Algèbre 2- DU1

Exercice 1 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = -I$. On cherche à trouver une base dans laquelle l'expression de A est simple. Considérons pour ceci un vecteur e non nul dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que (e, Ae) est une base, et écrire A dans cette base. Donner une interprétation géométrique de la matrice A .

Exercice 2 Montrer que les matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont semblables. Sont elles semblables à $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? À $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Exercice 3 Soit A une matrice 2×2 telle que $A^2 = 0$. Montrer que, ou bien $A = 0$, ou bien A est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Indication : on peut considérer un vecteur e de l'image de A et utiliser la base (e, Ae) .

Exercice 4 Soit A une matrice 2×2 . Soit d le déterminant de A , et a sa trace.

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P(x) = x^2 - ax + d$.
2. Montrer l'identité matricielle suivante : $A^2 - aA + dI = 0$.

On rappelle que le polynôme $P(x)$ a deux racines réelles distinctes a_1 et a_2 si et seulement si son discriminant $\Delta = a^2 - 4d$ est strictement positif. Dans ce cas, montrer que la matrice A est diagonalisable.

Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes $\frac{a \pm i\delta}{2}$, où δ est la racine de $-\Delta$. En utilisant l'identité matricielle ci-dessus, montrer que

$$\left(\frac{2A - aI}{\delta} \right)^2 = -Id.$$

En utilisant l'un des exercices ci-dessus, montrer alors qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle A s'écrit

$$\begin{bmatrix} a/2 & -\delta/2 \\ \delta/2 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Il reste à traiter le cas où $\Delta = 0$. Le polynôme P a alors une racine double $a/2$. Montrer que $(A - (a/2)I)^2 = 0$. Conclure que, soit $A = aI/2$ soit il existe une base dans laquelle A est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} a/2 & 1 \\ 0 & a/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 5 Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = 0$.

1. Que peut-on dire sur le rang r de A ?

2. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ dont les r premiers vecteurs constituent une base de $\text{im}A$.
Montrer que la représentation de A dans cette base est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Exercice 6 Soit A une matrice 3×3 telle que $A^3 = 0$.

- Montrer que le rang r de A est 0, 1 ou 2.
- Montrer que, si $r = 1$, alors A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Dans le cas $r = 2$, montrer que A^2 est non nulle. En considérant un vecteur e tel que $A^2(e)$ est non nul, montrer que $(e, A(e), A^2(e))$ est une base, et conclure que A est semblable à

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7 Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3, f_2 = e_1 - e_2, f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3 . Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 . Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.

4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} . Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondant. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A .

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver, sans calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres de A . Cette matrice est-elle diagonalisable?

Exercice 11 On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, les réduire.