Université Paris-Dauphine
Mise à niveau en Analyse

Master de Mathématiques
Année 2020–2021

Exercices d'analyse

1 Analyse dans les espaces métriques

Exercice 1.1. Si (X,d) est un espace métrique, démontrer l'inégalité triangulaire renversée $|d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1,y_2)$ pour tous x, y_1, y_2.

Exercice 1.2. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Montrer que si $R > 0$ et $y \in B(x,R)$, alors il existe $0 < r < R$ tel que $B(y,r) \subseteq B(x,R)$. En déduire qu'une boule ouverte est ouverte.
2. Montrer qu'un ensemble O est ouvert si et seulement si c'est une réunion de boules ouvertes.
3. Montrer que l'intersection d'un nombre fini de boules ouvertes est ouverte.

Exercice 1.3. Si (X,d) est un espace métrique, a-t-on toujours $\overline{B(x,r)} = B_f(x,r)$? $\overset{\circ}{B_f}(x,r) = B(x,r)$? $\partial B(x,r) = S(x,r)$?

Exercice 1.4. Donner un exemple de fonction continue mais non uniformément continue, ainsi qu'un exemple de fonction uniformément continue qui n'est pas Lipschitzienne.

Exercice 1.5. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (X,d). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ℓ est valeur d'adhérence de (x_n),
(ii) $\ell \in \bigcap_n \overline{\{x_p : p \geq n\}}$,
(iii) il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $\lim x_{\phi(n)} = \ell$.

Exercice 1.6. Soit E un ensemble et (X,d) un espace métrique. On note Y l'espace des fonctions de E dans X. Construire une distance δ sur Y qui métrise la convergence uniforme, i.e. telle que $f_n \to f$ uniformément si et seulement si $\delta(f_n, f) \to 0$.

Exercice 1.7 (Théorème de Baire)**.** Il s'agit de montrer que toute intersection dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet est encore dense. Soit donc (X,d) un espace complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses.

1. Soit $x_0 \in X, r_0 > 0$. Montrer qu'il existe $x_1 \in X$, $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$ tels que $B_f(x_1,r_1) \subseteq B(x_0,r_0) \cap O_0$.
2. Construire des suites $(x_n)_n$, $(r_n)_n$ telles que $B_f(x_{n+1},r_{n+1}) \subseteq B(x_n,r_n) \cap O_n$ et $0 < r_n \leq 2^{-n}$.
3. En déduire l'existence d'un élément $x^\star \in B(x,r_0) \cap \bigcap_n O_n$.
4. Conclure.

5. Application : Montrer que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est jamais complet, peu importe la norme.

Exercice 1.8 (« Prolongement de la limite »)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions de (X, d) dans (X', d') où (X', d') est complet. On suppose que cette suite est uniformément équicontinue, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, \forall x, \in X, d(x, y) < \delta \implies d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Montrer que si (f_n) converge simplement sur une partie dense $A \subseteq X$, alors elle converge simplement sur tout X, et que la limite f est uniformément continue.

Exercice 1.9. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exercice 1.10 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que la suite définie par $M_n \coloneqq \sup_x \{f(x) - f_n(x)\}$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $\forall n, \exists x_n \in X, \forall k \leq n, M_n \leq f(x) - f_k(x)$.
3. En déduire qu'il existe $x^\star$ tel que $\lim M_n \leq f(x^\star) - f_k(x^\star)$ pour tout k puis que f_n converge uniformément vers f.
4. Application : On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

Exercice 1.11 (Normalité des espaces métriques)**.** Soient A et B deux fermés disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que f vaille 1 sur A et 0 sur B. Montrer que si A est bornée, on peut trouver une telle fonction qui soit de support bornée, i.e. telle que $\{f > 0\}$ est borné.

Exercice 1.12. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne sur un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d). On définit pour tout $x \in X$

$$\bar{f}(x) = \inf_{y \in A} f(y) + Ld(x, y).$$

Montrer que $\bar{f}$ est un prolongement L-lipschitzien de f à tout X.

Exercice 1.13. On considère $\bar{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Munir $\bar{\mathbb{R}}$ d'une distance métrisant la convergence à laquelle on s'attend.

Exercice 1.14. Soit $a_n \leq b_n$ avec a_n croissante et b_n décroissante, $b_n - a_n \to 0$. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer la convergence de la méthode de la dichotomie.

