Solution du partiel d'AD — M1 MMD - MA – 17/03/2016

P. Bertrand

EXERCICE 1

1a. On a $PL^2P' = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1^2 \, u_1' \\ \vdots \\ \ell_r^2 \, u_r' \end{pmatrix} = \sum_{\alpha=1}^{r} \ell_\alpha^2 u_\alpha \, u_\alpha'$, d'après la propriété en bas de page.

1b. On a $XX'u_\alpha = PLQ'QLP'u_\alpha = PL^2P'u_\alpha = \big(\sum_{\beta=1}^{r} \ell_\beta^2 u_\beta \, u_\beta'\big)\, u_\alpha = \ell_\alpha^2 \big(u_\alpha \, u_\alpha'\big)\, u_\alpha = \ell_\alpha^2 \, u_\alpha$.
Donc u_α est vecteur propre de XX' associé à la valeur propre ℓ_α^2.

1c. On a $X'Xv_\alpha = QLP'PLQ'v_\alpha = QL^2Q'v_\alpha = \big(\sum_{\beta=1}^{r} \ell_\beta^2 v_\beta \, v_\beta'\big) v_\alpha = \ell_\alpha^2 \big(v_\alpha \, v_\alpha'\big) v_\alpha = \ell_\alpha^2 v_\alpha$.
Donc v_α est vecteur propre de $X'X$ associé à la valeur propre ℓ_α^2.

1d. D'une part, $XX'u_\alpha = \ell_\alpha^2 \, u_\alpha$. D'autre part, $XX'cXv_\alpha = \ell_\alpha^2 cXv_\alpha$. Donc u_α et cXv_α sont des vecteurs propres associés à la même valeur propre de XX'. Ils sont donc égaux, au signe près, s'ils ont la même norme qui vaut 1. Calculons c pour que ce soit le cas. On a alors : $1 = \|cXv_\alpha\|^2 = c^2 \, v_\alpha' X'Xv_\alpha = c^2 \ell_\alpha^2 \, v_\alpha' v_\alpha = c^2 \ell_\alpha^2$, d'où $c = \dfrac{\epsilon}{\ell_\alpha}$.

1e. Dans les calculs précédents, si l'on échange X et X', alors il y a échange entre u_α et v_α, la valeur propre ℓ_α^2 restant inchangée. Par conséquent, $v_\alpha = \dfrac{\epsilon}{\ell_\alpha} X'u_\alpha$.

1f. Cette condition suffisante est que les valeurs propres de $X'X$ (ou de XX') soient simples.

2a. Si $Xa = 0$ alors $X'Xa = 0$. Donc $\mathrm{Ker}X \subseteq \mathrm{Ker}(X'X)$.
Si $X'Xa = 0$ alors $a'X'Xa = 0$, donc $(Xa)'Xa = \|Xa\|^2 = 0$, d'où $Xa = 0$. Il en résulte $\mathrm{Ker}(X'X) \subseteq \mathrm{Ker}X$, et donc $\mathrm{Ker}(X'X) = \mathrm{Ker}X$.

2b. $UDA' = UD \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_r' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} a_1' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r} a_r' \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Xa_1, \quad \dots \quad, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} Xa_r \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} a_1' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_r} a_r' \end{pmatrix}$.
Donc $UDA' = \sum_{\alpha=1}^{r} Xa_\alpha a_\alpha' = \sum_{\alpha=1}^{n} Xa_\alpha a_\alpha'$, puisque $a_\alpha \in \mathrm{Ker}(X'X)$ si $\alpha > r$ et $\mathrm{Ker}X = \mathrm{Ker}(X'X)$ d'après 2a.

