Université Paris-Dauphine

—

Mise à niveau en analyse

—

Séance 1

Paul Pegon

2020–2021

Est indiqué en noir ce qui a été traité, en bleu ce qui n'a pas été traité mais qu'on encourage à regarder et en rouge des compléments qui pourront être lus en seconde lecture.

Table des matières

1 Analyse dans les espaces métriques

But Parler de convergence et de continuité (notions topologiques), de manière quantifiée et séquentielle (cadre métrique).

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Distance et espace métrique)**.** Une *distance* sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in X$,

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation),

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance, c'est-à-dire un couple (X, d), est appelé un *espace métrique*.

Remarque 1.2 (Inégalité triangulaire renversée)*.* Une distance vérifie automatiquement une inégalité triangulaire renversée :

$$|d(x, y_1) - d(x, y_2)| \leq d(y_1, y_2)$$

pour tous x, y_1, y_2.

Exercice 1.1. Si (X,d) est un espace métrique, démontrer l'inégalité triangulaire renversée $|d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1,y_2)$ pour tous x, y_1, y_2.

Les espaces métriques sont un bon cadre pour commencer à faire de l'analyse : convergence, limite, continuité, notions topologiques se manipulent de façon intuitive et agréable.

Vocabulaire

Dans un espace métrique (X,d) on peut parler de :

Boule ouverte $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ pour tout $x \in X, r \geq 0$.

Boule fermée $B_f(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ pour tout $x \in X, r \geq 0$.

Ensemble ouvert O est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$.

Exercice 1.2. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Montrer que si $R > 0$ et $y \in B(x,R)$, alors il existe $0 < r < R$ tel que $B(y,r) \subseteq B(x,R)$. En déduire qu'une boule ouverte est ouverte.
2. Montrer qu'un ensemble O est ouvert si et seulement si c'est une réunion de boules ouvertes.
3. Montrer que l'intersection d'un nombre fini de boules ouvertes est ouverte.

Ensemble fermé F est fermé si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

Intérieur x est *intérieur à* $A \subseteq X$ si il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$. L'ensemble des points intérieurs à A, noté $\overset{\circ}{A}$, est *l'intérieur de* A. C'est un ouvert (le démontrer !).

Adhérence (ou fermeture) x est un point adhérent à $A \subseteq X$ si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire l'ensemble de ses points adhérents. C'est un fermé (le démontrer !).

Densité Une partie $A \subseteq X$ est *dense* dans X si $\bar{A} = X$.

Séparabilité L'espace (X,d) est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

Frontière La frontière de $A \subseteq X$ est $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Remarque 1.3. Attention, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, on a

(i) $\overline{B(x,r)} = B_f(x,r)$

(ii) $\overset{\circ}{B_f}(x,r) = B(x,r)$

(iii) $\partial B(x,r) = S(x,r) \coloneqq \{y : d(x,y) = r\}$,

mais ces propriétés ne sont pas vraies en général dans un espace métrique quelconque.

Exercice 1.3. Si (X,d) est un espace métrique, a-t-on toujours $\overline{B(x,r)} = B_f(x,r)$? $\overset{\circ}{B_f}(x,r) = B(x,r)$? $\partial B(x,r) = S(x,r)$?

Démonstration. On pourra considerer par exemple $X =]-1/2, 1/2[\cup \{-1,+1\}$ muni de la distance usuelle. □

Application continue $f : (X,d) \to (X',d')$ est *continue en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,x_0) < \delta \implies d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Elle est dite *continue* si elle est continue en tout point.

Application uniformément continue $f : (X,d) \to (X',d')$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in X, d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Application Lipschitzienne $f : (X,d) \to (X',d')$ est K-lipschitzienne où $K \geq 0$ si

$$\forall x,y \in X, d(f(y), f(x)) \leq K d(x,y).$$

Lorsque f est Lipschitzienne, on note $\mathrm{Lip}(f)$ la plus petite constante K telle que f soit K-Lipschitzienne.

