= \beta} \cdot |x_n - x^*|^3$

2) $f \in \mathcal{C}^3$ et $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.

On pose $\phi(x) = x + f(x)\, h(x)$ avec $h \in \mathcal{C}^3$.

a) • $f(x^*) = 0 \Rightarrow \phi(x^*) = x^* + \underbrace{f(x^*)}_{0}\, h(x^*) = x^*$

Donc x^* PF de ϕ.

• $\phi(x^*) = x^* \Rightarrow \cancel{x^*} = \cancel{x^*} + f(x^*)\, h(x^*)$

$\Rightarrow f(x^*) = 0$ car $h(x^*) \neq 0$.

b) On cherche à construire ϕ de sorte que $\phi(x^*) = x^*$ et $\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0$.

Comme $\phi(x) = x + f(x)\, h(x)$

$\Rightarrow \phi'(x) = 1 + f'(x)\, h(x) + f(x)\, h'(x)$

$\Rightarrow \phi''(x) = f''(x)\, h(x) + 2 f'(x)\, h'(x) + f(x)\, h''(x)$

En imposant que $\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = 0$, on en déduit que

$$\begin{cases} 1 + f'(x^*)\, h(x^*) = 0 \\ f''(x^*)\, h(x^*) + 2 f'(x^*)\, h'(x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\underset{f'(x^*) \neq 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{aligned} h(x^*) &= -\frac{1}{f'(x^*)} \\ h'(x^*) &= \frac{f''(x^*)}{2\,[f'(x^*)]^2} \end{aligned}}$$

3) Si $f'(x)$ ne s'annule pas, on peut définir

$$h(x) = -\frac{1}{f'(x)} - \frac{f''(x)[f(x)]^2}{2[f'(x)]^3}$$

qui est telle que

$$h(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)} \quad \text{et} \quad h'(x^*) = \frac{f''(x^*)}{2[f'(x^*)]^2}$$

Les conditions des questions 1 et 2 sont donc satisfaites et la suite construite (NC) converge localement avec une vitesse cubique.