Université Paris-Dauphine

—

Mise à niveau en analyse

—

Séance 2

Paul Pegon

2020–2021

Est indiqué en noir ce qui a été traité, en bleu ce qui n'a pas été traité mais qu'on encourage à regarder et en rouge des compléments qui pourront être lus en seconde lecture.

Table des matières

1.3 Compacité

Intérêt Trouver des sous-suites convergentes, obtenir des théorèmes d'existence (équations aux dérivées partielles d'origine variationnelle par exemple).

Généralités

Dans cette partie (X, d) désigne un espace métrique quelconque. Un recouvrement d'une partie $A \subseteq X$ est une famille de parties $(C_i)_{i \in I}$ de X telles que $A \subseteq \bigcup_i C_i$.

Définition 1.16 (Compacité, précompacité, compacité relative)**.** — (X, d) est *compact* si de tout recouvrement d'ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini (c'est la *propriété de Borel-Lebesgue*).

— (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut-être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

— Une partie $A \subseteq X$ est relativement compact si $\bar{A}$ est compact.

Remarque 1.17. La compacité (resp. précompacité) est une notion intrinsèque, relative à un espace métrique (X, d) tout entier. On dit qu'une partie $A \subseteq X$ est compacte (resp. précompacte) si l'espace métrique induit (A, d) est compact.

Proposition 1.18. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

- *X compact $\implies$ X précompact $\implies$ X borné.*
- *A précompact $\implies$ $\bar{A}$ précompact.*
- *A compact $\implies$ A fermé.*
- *X compact et $A \subseteq X$ $\implies$ (A est compact si et seulement si A est fermé).*
- *X précompact et $A \subseteq X$ $\implies$ A précompact.*

Proposition 1.19 (Compacts emboîtés)**.** *Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties compacts non vides de (X, d), alors $\bigcap_n K_n$ est non vide.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\bigcap_n K_n = \emptyset$. En passant au complémentaire, cela signifie que $X = \bigcup_n K_n^c$, mais les K_n^c sont ouverts, donc par la propriété de Borel-Lebesgue (définition de la compacité), on peut en extraire un sous recouvrement fini $(K_{n_i}^c)_{i \leq N}$, $N \in \mathbb{N}$, i.e. $X = \bigcup_{i \leq N} K_{n_i}^c$. Or les ensembles K_n sont ordonnés, de sorte que $\bigcup_{i \leq N} K_{n_i}^c = K_{n^\star}^c$ où $n^\star = \max_i n_i$, et donc $K_{n^\star} = \emptyset$, ce qui est exclu. □

Théorème 1.20 (Caractérisations de la compacité)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est compact (propriété de Borel-Lebesgue),*

(ii) *X vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente,*

(iii) *X est précompact et complet.*

Démonstration. Commençons par *(i)* $\implies$ *(ii)*. Soit (u_n) une suite de X. L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est

$$A = \bigcap_N \overline{\{u_p : p \geq N\}}$$

qui est l'intersection d'une suite décroissante de compacts emboîtés non vides, donc $A \neq \emptyset$. Ainsi, (u_n) a une valeur d'adhérence ℓ, donc il existe une suite extraire $(u_{\phi(n)})$ telle que $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

Montrons que *(ii)* $\implies$ *(iii)* et commençons par la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'absurde, supposons que X ne puisse être recouvert par des boules de rayon ε. On peut donc construire par récurrence une suite (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&u_0 \in X \\
&u_1 \text{ t.q. } d(u_0, u_1) \geq \varepsilon \\
&u_2 \text{ t.q. } \min\{d(u_0, u_2), d(u_1, u_2)\} \geq \varepsilon \\
&\dots \\
&u_{n+1} \text{ t.q. } \min_{i \leq n} d(u_i, u_{n+1}) \geq \varepsilon \\
&\dots
\end{aligned}$$

On ne peut en extraire de sous-suite convergente, car aucune sous-suite n'est de Cauchy : absurde.

Passons maintenant à la complétude. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Elle admet par la propriété de Bolzano-Weierstrass une valeur d'adhérence ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N > 0, \exists n^\star \geq N, d(u_{n^\star}, \ell) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite étant de Cauchy, il existe un rang N à partir duquel les éléments de la suite sont à distance au plus ε. Soit alors un $n^\star$ comme ci-dessus. On a pour tout $n \geq N$:

$$d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{n^\star}) + d(u_{n^\star}, \ell) \leq 2\varepsilon.$$

Par définition de la limite, $u_n \to \ell$ et X est complet.

