

EXERCICE 1

$$1) \gamma = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} 2) V_X &= \frac{1}{n} Y Y' = \frac{1}{n} (X - g_X \mathbb{1}_n') (X' - \mathbb{1}_n g_X') = \frac{1}{n} (X X' - g_X \mathbb{1}_n' X' - X \mathbb{1}_n g_X' + g_X \mathbb{1}_n' \mathbb{1}_n g_X') \\ &= \frac{1}{n} X X' - g_X g_X' - g_X g_X' + g_X g_X' = \frac{1}{n} X X' - g_X g_X'. \end{aligned}$$

3) (1) équivaut à $\exists c$ tel que $x_1 + \dots + x_p = c \mathbb{1}_n$. Or $x_1 + \dots + x_p = X' \mathbb{1}_p$, d'où le résultat.

$$\begin{aligned} 4) V_X \mathbb{1}_p &= \frac{1}{n} X X' \mathbb{1}_p - g_X g_X' \mathbb{1}_p = \frac{c}{n} X \mathbb{1}_n - \frac{1}{n} X \mathbb{1}_n \frac{1}{n} \mathbb{1}_n' X' \mathbb{1}_p = c g_X - \frac{1}{n} X \mathbb{1}_n \frac{1}{n} \mathbb{1}_n' c \mathbb{1}_n \\ &= c g_X - \frac{1}{n} X \mathbb{1}_n c = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) g_Z &= \frac{1}{p} Z \mathbb{1}_p = \frac{1}{p} Y' \mathbb{1}_p = \frac{1}{p} (X' - \mathbb{1}_n g_X') \mathbb{1}_p = \frac{1}{p} X' \mathbb{1}_p - \frac{1}{p} \mathbb{1}_n \left(\frac{1}{n} X \mathbb{1}_n \right)' \mathbb{1}_p \\ &= \frac{c}{p} \mathbb{1}_n - \frac{1}{p} \mathbb{1}_n \frac{1}{n} \mathbb{1}_n' X' \mathbb{1}_p = \frac{c}{p} \mathbb{1}_n - \frac{1}{p} \mathbb{1}_n \frac{1}{n} \mathbb{1}_n' c \mathbb{1}_n = \frac{c}{p} \mathbb{1}_n - \frac{1}{p} \mathbb{1}_n c = 0. \end{aligned}$$

6) Le nombre d'axes factoriels non triviaux de l'ACP de X (resp. Z) est égal au rang de $Y Y'$ (resp. $Y' Y$). Le résultat vient alors du fait que les matrices $Y' Y$ et $Y Y'$ ont même rang, cette propriété résultant de ce que $\text{rg}(Y' Y) = \text{rg}(Y) = \text{rg}(Y')^1$ (cf. page 5 du polycopié *Rappels d'Algèbre Linéaire*)

7) $V_Z(Y' u^\alpha) = \frac{1}{p} Y' Y Y' u^\alpha = \frac{n}{p} Y' V_X u^\alpha = \frac{n}{p} Y' \lambda_\alpha u^\alpha = \frac{n}{p} \lambda_\alpha (Y' u^\alpha)$. Donc $Y' u^\alpha$ dirige un axe factoriel (non trivial) de l'ACP de Z et l'inertie du nuage $\mathcal{N}$ projeté sur cet axe vaut $\frac{n}{p} \lambda_\alpha$.

8) Soit w^α le α ème axe factoriel de l'ACP de Z . D'après la question 7, on a :

$$w^\alpha = \frac{Y' u^\alpha}{\|Y' u^\alpha\|_{M=I_n}} \text{ et } \|Y' u^\alpha\|_{I_n}^2 = (u^\alpha)' Y Y' u^\alpha = n (u^\alpha)' V_X u^\alpha = n (u^\alpha)' \lambda_\alpha u^\alpha = n \lambda_\alpha.$$

$$\text{Donc } G_\alpha = Y w_\alpha = Y \frac{Y' u^\alpha}{\sqrt{n \lambda_\alpha}} = \frac{Y F_\alpha}{\sqrt{n \lambda_\alpha}}.$$

1. Pour rappel, on peut démontrer que $\text{rg}(Y' Y) = \text{rg}(Y)$ de la façon suivante. De $u'(Y' Y u) = \|Y u\|^2$, on déduit que $Y' Y u = 0 \iff Y u = 0$. Donc $\text{Ker}(Y' Y) = \text{Ker}(Y)$, ce qui prouve que $Y' Y$ et Y ont même rang, d'après la relation $\dim E = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$.

EXERCICE 2

$$1) g' = (4/3 \quad 4/3 \quad 8/3)'. \text{ D'où } Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -4 & 5 & -1 \\ -4 & -1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ -5 & -2 & 4 & -5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2) V = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 48 & 3 & 51 \\ 3 & 48 & 51 \\ 51 & 51 & 102 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 16 & 1 & 17 \\ 1 & 16 & 17 \\ 17 & 17 & 34 \end{pmatrix}.$$

3) La troisième ligne de Y est la somme des deux premières, donc le rang de Y est au plus 2. Par ailleurs, les lignes n'étant pas toutes proportionnelles, ce rang n'est pas égal à 1. Donc le rang de Y , qui est aussi celui de V , vaut 2. Donc le nombre d'axes factoriels non triviaux vaut 2.

$$4) I_T = \text{tr}(VM) = \text{tr}(V) = \frac{16 + 16 + 34}{18} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3} \approx 3.6667.$$

$$5) VM \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 102 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ 34 \end{pmatrix} = \frac{17}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6) Soit τ ce pourcentage. D'après ce qui précède, nous avons $\tau = \frac{17/6}{11/3} = \frac{17}{22} \approx 0.7727$. Comme $\tau > 0.5$, il s'agit du premier axe factoriel.

$$7) u^1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$8) \psi_1^{j_2} = (y^{j_2})' u^1 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{3} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -0.8165.$$

$$9) \text{CTR}_1(j_2) = \frac{1}{6} \frac{(\psi_1^{j_2})^2}{\lambda_1} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{17} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{51} \approx 0.0392 = 3.92\%.$$

$$10) \text{COR}_1(j_2) = \frac{(\psi_1^{j_2})^2}{\|y^{j_2}\|^2} = \frac{2/3}{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2} = \frac{2/3}{6/9} = 1$$

$$11) \text{CTR}_1(i_1) = \frac{(\eta_i^1)^2}{\lambda_1} = \frac{(\sqrt{\lambda_1} u_1^1)^2}{\lambda_1} = (u_1^1)^2 = \frac{1}{6} \approx 0.1667 = 16.67\%.$$