Proposition de correction du partiel du 19 Mars 2019

Exercice 1 :

1) $\det A = 9/4 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible.

2) La matrice d'itération pour la méthode de Jacobi est $B = M^{-1}N = D^{-1}(E+F)$. Elle est bien définie car D est inversible.

On trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

La méthode conv ssi $\rho(B) < 1$.

En calculant les valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique, on trouve

$$p(B) = \det(B - \lambda \, Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + 5/4)$$

$$\Rightarrow \sigma(B) = \left\{ \pm i \frac{\sqrt{5}}{2} \, ; 0 \right\}$$

Donc $\rho(B) = \max_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda| = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$ La méthode diverge.

3) $B = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$\sigma(B) = \left\{ 0 , -\frac{1}{2} \right\}$ et $\rho(B) = \frac{1}{2} < 1$ donc la méthode converge.

Exercice 2 : Méthode LR

1) Soit A inversible, de taille n.

Supposons que pour un indice k $(1 \leq k \leq n-1)$, il existe Δ_k non inversible. Alors il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ t.q. $\underset{\in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})}{\Delta_k} \tilde{x} = 0$. Soit maintenant le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors $Ax = \begin{pmatrix} \Delta_k \tilde{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ donc

$x \in \mathrm{Ker}(A)$. Ceci est absurde car A inversible donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. Donc toutes les sous-matrices diagonales Δ_k de A sont inversibles $\forall 1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow A$ admet factorisation LU.

2) P et P^{-1} étant inversibles, elles admettent décompo LU.

3) $\underline{k=1}$: $A_1 = A$ inversible $\Rightarrow$ Admet $LU \Rightarrow \exists L_1, U_1$ tq $A_1 = L_1 U_1$
$\mathrm{Det}\, A_1 = \mathrm{Det}\, U_1 \neq 0$.

$\underline{k>1}$: $A_k = U_{k-1} L_{k-1}$

$\det A_k = \det U_{k-1} \neq 0$ car $A_{k-1} = L_{k-1} U_{k-1}$ par Hypoth. récurr.
$\det A_{k-1} = \det U_{k-1} \neq 0$

Donc A_k inversible $\Rightarrow$ Admet LU
$\Rightarrow \exists L_k, U_k$ tq $A_k = L_k U_k$
avec $\det A_k = \det U_k \neq 0$.

4) • $A_{k+1} = U_k L_k$ et $U_k = L_k^{-1} A_k$ donc $\boxed{A_{k+1} = L_k^{-1} A_k L_k}$

• Donc pour $k \geq 1$: $\boxed{A_{k+1}} = L_k^{-1} A_k L_k$
$= L_k^{-1} L_{k-1}^{-1} A_{k-1} L_{k-1} L_k$
$= \dots = \boxed{\underbrace{L_k^{-1} \cdots L_1^{-1}}_{= \mathcal{L}_k^{-1}} A \underbrace{L_1 \cdots L_k}_{= \mathcal{L}_k}}$

5) a) Soit $\lambda \in \sigma(Q_1)$ et $v \neq 0$ son vecteur propre associé. Alors $Q_1 v = \lambda v$. Comme Q_1 et Q_2 sont semblables, alors il existe W inv t.q. $Q_1 = W Q_2 W^{-1}$.

Donc $\begin{cases} Q_1 v = W Q_2 W^{-1} v \\ Q_1 v = \lambda v \end{cases} \Rightarrow W Q_2 W^{-1} v = \lambda v$

Donc $Q_2 (W^{-1} v) = \lambda (W^{-1} v)$ donc $\lambda \in \sigma(Q_2)$ et sa valeur propre associée est $W^{-1} v$. Ce vecteur est bien non nul car $v \neq 0$ et $\ker(W^{-1}) = \{0\}$.

b) Par 4), $A_{k+1} = \mathcal{L}_k^{-1} A \mathcal{L}_k$ $\forall k \geq 1$, donc A_{k+1} et A sont semblables. Il découle de 5a) que A_{k+1} et A ont le même spectre $\forall k \geq 1$. Le cas $A_1 = A$ est trivial car A est semblable à elle-même (prendre $W = Id$).

6) $\underline{k=1}$: $A^1 = A = L_1 U_1 = \mathcal{L}_1 \mathcal{U}_1$.

$\underline{k>1}$: • $\underline{\text{H.R}}$: $A^p = \mathcal{L}_p \mathcal{U}_p$ pour $1 \leq p \leq k-1$.

• On a
$$\boxed{\mathcal{L}_k \mathcal{U}_k} = \mathcal{L}_{k-1} \underbrace{L_k U_k} \mathcal{U}_{k-1}$$
$$= \mathcal{L}_{k-1} A_k \mathcal{U}_{k-1}$$
$$\underset{1)}{=} \mathcal{L}_{k-1} (\mathcal{L}_{k-1}^{-1} A \mathcal{L}_{k-1}) \mathcal{U}_{k-1}$$
$$= A \mathcal{L}_{k-1} \mathcal{U}_{k-1} \underset{\uparrow}{=} \boxed{A^k}$$

$\underline{\text{HR}}$: $\mathcal{L}_{k-1} \mathcal{U}_{k-1} = A^{k-1}$

7). On note $\vec{e}_k$ le k-ème vecteur canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{m}_k$ la k-ème colonne de M.