Montrons que *(iii)* $\implies$ *(i)*. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de X. On dit qu'une partie $A \subseteq X$ est finiment recouverte (f.r.) si elle est recouverte par un nombre fini de U_i. Par l'absurde, supposons que X n'est pas f.r. Prenons $\varepsilon_0 = 2^0$. X est recouvert par un nombre fini de boules $B(x_j^0, \varepsilon_0)$, $j \in J_0$. Elles ne peuvent pas être toutes f.r., sans quoi X le serait aussi. Ainsi une boule $B_0 = B(x_{j_0}^0, \varepsilon_0)$ n'est pas fr. Cette boule est encore précompacte. Donc en posant $\varepsilon_1 = 2^{-1}$, B_0 peut être recouverte par un nombre fini de boules $B(x_j^1, \varepsilon_1), j \in J_1$. À nouveau, elles ne peuvent être toutes f.r. On itère ainsi le processus, par récurrence. On construit ainsi une suite de boules $B_i = B(x_{j_i}^i, 2^{-i})$, et en notant $y_i = x_{j_i}^i$ on a $d(y_{i+1}, y_i) \leq 2^{-i}$. Ainsi

$$d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1}) + \ldots d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \leq \sum_{i \geq n} 2^{-i} = 2^{-n+1}.$$

Par conséquent, la suite (y_n) est de Cauchy. Par complétude de X, il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})_n$ convergeant vers un point $x^\star$. Puisque (U_i) est un recouvrement de X, il existe $i^\star$ tel que $x^\star \in U_{i^\star}$. Comme $U_{i^\star}$ est un ouvert et que $\varepsilon_n \to 0$, pour n assez grand on a $B_{\phi(n)} = B(y_{\phi(n)}, \varepsilon_{\phi(n)}) \subseteq U_{i^\star}$ et donc $B_{\phi(n)}$ est fr : c'est exclu. □

Proposition 1.21. *Sur un espace métrique compact, une suite (x_n) est convergente si et seulement elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Exercice 1.9. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exemple 1.22. Les espaces suivants sont compacts :

— les fermés bornés en dimension finie (on le verra),

— les produits d'espaces compacts,

— $\mathcal{F} \coloneqq \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ t.q. } \mathrm{Lip}(f) \leq 1, f(0) = 0\}$, d'après le Théorème d'Ascoli. C'est une partie d'un espace de dimension infinie !

Théorèmes à connaître

Théorème 1.23 (Théorème de Heine)**.** *Si f est continue sur un espace métrique compact, alors elle est uniformément continue.*

Démonstration. Par l'absurde, si f n'était pas uniformément continue, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in X$ tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Par compacité, il existe une sous-suite $x_{\phi(n)} \to \ell$, et comme $d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) \to 0$, $(y_{\phi(n)})$ tend également vers ℓ. Par continuité de f, $\lim f(x_{\phi(n)}) = \lim f(y_{\phi(n)}) = f(\ell)$, et en passant à la limite dans $d'(f(x_\phi(n)), f(y_{\phi(n)})) \geq \varepsilon$ on obtient $0 = d'(\ell, \ell) \geq \varepsilon > 0$ ce qui est absurde. $\square$

Théorème 1.24. *L'image d'un compact par une application continue est continue.*

Démonstration. On va utiliser la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement de $f(K)$. On a

$$f(K) \subseteq \bigcup_i U_i \implies K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq \bigcup_i f^{-1}(U_i),$$

mais l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, et K est compact, donc il existe un nombre finie d'indices $i_0, \dots, i_n$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{k \leq n} f^{-1}(U_{i_k}) \implies f(K) \subseteq \bigcup_{k \leq n} f(f^{-1}(U_{i_k})) \subseteq \bigcup_{k \leq n} U_{i_k}.$$

On a donc extrait des U_i un recouvrement fini de $f(K)$, donc $f(K)$ est compact. $\square$

Corollaire 1.25. *Une fonction continue sur un compact à valeurs réelles atteint ses bornes.*

Exercice 1.10 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que la suite définie par $M_n := \sup_x \{f(x) - f_n(x)\}$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $\forall n, \exists x_n \in X, \forall k \leq n, M_n \leq f(x) - f_k(x)$.
3. En déduire qu'il existe $x^\star$ tel que $\lim M_n \leq f(x^\star) - f_k(x^\star)$ pour tout k puis que f_n converge uniformément vers f.
4. Application : On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[0, 1]$.