Exercice 1.4. Donner un exemple de fonction continue mais non uniformément continue, ainsi qu'un exemple de fonction uniformément continue qui n'est pas Lipschitzienne.

Démonstration. Par exemple $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$. □

Suite convergente $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ dans X si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, d(x,x_n) \leq \varepsilon$.

Valeur d'adhérence ℓ est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Limite en un point Soit $f : (X,d) \to (X',d')$, $x_0 \in X, \ell \in X'$ et $A \subseteq X$. On dit que f admet ℓ pour limite lorsque x tend vers x_0 selon A, noté $\lim_{x\to x_0, x\in A} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A, d(x,x_0) < r \implies d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Lorsque A n'est pas précisé, on considère que $A = X$.

Exercice 1.5. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (X,d). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ℓ est valeur d'adhérence de (x_n),

(ii) $\ell \in \bigcap_n \overline{\{x_p : p \geq n\}}$,

(iii) il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $\lim x_{\phi(n)} = \ell$.

Caractérisations séquentielles

Dans un espace métrique, la plupart de ces définitions admettent des caractérisations séquentielles (en terme de suites).

Proposition 1.4 (Caractérisations séquentielles)**.** *Dans un espace métrique (X,d) :*

— *un point $x \in X$ est adhérent à $A \subseteq X$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \in A$ telle que $x_n \to x$,*

— *une partie $A \subseteq X$ est fermée si et seulement pour toute suite $(x_n) \in A$ convergeant vers une limite ℓ, nécessairement $\ell \in A$,*
— $\lim_{x_n \to x^\star, x_n \in A} f(x) = \ell$ *si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in A$ tendant vers $x^\star$,* $\lim_n f(x_n) = \ell$*,*
— *f est continue en $x^\star$ si et seulement pour toute suite (x_n) tendant vers $x^\star$,* $\lim f(x_n) = f(x^\star)$*,*
— *f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n), (y_n)$ telles que* $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$*, on a* $\lim_n d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$*.*

1.2 Complétude

Intérêt Assurer l'existence de limite sans la connaître a priori. Obtenir des théorèmes d'existence en analyse, de solutions d'équations différentielles notamment, par exemple par le théorème du point fixe de Picard. Également, comme on le verra, la complétude est un « morceau » de compacité.

Définition 1.5 (Suite de Cauchy, espace complet)**.** Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \in X$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente, on dit que l'espace métrique (X, d) est *complet.*

Exemple 1.6. Les espaces suivantes sont complets :
— $\mathbb{R}$ muni de la distance absolue $d(x, y) = |y - x|$,
— les espaces vectoriels normés de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^d$), comme on le verra,
— l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la distance uniforme $d(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$,
— l'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N : \sum_n |u_n|^p < +\infty\}$ muni de la distance $d_p(u, v) = (\sum_n |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 1.6. Soit E un ensemble et (X, d) un espace métrique. On note Y l'espace des fonctions de E dans X. Construire une distance δ sur Y qui métrise la convergence uniforme, i.e. telle que $f_n \to f$ uniformément si et seulement si $\delta(f_n, f) \to 0$.

Exemple 1.7. Les espaces suivants ne sont pas complets :
— $\mathbb{Q}$ muni de la distance absolue : par exemple $(1 + \frac{1}{n})^n$ tend vers e dans $\mathbb{R}$ et e n'est pas rationnel,
— $X =]0, 1[$: par exemple $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 1 donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc dans $]0, 1[$, mais $1 \notin X$ donc x_n ne converge pas dans X, par unicité de la limite éventuelle dans X,

— l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels muni de la distance $d(f,g) = \|f-g\|$ induite par n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ (on le verra plus loin),

— $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance L^1 : $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$.