Exercice 1.15. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que si f' est bornée au voisinage de a, alors f se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que si de plus f' admet une limite en a, ce prolongement est dérivable en a.

Exercice 1.16. Les fonctions suivantes sont-elles contractantes ? Admettent-t-elle un point fixe ?

1. $f(x) = \cos(x/3) + 1/(2 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = x/2$ sur $]0, 1]$;
3. $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$;
4. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
5. $f(x) = 1 + x/2$ sur $[0, 1]$.

Exercice 1.17. Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ telle qu'une itérée T^p est contractante.

1. Montrer que T admet un unique point fixe, obtenu comme limite de $x_{n+1} = T(x_n), x_0 = a$ quelque soit $a \in X$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = f(x^2)$.

Exercice 1.18. On pose $F(x, y) = (x + \cos x/2 + \sin y/2, y - \sin y/2 + \cos x/2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que le système $F(x, y) = (a, b)$ admet toujours une solution.

Exercice 1.19. Montrer qu'une bijection continue $f : X \to Y$ où X est compact, est de réciproque continue.

Exercice 1.20. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exercice 1.21 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que f_n converge uniformément vers f. (On pourra considérer les quantité $M_n \coloneqq \sup_x\{f(x) - f_n(x)\}$.)
2. On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la valeur absolue sur $[0, 1]$.

2 Espaces vectoriels normés

Exercice 2.1. Soit T une application linéaire de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\|T\| \coloneqq \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$;
b) T est Lipschitzienne ;
c) T est continue ;
d) T est continue en 0 ;
e) T est bornée sur $B_f(0, 1)$.
f) T est bornée sur une boule $B(x, r)$ ou $B_f(x, r)$.

Exercice 2.2. Les espaces suivants sont-ils des espaces de Banach ? Justifiez.

1. $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
2. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
3. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 ;
4. $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \{(u_n) : \sum |u_n|^p < \infty\}$ muni de la norme ℓ^p.

Exercice 2.3. Montrer que l'espace $L^1([0,1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach en utilisant le critère de convergence absolue des espaces de Banach.

Exercice 2.4. Démontrer les formules polaires : si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme $\|\cdot\|$, pour tous x, y,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

et si E est muni d'un produit hermitien,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\sum_{\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}} \lambda \|x + \lambda y\|^2}{8}.$$

Exercice 2.5. Soit E un espace vectoriel réel (resp. complexe).

1. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire (resp. hermitien), de norme $\|\cdot\|$, montrer que celle-ci vérifie l'identité du parallélogramme.
2. Réciproquement, supposons que $\|\cdot\|$ est une norme sur E qui vérifie l'identité du parallélogramme, montrer que la formule polaire réelle (resp. complexe) définit un produit scalaire (resp. hermitien).

Exercice 2.6 (Base de Fourier)**.** On note $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions boréliennes complexes f définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, telles que $\int_0^{2\pi} |f|^2 < +\infty$ (modulo l'égalité presque partout), muni du produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f\bar{g}$. Montrer que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ définie par $e_n(x) = e^{ix}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. (On pourra admettre que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$.)

Exercice 2.7. Montrer que l'image d'une application linéaire $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ k-dissipative, i.e. $\|T(x)\| \geq k\|x\|$ pour tout $x \in E$, sur un Banach E est fermée.

Exercice 2.8. On considère l'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. On considère le sous-ensemble $K = \{(u_n) : \forall n, |u_n| \leq \varepsilon_n\}$ où $(\varepsilon_n) \in \ell^p$. Montrer que K est compact. (On pourra utiliser le critère de complétude et pré-compacité.)
2. On considère une partie K fermée, bornée et équi-intégrable, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall (u_n) \in K, \quad \sum_{n \geq N} |u_n|^p \leq \varepsilon.$$

   Montrer que K est compacte.
3. Donner un exemple de compact K ne satisfaisant pas a).
4. Montrer réciproquement que tout compact K de ℓ^p est équi-intégrable.

Exercice 2.9. Soit E, E' deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide, alors $E = F$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(E, E')$. En déduire l'équivalence :
   a) T est surjective ;
   b) T est d'image ouverte ;
   c) $T(E)$ est d'interieur non vide.