Théorème 1.26 (Théorème d'Ascoli)**.** *Soit $f_n : (X, d) \to (X', d')$ de (X, d) métrique compact vers (X', d') métrique complet une suite de fonctions qui est*

(A) uniformément équi-continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta \implies d'(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon,$$

(B) simplement relativement compact :

$$\forall x \in X, (f_n(x))_{n\in N} \text{ est relativement compact.}$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction f, qui est encore uniformément continue.

Remarque 1.27. Il existe des variantes au théorème d'Ascoli. On peut par exemple se passer de l'hypothèse de complétude de l'espace d'arrivée (en se plaçant dans le complété), et même de l'hypothèse métrique sur l'espace de départ (X est uniquement un espace topologique compact). Une autre variante suppose que la famille est simplement précompacte (plutôt que relativement compacte) et conclut à la précompacité de la famille de fonctions dans l'espace des fonctions continues muni de la distance uniforme.

1.4 Exercices

Exercice 1.11 (Normalité des espaces métriques)**.** Soient A et B deux fermés disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que f vaille 1 sur A et 0 sur B. Montrer que si A est bornée, on peut trouver une telle fonction qui soit de support bornée, i.e. telle que $\{f > 0\}$ est borné.

Exercice 1.12. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne sur un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d). On définit pour tout $x \in X$

$$\bar{f}(x) = \inf_{y\in A} f(y) + Ld(x, y).$$

Montrer que $\bar{f}$ est un prolongement L-lipschitzien de f à tout X.

Exercice 1.13. On considère $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Munir $\bar{\mathbb{R}}$ d'une distance métrisant la convergence à laquelle on s'attend.

Exercice 1.14. Soit $a_n \leq b_n$ avec a_n croissante et b_n décroissante, $b_n - a_n \to 0$. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer la convergence de la méthode de la dichotomie.

Exercice 1.15. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que si f' est bornée au voisinage de a, alors f se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que si de plus f' admet une limite en a, ce prolongement est dérivable en a.

Exercice 1.16. Les fonctions suivantes sont-elles contractantes ? Admettent-t-elle un point fixe ?

1. $f(x) = \cos(x/3) + 1/(2 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = x/2$ sur $]0, 1]$;
3. $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$;
4. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
5. $f(x) = 1 + x/2$ sur $[0, 1]$.

Exercice 1.17. Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ telle qu'une itérée T^p est contractante.

1. Montrer que T admet un unique point fixe, obtenu comme limite de $x_{n+1} = T(x_n), x_0 = a$ quelque soit $a \in X$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = f(x^2)$.

Exercice 1.18. On pose $F(x, y) = (x + \cos x/2 + \sin y/2, y - \sin y/2 + \cos x/2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que le système $F(x, y) = (a, b)$ admet toujours une solution.

Exercice 1.19. Montrer qu'une bijection continue $f : X \to Y$ où X est compact, est de réciproque continue.

Exercice 1.20. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exercice 1.21 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que f_n converge uniformément vers f. (On pourra considérer les quantité $M_n := \sup_x\{f(x) - f_n(x)\}$.)
2. On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la valeur absolue sur $[0, 1]$.

2 Espaces vectoriels normés

Intérêt Bon cadre pour généraliser $\mathbb{R}^d$ puis faire de l'analyse en dimension infinie (espaces de fonctions).

2.1 Généralités

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition 2.1 (Norme, espace normé)**.** Une norme est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogénéité),

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),

(iii) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un *espace vectoriel normé* (evn).

Remarque 2.2. Si seuls les deux premiers axiomes sont satisfaits, il s'agit alors d'une *semi-norme* et on parle d'espace vectoriel *semi-normé*.

Remarque 2.3. Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est naturellement muni d'une structure d'espace métrique en posant $d(x, y) = \|y - x\|$. Celle-ci est homogène et invariante par translation.

Proposition 2.4. *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, la norme est une application 1-Lipschitzienne (et donc en particuleir continue) d'après l'inégalité triangulaire renversée :*

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\|.$$

De plus, les applications $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont continues de $\mathbb{R} \times E$ dans E et de $E \times E$ dans E respectivement.

Par abus, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, une même notation $\|\cdot\|$ sera utilisée pour toutes les normes. Si T est une applications linéaire entre deux evn E et F, on définit

$$\|T\| \coloneqq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

L'application linéaire T est continue si et seulement si $\|T\| < +\infty$, d'après l'exercice suivant, et $\|\cdot\|$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F, appelée *norme d'opérateur*.