- $\Lambda^k M \Lambda^{-k} = \Lambda^k M \left(\lambda_1^{-k} \vec{e}_1 \middle| \dots \middle| \lambda_n^{-k} \vec{e}_n \right)$

$$= \Lambda^k \left(\lambda_1^{-k} M \vec{e}_1 \middle| \dots \middle| \lambda_n^{-k} M \vec{e}_n \right)$$

$$= \Lambda^k \left(\lambda_1^{-k} \vec{m}_1 \middle| \dots \middle| \lambda_n^{-k} \vec{m}_n \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k m_{21} & 1 & 0 & & 0 \\ \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k m_{31} & \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^k m_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k m_{n1} & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^k m_{n2} & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

$\to E_k$

$$= Id + E_k$$

avec les composantes de E_k étant égales à

$$\begin{cases} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k m_{ij} & \text{pour } i > j \text{ et } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Comme $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) < 1$ pour $i > j$, alors

$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k m_{ij} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ et donc $\lim\limits_{k \to \infty} E_k = 0$.

8)
$$\begin{aligned}
A^k &= P\Lambda^k P^{-1} \\
&= LU\Lambda^k MV \\
&= LU(Id + E_k)\Lambda^k V \\
&= L(U + UE_k)\Lambda^k V \\
&= L(Id + \underbrace{UE_kU^{-1}}_{=F_k})\underbrace{U\Lambda^k V}_{=R_k}
\end{aligned}$$

$P = LU$; $P^{-1} = MV$; par 2).

$\Lambda^k M = (Id + E_k)\Lambda^k$ par 7)

On a $R_k = U\Lambda^k V$. Comme U, Λ^k, V sont des matrices tri. sup., alors R_k l'est aussi car le produit mat. tri. sup. est tri. sup.

9) • $\lim\limits_{k\to\infty} F_k = \lim\limits_{k\to\infty} UE_kU^{-1} = U\left(\lim\limits_{k\to\infty} E_k\right)U^{-1} = 0$

car $E_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ par 7).

• Comme $F_k \to 0$, les valeurs propres $\lambda^{(k)}$ de F_k tendent vers 0 avec k. Donc Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $k \geq k_0$, alors $\rho(F_k) < 1$.

Par conséquent, pour $k \geq k_0$,

$$\cancel{\rho(F_k) = \max_{\lambda^{(k)}\in\sigma(F_k)} |1+\lambda^{(k)}|}$$

$$|1 + \lambda^{(k)}| \geq 1 - \rho(F_k) > 0 \quad \text{pour tout } \lambda^{(k)} \in \sigma(F_k).$$

Donc toutes les valeurs propres de $Id + F_k$ sont non nulles pour $k \geq k_0$. La matrice est donc inversible pour k suffisament grand.

10) Par 6) et 8),

$$A^k = \mathcal{L}_k U_k = L(Id + F_k) R_k$$

Donc $\mathcal{L}_k = L(Id + F_k) T_k$. L est inversible et $Id + F_k$ l'est aussi pour k suffisament grand.
Donc pour k grand,

$$T_k = (Id + F_k) L^{-1} \mathcal{L}_k$$

et $\lim_k T_k = \lim_k L^{-1} \mathcal{L}_k$ puisque $Id + F_k \to Id$.

Comme L^{-1} et $\mathcal{L}_k$ sont tri inf avec diagonale unité, la limite $\lim_k L^{-1} \mathcal{L}_k$ aura aussi cette structure.
Or $T_k = R_k U_k^{-1}$ est tri. sup. (car R_k et U_k^{-1} le sont) et $(T_k)_k$ tend vers une matrice tri inf à diag unité. Par conséquent, (T_k) tend vers la matrice identité.

11) • On a $L^{-1}\mathcal{L}_k = (Id + F_k) T_k$ par 10).
Comme $F_k \to 0$ et $T_k \to Id$, alors $L^{-1}\mathcal{L}_k \to Id$,
ou encore $\mathcal{L}_k \to Id$.

• Pour trouver la limite de la suite (L_k), on pourra utiliser que $L_k = \mathcal{L}_{k-1}^{-1} \mathcal{L}_k$. Comme $\mathcal{L}_k \to Id$ et $\mathcal{L}_{k-1}^{-1} \to Id$, alors $L_k \to Id$.

12) Par 8), $R_k = U \Lambda^k V$ donc $T_k = R_k \mathcal{U}_k^{-1}$

$= U \Lambda^k V \mathcal{U}_k^{-1}$.

Alors $$\boxed{T_k U_k} = U \Lambda^k V \underbrace{\mathcal{U}_k^{-1} U_k}_{= \mathcal{U}_{k-1}^{-1}} = U \Lambda (U^{-1} U) \underbrace{\Lambda^{k-1} V \mathcal{U}_{k-1}^{-1}}_{T_{k-1}}$$

$$= \boxed{U \Lambda U^{-1} T_{k-1}}$$

Étant donné que $T_k \to Id$ par 10), alors

$$\lim_{k \to \infty} U_k = U \Lambda U^{-1}$$

13) $A_k = L_k U_k$ et $L_k \to Id$

$U_k \to U \Lambda U^{-1}$

Donc $A_k \to U \Lambda U^{-1}$. Cette matrice est tri. sup. en tant que produit de matrices tri. sup. Les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A et viennent données par Λ.