Exercice 2.10. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Montrer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme d'opérateur est un Banach.

Exercice 2.11. Montrer qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2.12 (Intégrale de Riemann des fonctions réglées)**.** Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_b([0, 1], E)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier, càd de la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{I_i}$ où les I_i sont des intervalles inclus dans $[0, 1]$ et $\alpha_i \in E$. On définit son intégrale par

$$I(f) = \sum_i \ell(I_i)\alpha_i.$$

1. Montrer que c'est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans E.
2. En déduire un prolongement à $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{E}}$, l'espace des fonctions réglées.
3. Montrer qu'une fonction continue est une fonction réglée.

Exercice 2.13. Sur $[0, 1]$, on considère une suite de subdivisions $\Delta_n : 0 = x_0^n < \ldots < x_{N_n}^n = 1$, pointée par $\xi_i^n \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, dont le pas $\sigma_n = \max\{x_{i+1}^n - x_i^n\} \to 0$. On définit les sommes de Cauchy :

$$S_n(f) = \sum_i f(\xi_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n).$$

Montrer que S_n converge simplement vers I sur l'espace des fonctions réglées (voir l'exercice précédent).

Exercice 2.14. Montrer que si une intégrale est absolument convergente à valeurs dans un Banach, i.e. $\int_0^{+\infty} \|f\| < +\infty$, elle est convergente : la limite $\lim M \to +\infty \int_0^M f$ existe.

Exercice 2.15. Soit E un espace de Banach. On considère $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$.

1. Montrer que $\mathrm{Id} - T$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$, dont on justifiera l'existence.
2. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $S^2 = \mathrm{Id} + T$.

Exercice 2.16. On considère les espaces $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $B : \ell^1 \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$, est bien définie par la formule

$$B(u,v) = \sum_n u_n v_n$$

et qu'elle est bilinéaire et continue. En déduire que $B(\cdot,\bar{v}) \in (\ell^1)'$ et $B(\bar{u},\cdot) \in (\ell^\infty)'$ pour tous $\bar{u},\bar{v}$, et que les applications $i_1 : \ell^\infty \to (\ell^1)'$, $i_1 : \bar{v} \mapsto B(\cdot,\bar{v})$ et $i_\infty : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $i_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u},\cdot)$ sont continues.
2. Montrer que i_1 est une isométrie bijective (« ℓ^∞ est le dual de ℓ^1 »).
3. Montrer que i_∞ est une isométrie mais n'est pas bijective.
4. On considère $j_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u},\cdot)_{|c_0}$, $j_\infty : \ell^1 \to (c_0)'$. Montrer que j_∞ est une isométrie bijective (« ℓ^1 est le dual de c_0 »).

3 Théorie de la mesure

Exercice 3.1. Soit $f : X \to Y$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
2. En déduire qu'une fonction continue entre deux espaces métriques est borélienne.

Exercice 3.2. Démontrer le lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 3.3. Démontrer la loi du 0-1.

Exercice 3.4 (Preuve du théorème d'Egorov)**.** Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X,\mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui converge presque partout.

1. Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(X \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$C_N^k = \bigcap_{n\geq N} \left\{ |f_n - f| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que $C = \bigcap_k^{\downarrow} \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k$ et en déduire que pour tout k, $\mu(X \setminus \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k) = 0$.
3. On fixe $\varepsilon > 0$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left(X \setminus C_{N_k}^k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.
4. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X_\varepsilon \in \mathcal{T}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X_ε et tel que $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.
5. Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 3.5 (Preuve du théorème π-λ)**.** Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ est à la fois un π-système et un λ-système, alors c'est une tribu.

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{C}$ est un π-système. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on note $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \cap A \in \lambda(\mathcal{C})\}$.
   (i) Montrer que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$ alors $\mathcal{C}_A$ est un λ-système et que si $A \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}_A$ contient $\mathcal{C}$.
   (ii) En déduire que si $A \in \mathcal{C}$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
   (iii) En déduire que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
3. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\lambda(\mathcal{C})$ est une tribu, et en déduire le théorème π-λ.

Exercice 3.6. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ implique que $f(x)$ est fini pour μ-presque tout x.

Exercice 3.7 (Mesures à densité)**.** Étant donnée une fonction mesurable positive f et une mesure μ, montrer que l'application $f\mu$ définie par

$$\forall E \in \mathcal{T}, \quad [f\mu](E) := \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

est une mesure.

