

Partiel du mars 2018
“Optimisation et programmation dynamique”
Durée 2h - Calculatrice et documents non autorisés

Exercice 1. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\max_{(x,y,z) \in K} 2x + 3y + 2z, \quad \text{où } K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z \geq 0\}.$$

1. Montrer que le problème admet une solution.
2. Montrer que la contrainte est qualifiée en tout point dans K .
3. Ecrire les conditions nécessaires d’optimalité du problème (Théorème Kuhn-Tucker) et en déduire la solution du problème.

Exercice 2. On considère un problème motivé par une application de la méthode de stratification de Monte-Carlo. Soient X et $(X_k)_{1 \leq k \leq K}$ des variables aléatoires, telles que $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^K p_k \mathbb{E}[X_k]$, où $p_k > 0$ et $\sum_{k=1}^K p_k = 1$. Pour estimer la valeur de $\mathbb{E}[X]$, on simule n_k copies i.i.d. $(X_{k,i})_{i=1, \dots, n_k}$ de la variable X_k , et propose l’estimateur

$$\hat{U} := \sum_{k=1}^K \left(p_k \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{k,i} \right).$$

Il est évident que l’effort de simulation et de calcul de cet estimateur est $\sum_{k=1}^K n_k$. Pour optimiser le comportement de l’estimateur, on cherche à minimiser la variance de $\hat{U}$ parmi tous les choix de n_k sous contrainte de l’effort total $\sum_{k=1}^K n_k = n$ pour un n fixé. Le problème d’optimisation est donc

$$\hat{V} := \inf \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2 \sigma_k^2}{n_k} : n_k > 0, \sum_{k=1}^K n_k = n \right\},$$

où $n, p_k, \sigma_k^2 := \text{Var}[X_k]$ sont des constantes fixées. Ensuite, notons $q_k := \frac{n_k}{n}$, on peut reformuler le problème :

$$\hat{V} = \inf_q \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2 \sigma_k^2}{q_k} : \sum_{k=1}^K q_k = 1, q_k > 0, k = 1, \dots, K \right\}.$$

Enfin, on suppose que $p_k > 0$ et $\sigma_k > 0$ pour $k = 1, \dots, K$.

1. Rappelons que $\sum_{k=1}^K p_k = 1$. Montrer que $\hat{V} \leq \hat{V}_0 := \sum_{k=1}^K p_k \sigma_k^2$.

2. Soit $\varepsilon := \min_{1 \leq k \leq K} \frac{p_k^2 \sigma_k^2}{V_0}$, montrer que le problème de $\widehat{V}$ est équivalent à

$$\widehat{V} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2 \sigma_k^2}{q_k} : \sum_{k=1}^K q_k = 1, q_k \geq \varepsilon/2, k = 1, \dots, K \right\} \quad (1)$$

3. Montrer qu'il existe une solution optimale $(q_k^*)_{1 \leq k \leq K}$ pour le Problème (1).
4. Soit $q^* = (q_k^*)_{1 \leq k \leq K}$ une solution optimale, montrer que $q_k^* > \varepsilon/2$ et que la contrainte du Problème (1) est qualifiée en q^* .
5. En utilisant le théorème de Kuhn et Tucker, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que

$$\frac{\partial}{\partial q_k} G(q, \lambda) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, K, \quad \text{où } G(q, \lambda) := \sum_{k=1}^K \frac{p_k^2 \sigma_k^2}{q_k} + \lambda \left(\sum_{k=1}^K q_k - 1 \right).$$

6. Calculer $(q_k^*)_{1 \leq k \leq K}$ explicitement.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , telle que ∇f est continu, borné. Supposons qu'il existe un point $x^* \in \mathbb{R}^n$, tel que

$$(x - x^*) \cdot \nabla f(x) > 0, \quad \forall x \neq x^*. \quad (2)$$

On utilise l'algorithme de gradient suivant pour approcher x^* : fixer un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire et puis itérer ainsi :

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_{k+1} \nabla f(x_k), \quad \forall k \geq 0.$$

Ici $(\gamma_k)_{k \geq 0}$ est une suite de constantes positives telles que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que $x_k \rightarrow x^*$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

1. En utilisant la condition (2), montrer que $|x_{k+1} - x^*|^2 \leq |x_k - x^*|^2 + \gamma_{k+1}^2 |\nabla f(x_k)|^2$.
2. Notons

$$v_n := |x_n - x^*|^2 - \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 |\nabla f(x_{k-1})|^2.$$

Montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante et bornée inférieurement. En déduire que la limite $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*|^2$ existe.

3. On va prouver que $\ell = 0$ par contradiction. Supposons que $\ell > 0$.
 - a) Montrer que

$$\eta := \inf_{\ell/2 \leq |x - x^*| \leq 2\ell} (x - x^*) \cdot \nabla f(x) > 0.$$

- b) Rappelons que par la définition de ℓ , il existe une constante N telle que $\ell/2 \leq |x_n - x^*| \leq 2\ell$ pour tout $n \geq N$. En déduire que

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n (x_{n-1} - x^*) \cdot \nabla f(x_{n-1}) = \infty.$$

c) Or, montrer que pour tout n ,

$$\gamma_n(x_{n-1} - x^*) \cdot \nabla f(x_{n-1}) = -\frac{1}{2} \left(|x_n - x^*|^2 - |x_n - x_{n-1}|^2 - |x_{n-1} - x^*|^2 \right).$$

En utilisant le fait que $\sum_{n \geq 1} \gamma_n^2 < \infty$ et que ∇f est uniformément borné, en déduire que

$$\sum_{n \geq 1} \gamma_n(x_{n-1} - x^*) \cdot \nabla f(x_{n-1}) < \infty.$$

C'est en contradiction avec ce qui a été prouvé en b). Donc $\ell > 0$ ne peut pas être vrai, et donc $\ell = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*|^2 = 0$.

4. Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et de classe C^1 , et x^* la solution du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Prouver que f , avec x^* , satisfait la condition (2).

Barème indicatif : Exercice 1 : 6 points, Exercice 2 : 7 points. Exercice 3 : 7 points.