2c. Pour montrer que $X = UDA'$, il suffit de montrer que $Xa_\alpha = UDA'a_\alpha$ pour tout $\alpha \leq n$, puisque $\{a_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Or, pour tout α, on a :
$UDA'a_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} Xa_\beta a_\beta' a_\alpha = Xa_\alpha$ puisque $a_\beta' a_\alpha = \delta_\alpha^\beta$. D'où $X = UDA'$.
Par ailleurs, $r = \mathrm{rg}(X'X) = \mathrm{rg}(X)$, donc (iii) est vérifiée. De plus, (ii) est clairement vérifiée, et (i) l'est aussi car $\{a_\alpha\}_\alpha$ est un système orthonormé, et $u_\alpha' u_\beta = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} a_\alpha' X'Xa_\beta = \delta_\beta^\alpha$.

3a. w^α est un vecteur propre normé de $V = \dfrac{1}{n} XX'$ associé à la $\alpha^{\text{ème}}$ valeur propre de V.
Or $XX'u_\alpha = \ell_\alpha^2 u_\alpha$, donc $w^\alpha = u_\alpha$ et $\lambda_\alpha = \dfrac{\ell_\alpha^2}{n}$. De plus, $\Psi_\alpha = X'w^\alpha = X'u_\alpha = \ell_\alpha v_\alpha$ d'après **1d.**

3b. D'après $X = PLQ'$, on a $x_i^j = \sum_{\alpha=1}^{r} u_\alpha(i) \ell_\alpha v_\alpha(j)$. On en déduit que $x_i^j = \sum_{\alpha=1}^{r} w_i^\alpha \Psi_\alpha^j$.

Exercice 2

1. On vérifie que $x_1^j + x_2^j - 2x_3^j = 0$ pour tout j : par exemple, pour $j = 1$, on a $1 + 1 - 2 = 0$. Donc $c = -2$.

2. Soit g le c.d.g. du nuage des individus. On a $g = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le tableau Y des données centrées est donc $Y = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Il en résulte que $V = \frac{1}{4} YY' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

3. De **1.**, on déduit que $y_1^j + y_2^j - 2y_3^j = 0$. Donc $V \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} YY' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$, ce qui prouve que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}'$ est un vecteur directeur d'un axe factoriel trivial du nuage des individus.

4. On a $Vv = \frac{12}{4} v = 3v$. Donc v dirige un axe factoriel non trivial associé à la valeur propre $\lambda = 3$. Par ailleurs, on sait que la somme des valeurs propres est égale à la trace de V, donc à $\frac{14}{4} = 3 + \frac{1}{2}$. Comme il y a au plus 3 axes factoriels car le nombre p de variables est égal à 3, et que deux d'entre-elles sont égales à 3 et 0, il existe un seul autre axe factoriel non trivial qui est associé à la valeur prore $\frac{1}{2}$. On en conclut que l'axe dirigé par v, associé à la valeur propre 3, est bien le premier axe factoriel du nuage des individus.

5. Soit $w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}'$ un vecteur directeur de cet axe. D'après ce qui précède, $w \perp v, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. D'où $x + y + z = 0$ et $x + y - 2z = 0$. On en déduit $z = -x - y$ et $3x + 3y = 0$. Finalement, $y = -x$ et $z = 0$. Donc pour w, on prend $w = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}'$, et on vérifie que $Vw = \frac{1}{2} w$, puisque l'on sait que la seconde valeur propre vaut $\frac{1}{2}$. L'inertie projetée sur le second axe factoriel non trivial est donc égale à $\frac{1}{2}$.

6. On a $\|v\|^2 = 3$. D'où $\Psi_1 = Y' \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} Y'v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}' = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}'$.

7. Les coordonnées des trois variables sur le premier axe sont les coordonnées du vecteur $\eta = \sqrt{\lambda} \frac{v}{\|v\|} = v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}'$.

8. Pour tout j, on a $\mathrm{QLT}_1(j) = \frac{\left(\Psi_1^j\right)^2}{\|y^j\|^2} = \frac{3}{1/4 + 9/4 + 1} = \frac{6}{7}$.

9. Pour tout j, on a $\mathrm{CTR}_1(j) = \frac{(1/4)\left(\Psi_1^j\right)^2}{\lambda} = \frac{3/4}{3} = \frac{1}{4}$.