
Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\} \\ G &= \text{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\} \end{aligned}$$

Exercice 2 On suppose que $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \dots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 3 Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 4 Soit $E = \mathbb{R}^3$. On définit le système

$$S = \{\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 2), \mathbf{e}_3 = (1, 2, 3)\}$$

1. Montrer que S est une base de E .
2. Calculer les coordonnées de $\mathbf{v} = (5, 7, 12)$ dans cette base.

Exercice 5 Soient $\vec{v}_1(1, 2, 3, 4), \vec{v}_2(2, 2, 2, 6), \vec{v}_3(0, 2, 4, 4), \vec{v}_4(1, 0, -1, 2), \vec{v}_5(2, 3, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$. Soient $F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ et $G = \text{Vect}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G$, F , G et $F + G$.

Exercice 6 1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1), x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1, 1, 1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 7 Vrai ou faux ? On désigne par E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 8 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent comme ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

Exercice 9 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (1, 0, -2, 3), v_4 = (2, 1, 0, -1), v_5 = (4, 3, 2, 1).$$

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (3, 4, 5, 16).$$

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (0, 1, 2, -1), v_3 = (2, 1, 0, 11), v_4 = (3, 4, 5, 14).$$

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 10 Soit A une matrice $n \times m$ de rang r .

1. Montrer que toute matrice A' obtenue depuis la matrice A en enlevant des colonnes est de rang au plus r .
2. Montrer que toute matrice obtenue depuis la matrice A en enlevant des lignes est de rang au plus r .
3. Montrer qu'il existe une matrice extraite de A (c'est à dire obtenue depuis A en enlevant des lignes et des colonnes), de taille $r \times r$ et de rang r .

Exercice 11 Considerons l'ensemble M_2 des matrices 2×2 , (que l'on identifie à $\mathbb{R}^4$). Soit $A \in M_2$ une matrice fixée. On nomme commutant de A et on note $C(A)$ l'ensemble des matrices $B \in M_2$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de M_2 .
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, A^k \in C(A)$.

Exercice 12 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 14 Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\text{Ker} A = \text{Ker} A^2$
2. $\text{Im} A = \text{Im} A^2$
3. $\text{Im} A \cap \text{ker} A = \{0\}$
4. $\text{rg}(A^2) = \text{rg}(A)$

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^n$, considerons l'ensemble des solutions H de l'équation

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0.$$

Montrer que H est de dimension $n - 1$ sauf si tous les coefficients a_i sont nuls. (On dit que H est un *hyperplan*).