Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Etudier la liberté des familles

1. $(1, 1), (1, 2)$.
2. $(2, 3), (-6, 9)$.
3. $(1, 3, 1), (1, 3, 0), (0, 3, 1)$.
4. $(1, 3), (-1, -2), (0, 1)$.

Exercice 2 Les familles suivantes sont-elles génératrices ?

1. $(1, 1), (3, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $(1, 0, 2), (1, 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 2), \mathbf{e}_3 = (1, 2, 3)$$

1. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 4 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}; & E'_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\}. \\ E_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 0, y = z\}; & E'_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1\}. \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy \geq 0\}; & E'_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Exercice 5 Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1(1, 1, 0)$, $\vec{v}_2(4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3(2, -1, 4)$.

1. Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$, puis avec $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.
2. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 6 Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, 2)$ et $\vec{v}_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v}_1 = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v}_3 = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v}_1 = (2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v}_3 = (1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice 7 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $V_1 = (1, 1, 1, 1)$, $V_2 = (1, 2, 3, 4)$, $V_3 = (3, 1, 4, 2)$, $V_4 = (10, 4, 13, 7)$, $V_5 = (1, 7, 8, 14)$. Donner une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces vecteurs.

Exercice 9 Soit A une matrice $n \times n$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est libre dans $\mathbb{R}^n$, il en est de même de $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p$.
2. Si $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p$ est libre, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.
3. Si $e_1, e_2, \dots, e_p$ est génératrice, il en est de même de $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p$.
4. Si $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_p$ est génératrice, il en est de même de $e_1, e_2, \dots, e_p$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ son graphe, qui est l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que $x_2 = f(x_1)$. Pour quelles fonctions f l'ensemble Γ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11 Existe-t-il des réels x, y tels que que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par $(e_1$ et $e_2)$ où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

Exercice 12 Prouver que dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $u_1 = (2, 3, -1)$ et $u_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même s.e.v. que les vecteurs $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$.

Exercice 13 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

Exercice 14 On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$.
3. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$.
4. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
5. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

Exercice 15 Soient A et B deux matrices telles le produit AB a un sens. Montrer que $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$, avec égalité si $Ker A \cap Im(B) = \{0\}$.

Exercice 16 Soient A et B deux matrices telles le produit AB a un sens. Supposons que $AB = 0$. Que peut-on dire sur les rangs de A et B . Donner deux matrices 3×3 de rang 1 et 2 dont le produit est nul.

Exercice 17 Soient A et B deux matrices de même format. Montrer que $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$.

Exercice 18 Discuter le rang de la matrice suivante en fonction des paramètres réels x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & y \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 Discuter le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 & 1 \\ 4 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 12 - \lambda & -6 & 3 \\ -9 & -5 - \lambda & 3 \\ -12 & -8 & 9 - \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 20 Montrer que la forme échelonnée réduite à laquelle on peut réduire une matrice par opérations sur les lignes ne dépend pas du choix de ces opérations. On pourra procéder par récurrence sur le nombre de colonnes.