

Examen du Mai 2018
“Optimisation et programmation dynamique”

Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés (sauf une feuille A4 recto-verso)

Exercice 1. Résoudre le problème d’optimisation suivant :

$$\max \left\{ \sum_{i=0}^2 L_i(x_i, x_{i+1}) : x_{i+1} \in \Gamma_i(x_i) \right\},$$

où

$$x_0 = 3; \quad \begin{cases} L_0(x_0, x_1) = \log(1 + x_1^2) - x_0 x_1^2 - 6x_1^4, \\ L_1(x_1, x_2) = 2(x_1 x_2)^2, \\ L_2(x_2, x_3) = 4x_2 x_3 - 3x_3^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \Gamma_0(x_0) = [1, \sqrt{x_0}], \\ \Gamma_1(x_1) = [-\sqrt{3}|x_1|, |x_1|], \\ \Gamma_2(x_2) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 2. On considère le problème suivant :

$$v(x_0) := \max_{u \in \mathcal{U}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L(x_{t+1}),$$

où $\mathcal{U}$ est l’ensemble de tous les processus $(u_t)_{t \geq 0}$ à valeur dans $[-1, 1]$, et la dynamique du process contrôlé $(x_t)_{t \geq 0}$ est donnée par $x_{t+1} = f(x_t, u_t)$, avec

$$f(x_t, u_t) := (x_t - 1) \vee u_t \wedge (x_t + 1) := \max((x_t - 1), \min(u_t, (x_t + 1))),$$

et

$$L(x) := -x \mathbf{1}_{\{x \in [-1, 0]\}} + 2x \mathbf{1}_{\{x \in (0, 1]\}}.$$

1. Ecrire le principe de la programmation dynamique vérifié par la fonction valeur v . La solution est elle unique ? Continue ?
2. Pour $\beta > \frac{1}{2}$, montrer que $v(x) = \frac{2}{1-\beta} + \min(0, 2x)$ et donner le contrôle optimal.
3. Déterminer v et le contrôle optimal dans le cas $\beta = \frac{1}{4}$.

Exercice 3. Soient a, b, c, d des fonctions continues et strictement positives, définies sur $[0, 1]$, on considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) \quad \text{avec} \quad J(u) := \int_0^T (c(t)x^2(t) + d(t)u^2(t)) dt,$$

où $\mathcal{U}$ est l’ensemble de processus de contrôle $(u(t))_{t \in [0, T]}$ à valeur dans $U := \mathbb{R}$, et $x(t)$ est la solution de

$$x(0) := x_0, \quad \frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t), \quad t \in [0, T].$$

1. a) Donner le pré-Hamiltonien du problème $\underline{H}(t, x, p, u)$.
- b) Calculer le Hamiltonien $H(t, x, p)$.
- c) Soit $u^*(t)$ est un contrôle optimal et $x^*(t)$ la solution optimale, donner les conditions nécessaires d'optimalité dans le principe de Pontryagin.
Ces conditions nécessaires portent sur une couple de fonctions $(x^*(t), p(t))$.
- d) Montrer que la couple $(x^*(t), p(t))$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \exp \left(\int_0^t A(s) ds \right) \begin{pmatrix} x_0 \\ p(0) \end{pmatrix},$$

avec une matrice $A(s)$ de dimension 2×2 .

Expliciter la matrice $A(s)$.

- e) Supposons que $a \equiv 0$, $b \equiv 1$ et $c \equiv d \equiv \frac{1}{2}$, montrer que la couple $(x^*(t), p(t))$ est donnée par

$$\begin{cases} x^*(t) = x_0 \cosh(t) - p(0) \sinh(t) \\ p(t) = -x_0 \sinh(t) + p(0) \cosh(t), \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2 \\ \cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2. \end{cases}$$

En utilisant la condition vérifiée par $p(T)$ dans les conditions nécessaires, calculer $p(0)$.

- f) Dans le context de la question e), calculer le contrôle optimal u^* et calculer la valeur $J(u^*)$.

2. L'approche de la programmation dynamique :

On suppose dans la suite que $a \equiv 0$, $b \equiv 1$ et $c \equiv d \equiv \frac{1}{2}$.

- a) Enoncer le principe de la programmation dynamique pour ce problème de contrôle optimal.
- b) Enoncer l'équation HJB pour le problème de contrôle optimal.
- c) Supposons que la solution d'HJB est donnée par $u(t, x) = \rho(t)x^2$, en déduire une EDO vérifiée par $\rho(t)$. Résoudre l'EDO sur $\rho(t)$ et en déduire une solution de l'équation HJB.
- d) Calculer un contrôle optimal "feedback".
- e) En déduire que u^* trouvé par le principe de Pontryaguin est un contrôle optimal.

Barème indicatif : Exercice 1 : 4 points, Exercice 2 : 6 points. Exercice 3 : 10 points.