Proposition 1.8. *Soit (u_n) une suite dans un espace métrique (X,d). On a*

$$(u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est de Cauchy} \implies (u_n) \text{ est bornée.}$$

Évidemment, en général les sens réciproques sont faux.

Remarque 1.9. La notion de suite de Cauchy, et donc de complétude, est une notion métrique (ou plus généralement *uniforme*), et non purement topologique : il nous faut une distance pour pouvoir la définir.

Quelques théorèmes importants dans les espaces complets

Théorème 1.10 (Théorème des fermés emboîtés)**.** *Soit (F_n) une suite de parties fermées non vides d'un espace métrique complet (X,d) tels que*

(i) $F_q \subseteq F_p$ *pour tout* $q \geq p$,

(ii) $\operatorname{diam} F_n \to 0$.

Dans ce cas, l'intersection $\bigcap^{\downarrow}_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduite à un singleton.

Remarque 1.11. Cette propriété caractérise la complétude.

Démonstration. Choisissons pour chaque n un point $x_n \in F_n$. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que $\operatorname{diam} F_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Si $p,q \geq N$, $F_p \subseteq F_N$ et $F_q \subseteq F_N$ donc x_p et x_q sont dans F_N, d'où $d(x_p,x_q) \leq \operatorname{diam} F_N \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'espace étant complet, (x_n) tend vers une limte $x^\star$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x_p \in F_n$ pour tout $p \geq n$, or F_n est fermé donc $x^\star = \lim x_p \in F_n$. Ceci étant vrai pour tout n, $x^\star \in \bigcap_n F_n$.

Enfin, $\operatorname{diam} \bigcap_n F_n \leq \operatorname{diam} F_p$ pour tout p donc $\operatorname{diam} \bigcap_n F_n = 0$, de sorte que $\bigcap_n F_n$ contient au plus un point (sinon, deux point sont à distance strictement postive, donc le diamètre est aussi strictement positif). Au final

$$\bigcap_n F_n = x^\star.$$

□

Exercice 1.7 (Théorème de Baire)**.** Il s'agit de montrer que toute intersection dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet est encore dense. Soit donc (X,d) un espace complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses.

1. Soit $x_0 \in X, r_0 > 0$. Montrer qu'il existe $x_1 \in X$, $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$ tels que $B_f(x_1,r_1) \subseteq B(x_0,r_0) \cap O_0$.

2. Construire des suites $(x_n)_n$, $(r_n)_n$ telles que $B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap O_n$ et $0 < r_n \leq 2^{-n}$.
3. En déduire l'existence d'un élément $x^\star \in B(x, r_0) \cap \bigcap_n O_n$.
4. Conclure.
5. Application : Montrer que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est jamais complet, peu importe la norme.

Remarque 1.12. Ce théorème permet de démontrer le théorème de Banach-Steinhaus dans le cadre des espaces vectoriels normés, source de beaucoup de contre-exemples en analyse (sur l'approximation des applications continues par des polynômes ou polynômes trigonométriques notamment).

Théorème 1.13 (Prolongement des appplications uniformément continues)**.** *Soit $f : A \subseteq (X, d) \to (X', d')$ définie sur une partie dense A de X„ à valeurs dans un espace complet X'. Si f est uniformément continue sur A, alors elle admet un unique prolongement continu sur tout X, et ce prolongement est uniformément continu.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $(x_n) \in A$ une suite tendant vers x (une telle suite existe par caractérisation séquentielle d'un point adhérent). Puisque (x_n) est convergente, elle est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))$ est également de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que pour tout x, y, $d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, qui existe par définition de la continuité uniforme. Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe un rang N tel que pour tous $p, q \geq N$, on ait $d(x_p, x_q) < \delta$, de sorte que $d(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$ pour tous $p, q \geq N$.