Exercice 2.1. Soit T une application linéaire de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\|T\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$;
b) T est Lipschitzienne ;
c) T est continue ;
d) T est continue en 0 ;
e) T est bornée sur $B_f(0, 1)$.
f) T est bornée sur une boule $B(x, r)$ ou $B_f(x, r)$.

Exemple 2.5. Les espaces suivants sont des evn :

— $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ où $\|(x_1, \dots, x_d)\|_p = \left(\sum_{i \leq d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,
— $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ où $\ell^p(\mathbb{N}, E)$ avec E evn,
— l'espace des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(X, E)$ où X est quelconque, E est un evn, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$,
— l'espace $\mathcal{C}(K, E)$ des fonctions continues sur un métrique compact K à valeurs dans un evn E muni de la convergence uniforme,
— les espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ définis dans un prochain chapitre.

En analyse, on recherche de la *compacité* pour résoudre des problèmes d'existence. On ne peut pas espérer qu'un evn non trivial soit compact : il n'est même pas borné. Peut-on néanmoins espérer que $B_f(0, 1)$ le soit ? Presque jamais... sauf en dimension finie, comme nous allons le voir maintenant.

2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Il s'agit de généraliser les propriétés de $\mathbb{R}^d$, en « oubliant » le produit scalaire canonique pour l'instant. Dans $\mathbb{R}^d$, la norme infinie est définie par $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le d}|x_i|$, et les boules pour cette norme sont simplement des cubes ; on note $Q(x,r) = \{y : \|y-x\|_\infty \le r\}$ le cube centré en x de côté $2r$. Observons que :

— $[-1,1]$ est compact (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass),

— en dimension $d \ge 1$, le cube unité $Q(0,1) = [-1,1]^d$ est compact comme produit d'espaces compacts,

— tous les cubes $Q(x,r)$ sont aussi compacts comme translatés et dilatations du cube unité (ces opérations étant continues),

— les bords des cubes $\partial Q(x,r) = \{y : \|x-y\|_\infty = r\}$ sont par conséquent également compacts.

On peut déduire les principales propriétés des evn de dimension finie à partir de ces observations.

Proposition 2.6 (Équivalence des normes)**.** *Si E est un evn de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et $\|\cdot\|$ une norme quelconque. Si x se décompose $x = \sum x_i e_i$ dans cette base, on pose :

$$\|x\|'_\infty \coloneqq \max_{1\le i\le d}|x_i|.$$

Montrons que $\|\cdot\|'_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes. Remarquons tout d'abord que l'application $\phi : (x_i)_{1\le i\le d} \mapsto \sum_i x_i e_i$ réalise une isométrie linéaire entre $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|'_\infty)$, de sorte que les sphères $S'_\infty(x,r)$ et boules fermées $B'_\infty(x,r)$ dans $(E, \|\cdot\|'_\infty)$ sont compacts d'après les obervations faites en préambule. On a pour tout $x \in E$, par propriétés d'une norme :

$$\|x\| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \le \sum_i \|x_i e_i\| \le \sum_i \|e_i\| \max_i |x_i| = C\|x\|'_\infty,$$

où $C \coloneqq \sum_i \|e_i\|$. Par conséquent, l'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne donc continue sur l'espace $(E, \|\cdot\|'_\infty)$. Donc elle atteint ses bornes sur le compact $S'_\infty(0,1)$, en particulier son infimum : il existe $x^\star \in S'_\infty(0,1)$ tel que

$$\inf_{x:\|x\|'_\infty=1} \|x\| = \|x^\star\| \eqqcolon c > 0.$$

Par homogénéité des normes, on a donc $\|x\| \ge c\|x\|'_\infty$ pour tout $x \in E$, ce qui conclut, puisqu'on a montré d'autre part que $\frac{1}{C}\|x\|'_\infty \le \|x\|$. □

Proposition 2.7 (Compacts en dimension finie)**.** *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. On a déjà vu que dans un espace métrique, une partie compacte est nécessairement fermée et bornée, il s'agit de voir la réciproque. En gardant les notations de la preuve précédente, les normes étant équivalentes, il suffit de montrer la proposition pour l'espace $(E, \|\cdot\|'_\infty)$, et même uniquement pour $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ d'après l'isométrie linéaire ϕ. Prenons alors A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Par définition du caractère borné, A est incluse dans un cube fermé $Q(x, r)$, donc A est compact comme partie fermée de l'espace compact $Q(x, r)$. □

