Université Paris Dauphine
Master 1, MMD-MA

Examen du Mai 2017
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés sauf une fiche A4

Exercice 1. Un agent possède une richesse initiale $x_0 \in \mathbb{R}_+$ à l'instant 0, il consomme en temps continu avec le taux $c(t) > 0$ en $[0,T]$, où $T = 1$. Soit $x(t)$ sa richesse à l'instant t, on a alors $x'(t) = -c(t)$, où $x'(t)$ est la dérivée de la fonction $x(t)$. Dans le cours, un problème de consommation optimale est formulé comme :

$$\sup\Big\{\int_0^1 e^{-\beta t} u(-x'(t))dt \ : x \in C^1([0,1],\mathbb{R}),\ x(0) = x_0,\ x(1) = 0\Big\},$$

où $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité. Supposons que le problème admet une solution optimale x_* t.q. $-x_*'(t) > 0$, $t \in [0,1]$.

1. En utilisant le résultat du calcul des variations, donner la condition nécessaire (Equation d'Euler) satisfaite par x_*.
2. Supposons que $u(z) := z^\gamma/\gamma$ avec une constant $\gamma \in (0,1)$, montrer que la condition nécessaire dans la question précédente est équivalente à
$$(1-\gamma)x_*''(t) + \beta x_*'(t) = 0.$$
3. Déterminer $x_*(t)$ en résolvant l'EDO ci-dessus avec les conditions aux bords $x_*(0) = x_0$ et $x_*(1) = 0$.

Exercice 2. Soit $T > 0$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $c = (c_1, c_2) \neq (0,0)$. On considère le problème de maximisation suivant :

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} \{c_1 y_1(T) + c_2 y_2(T)\},$$

où (y_1, y_2) est solution de

$$y_k'(t) = u_k(t), \quad y_k(0) = x_k, \quad k = 1,2, \quad t \in [0,T],$$

et $\mathcal{U}$ est l'ensemble de processus de contrôle à valeur $U := \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \ : u_1^2 + u_2^2 = 1\}$.

1. a) Donner le pré-Hamiltonien du problème $\underline{H}(t,x,p,u)$.
   b) Montrer que si $p \neq 0$, le Hamiltonien est donné par
$$H(t,x,p) = \underline{H}(t,x,p,-\frac{p}{|p|}), \quad \text{avec} \ \ |p| := \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

c) Donner les conditions nécessaires d'optimalité dans le principe de Pontryagin.
d) Déterminer la solution $(y^*, p^*) = ((y_1^*, y_2^*), (p_1^*, p_2^*))$ en résolvant le système issu des conditions nécessaires ci-dessus.
e) Calculer le contrôle associé $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, et la valeur $J(u^*) := c_1 y_1^*(T) + c_2 y_2^*(T)$ associée.

2. a) Enoncer le principe de la programmation dynamique pour ce problème de contrôle optimal.
b) Enoncer l'équation HJB pour le problème de contrôle optimal.
c) Déterminer une solution de l'équation HJB.
d) Calculer un contrôle optimal "feedback".
e) En déduire que (u_1^*, u_2^*) trouvé par le principe de Pontryaguin est un contrôle optimal.

Exercice 3. On considère un problème de finance en temps discret $t = 0, 1$. A l'instant $t = 0$, le prix d'un actif $S_0 = s_0$ est une constante fixée. A l'instant $t = 1$, le prix S_1 de l'actif a n possibilités de valeur $x_1, \cdots, x_n$, i.e. $S_1 \in \{x_1, \cdots, x_n\}$. Supposons que

$$n \geq 2 \quad \text{et} \quad x_1 \leq s_0 \leq x_n.$$

Un modèle financier est une distribution de S_1 sous laquelle son espérance vaut S_0. Notons

$$\mathcal{M} \ := \ \Big\{ (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \ : \sum_{k=1}^n p_k = 1 \ \text{ et } \ \sum_{k=1}^n x_k p_k = s_0 \Big\}.$$

Soit $g : \{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathbb{R}$ la fonction payoff d'une option dérivée, on considère deux problèmes financiers : le problème primal P est la valeur maximale d'espérance du payoff $g(S_1)$ sous tous les modèles (ou toutes les distributions de S_1), i.e.

$$P \ = \ \sup_{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathcal{M}} \ \sum_{k=1}^n g(x_k) p_k;$$

le problème dual est le coût minimal qui permet de sur-répliquer l'option $g(S_1)$ par une stratégie de trading sur (S_0, S_1), i.e.

$$D \ = \ \inf_{(y,H) \in \mathcal{D}} y, \ \text{où} \ \mathcal{D} := \big\{ (y, H) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : y + H(x_k - s_0) \geq g(x_k), \ \forall k = 1, \cdots, n \big\}.$$

Montrer la dualité $P = D$ et qu'il existe une solution $(p_1^*, \cdots, p_n^*)$ et (y^*, H^*) pour les deux problèmes d'optimisation P et D.

Barême indicatif : Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 10 points. Exercice 3 : 4 points.