Université Paris Dauphine
Master mention Mathématiques appliquées 1ère année

Partiel du 14 mars 2016
"Optimisation et programmation dynamique"
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. Soit A une matrice réelle de format $n \times n$ et C une matrice réelle de format $m \times n$. On suppose que A est symétrique et *semi-définie positive*. Soit $d \in \mathbb{R}^m$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{x \in K} x^T A x \qquad \text{où } K := \big\{x \in \mathbb{R}^n,\ Cx = d\big\}.$$

1. Soit (x_k) une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $\|x_k\| \to +\infty$. On suppose qu'il existe une constante Λ telle que $x_k^T A x_k \leq \Lambda$ et $Cx_k = d$. Montrer que la suite $(v_k := x_k/\|x_k\|)$ possède une sous-suite qui converge vers un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ tel que $v \neq 0$, $Av = 0$ et $Cv = 0$.

   On suppose, à partir de maintenant, que $Ker(A) \cap Ker(C) = \{0\}$ et que l'ensemble K est non vide.

2. Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

3. Montrer que cette solution est en fait unique.
   (Question plus délicate : on pourra raisonner par l'absurde en montrant que, si x_1 et x_2 sont deux solutions, alors $x_2 - x_1$ est dans $Ker(A) \cap Ker(C)$).

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, $m = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Vérifier que le problème possède une unique solution et trouver cette solution par dualité (on justifiera soigneusement cette approche).

Exercice 2. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On suppose que *la fonction f est minorée* et on pose

$$m := \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \qquad \text{(noter que } m \in [-\infty, +\infty[).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t > m$, on pose :

$$K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leq t\} \qquad \text{et} \qquad v(t) := \inf_{x \in K(t)} f(x).$$

On note $(\mathcal{P}(t))$ le problème $\displaystyle\inf_{x \in K(t)} f(x)$.

1. *Dans cette question seulement,* on suppose que $n = 2$, $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x^2 + 2y^2$. Calculer m et $v(t)$ pour tout $t > m$.

2. Montrer que la fonction v est décroissante sur $]m, \infty[$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que f et g sont convexes sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction v est convexe sur $]m, \infty[$.

   A partir de maintenant on suppose que f est coercive :

   $$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   On suppose aussi que, pour tout $t > m$, la contrainte $K(t) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \leq t\}$ est qualifiée.

4. Soit $t > m$. Montrer que le problème $(\mathcal{P}(t))$ admet au moins un minimum $x_t \in K(t)$ et écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour un tel minimum (on appellera λ_t un multiplicateur associé).

5. On suppose, dans cette question, que v est dérivable en un point $t > m$. Soient x_t et λ_t comme dans la question précédente. On supposera que $\lambda_t > 0$.

   (a) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, \epsilon[$, $x_t + hv$ appartient à $K(t+h)$. En déduire que $v'(t) \leq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (b) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle > 1$. Montrer de façon symétrique que $v'(t) \geq \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (c) En déduire que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g(x_t), v \rangle = 1$, on a $v'(t) = \langle \nabla f(x_t), v \rangle$.

   (d) Conclure que $v'(t) = -\lambda_t$.

Barême indicatif : Exercice 1 = 10 points, Exercice 2 = 15 points.