L'espace (X', d') étant complet, la suite $(f(x_n))$ converge vers une limite ℓ, qui dépend a priori de la suite (x_n). Montrons qu'elle n'en dépend en fait pas. Si (y_n) est une autre suite tendant vers x, le même raisonnement conduit à ce que $(f(y_n))$ converge vers une limite ℓ'. Mais par l'inégalité triangulaire $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, x^\star) \to 0$ et donc par caractérisation séquentielle de la continuité uniforme, $\lim d(f(x_n), f(y_n)) = 0$. Or par l'inégalité triangulaire renversée, la fonction distance est continue, donc

$$\lim_n d(f(x_n), f(y_n)) = d(\ell, \ell'),$$

d'où $\ell = \ell'$ par l'axiome de séparation de la distance. On a ainsi montré que pour tout $x \in X$, il existe $\ell_x \in X'$ tel que

$$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_n x_n = x \implies \lim_n f(x_n) = \ell_x.$$

On pose alors pour tout $x \in X$, $\bar{f}(x) = \ell_x$. Par construction, si $x \in A$ alors $f(x) = \bar{f}(x)$ (prendre la suite constante égale à x), de sorte que $\bar{f}$ prolonge f.

Montrons que $\bar{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit alors $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \delta/2$. Par définition de $\bar{f}$, il existe des suites $(x_n), (y_n)$ d'éléments de A tendant respectivement vers x, y et tels que $\lim f(x_n) = \bar{f}(x), \lim f(y_n) = \bar{f}(y)$. Pour n assez grand, $d(x_n, y_n) < \delta$, de sorte que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. En passant à la limite dans cette inégalité on obtient $d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

L'unicité d'un prolongement continu se déduit immédiatement de la continuité d'un prolongement et de la densité de A. □

Exercice 1.8 (« Prolongement de la limite »)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions de (X,d) dans (X',d') où (X',d') est complet. On suppose que cette suite est uniformément équi-continue, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, \forall x, \in X, d(x,y) < \delta \implies d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Montrer que si (f_n) converge simplement sur une partie dense $A \subseteq X$, alors elle converge simplement sur tout X, et que la limite f est uniformément continue.

Théorème 1.14 (Théorème du point fixe de Picard)**.** *Soit $f : (X,d) \to (X,d)$ où (X,d) est complet. On suppose que f est k-contractante :*

$$\forall x, y, d(f(x), f(y)) \leq kd(y,x), \qquad \text{où } k \in [0,1[.$$

Alors

— *f admet un unique point fixe $x^\star$,*

— *la suite (x_n) définie par $\left| \begin{array}{l} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{array} \right.$ converge à vitesse linéaire vers $x^\star$. Plus précisément :*

$$d(x_n, x^\star) \leq k^n \min\left\{ \frac{d(x_1,x_0)}{1-k}, d(x^\star, x_0) \right\}.$$

Démonstration. Par récurrence immédiate

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &\dots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Pour tout $n, p \geq 0$, on a donc

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \left(\sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \left(\sum_{i \geq n} k^i \right) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Par conséquence, x_n est de Cauchy, donc elle est convergente vers une certaine limite ℓ par complétude de (X, d). Par continuité de f, en passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ on trouve $\ell = f(\ell)$ et ℓ est un point fixe de f. Si ℓ' est un autre point fixe, on a

$$d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leq kd(\ell, \ell'),$$

or $k < 1$ donc nécessairement $\ell = \ell'$. La fonction f admet donc un unique point fixe qu'on note $x^\star$. En passant à la limite $p \to \infty$ dans l'inégalité $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$ on obtient $d(x_n, x^\star) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$. Enfin, remarquons que

$$d(x_n, x^\star) = d(f^n(x_0) f^n(x^\star)) \leq k^n d(x_0, x^\star)),$$

ce qui conclut. $\square$

Remarque 1.15. Il existe nombre de variantes du théorème de point fixe de Picard. Dans certaines, f dépend en plus d'un paramètre supplémentaire λ, et sous certaines hypothèses le point fixe $x^\star_\lambda$ est régulier par rapport au paramètre.