Exercice 3.8. [Preuve du théorème de Lusin] Soit $f : X \to Y$ une fonction Borélienne entre deux espaces métriques et μ une mesure de Borel finie régulière sur X, avec Y séparable. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe une base dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire une suite $(U_n)_{n\in N}$ d'ouverts de Y tels que tout ouvert O s'écrive comme une réunion des $\{U_n : U_n \subseteq O\}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux ensembles fermés $F_n^1 \subseteq f^{-1}(U_n)$, $F_n^2 \subseteq f^{-1}(U_n^c)$ tels que $\mu(f^{-1}(U_n) \setminus F_n^1) \leq \varepsilon 2^{-n}$ et $\mu(f^{-1}(U_n^c) \setminus F_n^2) \leq \varepsilon 2^{-n}$.
3. On pose $F = \bigcap_n (F_n^1 \cup F_n^2)$. Montrer que $\mu(X \setminus (F_n^1 \cup F_n^2)) \leq \varepsilon 2^{-n}$ et que $\mu(X \setminus F) \leq 2\varepsilon$.
4. Montrer que f est continue sur E. (On pourra regarder l'image réciproque de $f_{|F}^{-1}(U_n^c)$.)

Exercice 3.9. Donner des conditions sur un ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

1. $\{\varnothing, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est donné.
2. $\{\varnothing, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est donné.
3. La classe des singletons de E.
4. La classe des parties finies de E.
5. La classe des parties dénombrables de E.
6. La classe des parties finies ou cofinies de E. On dit qu'une partie A de E est cofinie si $E \setminus A$ est finie.

7. La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. On dit qu'une partie A de E est codénombrable si $E \setminus A$ est dénombrable.

Comparer les tribus engendrées par les différentes classes de parties décrites ci-dessus.

Exercice 3.10. 1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une semi-algèbre sur X, l'algèbre engendrée $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{F})$ est formée des réunions finies d'éléments de $\mathcal{F}$.

2. Montrer que la tribu engendrée par une semi-algèbre est celle engendrée par l'algèbre engendrée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est intervalles de $\mathbb{R}$ est une semi-algèbre, de même que les intervalles semi-ouverts à droite.

Exercice 3.11. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurés, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(F)$ tels que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ et $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$. On définit

$$\mathcal{C} := \{A \times B,\, A \in \mathcal{E},\, B \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{G} := \{A \times F,\, A \in \mathcal{E}\} \cup \{E \times B,\, B \in \mathcal{F}\}.$$

1. Montrer que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des semi-algèbres alors $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre.
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Exercice 3.12. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que λ est σ-finie.
2. Montrer que $\lambda(K) < +\infty$ pour tout ensemble compact (fermé borné) de $\mathbb{R}$.
3. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ? Même question pour un fermé ?
4. Construire un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebegue nulle.
5. Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebegue égale à 3.

Exercice 3.13. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures finies sur $(E, \mathcal{A})$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$. (Ind. On pensera à utiliser le Lemme de Fatou et le Lemme de Borel-Cantelli).

Exercice 3.14. Dans les cas suivants (où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
2. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
3. $f_n(x) = \sin(nx)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$,
4. $f_n(x) = |\cos(x)|^{1/n} e^{-x}$,
5. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{nx+1}\mathbf{1}_{[0,1]}$,
6. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^n)}{nx^{n+\frac{1}{2}}}$.

Exercice 3.15. Calculer la limite des suites suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n} dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{n}) - 1} \mathbf{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})| \geq 2\}}\, dx, \qquad \sum_{m \geq 1} \frac{n}{m} \sin(\frac{1}{nm}).$$

Exercice 3.16. 1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2 + v^2, 2uv)$ est un C^1-difféomorphisme de $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u > v > 0\}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y > 0\}$.

2. En déduire la valeur de $\int_{(\mathbb{R}_+)^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} dudv$.

Exercice 3.17. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

1. Soit $u : X \to [0, +\infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que

$$\int_X u \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\}) dt.$$

2. Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $u : X \to [0, +\infty]$ une fonction positive mesurable. Montrer que

$$\int_X u^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\}) dt.$$

Exercice 3.18. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{y>x>0} e^{-y+x} \frac{\sqrt{y-x}}{y^2} d\lambda_2(x,y).$$

[Indication : on pourra considérer le changement de variable $u = y - x, v = y/x$.]

Exercice 3.19. Calculer le volume de la boule euclidienne de rayon r de $\mathbb{R}^n$.

4 Espaces L^p

Exercice 4.1. Démontrer l'inégalité de Hölder pour $p, q \in]1, +\infty[$ en utilisant l'inégalité de Jensen. Étant données deux fonctions mesurables positive f, g, on pourra, lorsque c'est possible, considérer la mesure $\nu = \dfrac{g^q \mu}{[g^q \mu](X)}$.

Exercice 4.2. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables et $p \in [1, +\infty]$, alors

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

Exercice 4.3. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que f est nulle μ-presque partout si et seulement si $\int f \, d\mu = 0$.

Exercice 4.4. On décompose f en $f = f_+ - f_-$.

(i) Justifier l'existence de deux suites croissantes $(a_n), (b_n)$ de fonctions étagées telles que $\mu(\{a_n \neq 0\}), \mu(\{b_n \neq 0\}) < \infty$ et $a_n \uparrow f_+, b_n \uparrow f_-$.

(ii) Montrer que $a_n \to f_+$ et $b_n \to f_-$ dans $L^p(\mu)$ et conclure.

Exercice 4.5. Soit X un espace métrique localement compact, une partie compacte K et un ouvert U tels que $K \subseteq U$.

(i) Montrer qu'il existe un compact K' et un ouvert U' tels que $K \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{K} \subseteq U$.

(ii) À l'aide de la question précédente, construire une fonction ϕ continue qui vaut 1 sur K et 0 sur $\tilde{U}^c$. On pourra utiliser les fonctions distance à un ensemble.

(iii) Conclure.

Exercice 4.6. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes réelles. Calculer la loi de $X + Y$ dans les cas suivants :

(i) X et Y ont loi uniforme sur $[-1, 1]$.

(ii) X et Y ont respectivement une loi de densité $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ où

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx.$$

On pourra vérifier et utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}_+} \gamma_{a,\lambda} = 1$.

Exercice 4.7. Soient μ et ν sont deux mesures de Borel finies sur $\mathbb{R}^d$. On pose

$$\sigma(A) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} one_{x+y \in A} d(\mu \otimes \nu)(x, y), \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq \mathbb{R}^d.$$

(i) Montrer que σ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, on note $\mu * \nu$.

(ii) Remarquer que $\mu * \nu$ est une mesure finie et que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

(iii) Montrer que si $\mu = f\lambda^d, \nu = g\lambda^d$, où $f, g \geq$ sont intégrables, $\mu \star \nu = (f \star g)\lambda^d$.

Exercice 4.8 (Convolution dans L^p, cas général)**.** Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

1. On pose p', q' tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$. Vérifier que

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1.$$

2. Démontrer l'inégalité de Hölder pour 3 fonctions f_1, f_2, f_3 :

$$\|f_1 f_2 f_3\|_1 \leq \|f_1\|_{p'} \|f_2\|_{q'} \|f_3\|_r.$$

3. Pour $r < +\infty$, démontrer que $\int \left(\int |f(x-y)g(y)|\, \mathrm{d}y\right)^r \mathrm{d}x \leq (\|f\|_p \|g\|_q)^r$. On pourra appliquer l'inégalité de Hölder en décomposant $f(x - \cdot)g(\cdot) = f_1 f_2 f_3$ pour 3 fonctions bien choisies.

4. Cas $r = +\infty$: démontrer que $f \star g(x)$ est bien défini pour *tout* x, et que $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 4.9. Démontrer la version locale de la continuité de l'opérateur de translation.

Exercice 4.10 (Convolée par une fonction continue)**.** 1. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue, alors $f \circ g$ est uniformément continue.

2. Montrer qu si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \circ g$ est continue.

Exercice 4.11. Démontrer la version locale de la continuité de la convolée dans le cas de deux exposants conjugués.

Exercice 4.12 (Support d'une fonction)**.** Si f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$, montrer qu'il existe un plus petit ensemble fermé en-dehors duquel f s'annule Lebesgue-presque partout.

Exercice 4.13 (Support d'une convolée)**.** Montrer que le support de la convolée de deux fonctions boréliennes f, g est inclus dans $\overline{\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g}$, et que l'inclusion peut être stricte.

Exercice 4.14. Soit ρ une fonction positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\int \rho = 1$. Soit (δ_n) une suite de réels strictement positive tendant vers 0 et posons pour tout n, $\rho_n(x) = \delta_n^{-d}\rho(x/\delta)$. Montrer que (ρ_n) est une approximation de l'unité.

Exercice 4.15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ est (ρ_n) une approximation de l'unité.

1. Montrer que si f est bornée et uniformément continue, alors $f \star \rho_n \to \rho$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si $(\operatorname{diam} \operatorname{spt} \rho_n)$ est borné alors $f \star \rho_n \to f$ uniformément sur tout compact.
3. Montrer que si $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \rho_n \to 0$ et f est uniformément continue, alors $f \star \rho_n \to f$ uniformément sur tout compact.

Exercice 4.16. Montrer que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star \rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_{x_k}(f \star \rho) = f \star \partial_{x_k}\rho$ pour tout $k = 1, \ldots, d$.

Exercice 4.17. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

1. En supposant que $d = 1$, montrer que $Xf = x \mapsto xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. En supposant que $d = 1$, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, $f^{(\alpha)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
3. Généraliser à la dimension d quelconque.

Exercice 4.18 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** Soit $G_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}e^{-\lambda\pi|x|^2}$ une Gaussienne centrée. On se place en dimension 1.

1. Montrer que $G_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\int_{\mathbb{R}} G_\lambda = 1$.
2. Montrer que G_λ satisfait l'EDO $y' = -2\lambda\pi xy$.
3. En déduire que $\widehat{G_\lambda}' = -\frac{2\pi}{\lambda}x\widehat{G_\lambda}$.
4. En déduire que $\widehat{G_\lambda} = e^{-\frac{\pi x^2}{\lambda}}$.
5. En déduire que $\widehat{\widehat{G_\lambda}} = G_\lambda$.

Exercice 4.19. Pour quelle(s) valeur(s) de p les fonction suivantes définies de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont-elles dans l'espace $\mathcal{L}^p$?

1. $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$
2. $x \mapsto x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$
3. $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}\mathbf{1}_{]0,+\infty]}(x)$
4. $x \mapsto \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,n+1[}(x)$

Exercice 4.20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient f_α et g_α les fonctions définies par

$$f_a(x) = \frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x), \quad g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad h_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

1. A quelle condition sur α et p, $f_\alpha \in L^p$?
2. Même question pour g_α.
3. Et pour h_α ?
4. Montrer que si $p < q$, il n'y a pas d'inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$et $L^q(\mathbb{R})$.

Exercice 4.21 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q \in]0,1[$ deux exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considère deux fonctions mesurables f, g.

1. Démontrer *l'inégalité de Hölder*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

en utilisant l'inégalité de Jensen.
Indication : considérer la mesure μ_ϕ où $\phi = |f|^p / \int |f|^p d\mu$ (lorsqu'elle est bien définie) et la fonction $h = |g|/|f|^{p-1}\mathbf{1}_{f\neq 0}$.

2. Démontrer l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b \geq 0$ et en déduire une autre preuve de l'inégalité de Hölder.
Indication : considérer d'abord le cas où $\int |f|^p d\mu = \int |g|^q d\mu = 1$.

3. Démontrer *l'inégalité de Minkowski*

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder.
Indication : se ramener au cas $f, g \geq 0$ et écrire $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.

Exercice 4.22. Calculer $\hat{f}$ lorsque

1. $f := 1$;
2. $f := \mathbf{1}_{[-a,a]}$, $a > 0$;
3. $f(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$;
4. $f(x) := \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$, $\lambda > 0$;

Exercice 4.23. Soit $f(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

1. Montrer que $f(x) = \mathbf{1}_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]} * \mathbf{1}_{\left[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right]}(x)$ et calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$.
2. En déduire que $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1-\cos t}{t^2} dx$.

5 Calcul différentiel

Exercice 5.1. Étudier les points critiques et minima de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $f(x, y)$ vaut

(i) $x^2 + y^4$,

(ii) $x^2 + y^3$,

(iii) $x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$,

(iv) $x^2 - 2xy$.