Proposition 2.8. *Un evn de dimension finie est toujours complet.*

Démonstration. De la même manière qu'à la preuve précédente, il suffit de remarquer que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. □

Il s'agit maintenant de montrer que la compacité de la boule unité fermée est *spécifique* à la dimension finie. Commençons par un lemme de F. Riesz.
,

Lemme 2.9 (Lemme de F. Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel strict. Pour tout $r \in]0, 1[$, il existe $u \in E \setminus F$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geq r$.*

Démonstration. L'idée est de prendre u dans une direction « presque orthogonale » à F. Attention, on ne dispose pas de produit scalaire ! Dans notre cadre normé plus général, on peut considérer comme « orthogonal » à une partie A, un vecteur dirigé par $x - p$, où p est un projeté de x sur A, i.e. un point $p \in \operatorname{argmin}_{y \in A} d(x, y)$.

Bref, soit $x \in E \setminus F$. Par définition d'un infimum, puisque $d(x, F)/r > d(x, F)$, il existe $v \in F$ tel que

$$d(x, F) \leq \|x - v\| \leq \frac{d(x, F)}{r}.$$

On pose donc $u = \dfrac{x - v}{\|x - v\|}$. Par construction, $u = 1$, et par ailleurs, si $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\|u - y\| = \left\| \frac{x - v}{\|x - v\|} - y \right\| &= \frac{1}{\|x - v\|} \|x - (v + y\|x - v\|)\| \\
&\geq \frac{1}{\|x - v\|} d(x, F) \quad \text{car} \quad v + y\|x - v\| \in F \\
&\geq r.
\end{aligned}$$

D'où en prenant l'infimum sur $y \in F$: $d(u, F) \geq r$. □

Théorème 2.10 (Théorème de F. Riesz)**.** *Soit E est un evn. Sa boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. On a déjà vu que si E est de dimension finie, sa boule unité fermée est compacte. Montrons la réciproque par l'absurde, en supposant que $B_f(0, 1)$ est compact et que E n'est pas de dimension finie. Commençons par prendre un point u_0 de norme

1 puis $F_0 = \text{Vect}\{u_0\}$. Comme E n'est pas de dimension finie, $F_0 \neq E$ donc d'après le lemme de F. Riesz (avec $r = 1/2$), il existe $u_1 \in E \setminus F_0$ de norme 1 tel que $d(u_1, F_0) \geq \frac{1}{2}$, et on pose $F_1 = \text{Vect}\{u_0, u_1\}$. À nouveau, $F_1 \neq E$ car E n'est pas de dimension finie, et on continue par récurrence. On construit ainsi une suite de vecteurs unitaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de sous-espaces vectoriels $F_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tels que pour tout n, $d(x_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$ et en particulier pour tous $n \neq m$,

$$\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, il est impossible d'extraire de (u_n) une suite qui soit de Cauchy, et donc qui soit convergente : ceci contredit la compacité de la sphère unité ! □

Remarque 2.11. En réalité, la preuve montre que si E est de dimension infinie, la sphère unité n'est pas précompacte : les x_i (et donc la sphère unité non plus) ne peuvent être recouverts par un nombre fini de boules de rayon $1/4$.

2.3 Espaces de Banach

Définition 2.12 (Espace de Banach)**.** Un espace normé complet est appelé *espace de Banach*.

Exercice 2.2. Les espaces suivants sont-ils des espaces de Banach ? Justifiez.

1. $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
2. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
3. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 ;
4. $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \{(u_n) : \sum |u_n|^p < \infty\}$ muni de la norme ℓ^p.

Il est possible de caractériser un espace de Banach en regardant la convergence de ses séries.

Théorème 2.13 (Caractérisation par convergence absolue)**.** *Un evn E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Supposons que E est un espace de Banach, et prenons une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E qui est absolument convergente, au sens où la série numérique $\Sigma\|x_n\|$ est convergente. On dénote la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. On a

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \\
&\leq \sum_{k\geq n+1} \|x_k\| \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0,
\end{aligned}$$

de sorte que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy dans E, donc elle converge.

Réciproquement, supposons que toute suite ACV est CV. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Il suffit de trouver une sous-suite convergente, alors nécessairement puisque (x_n) est de Cauchy, elle sera convergente. Par définition de la complétude, il existe n_0 tel que $\forall p, q \geq n_0$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-0}$. Il existe ensuuite $n_1 > n_0$ tel que $\forall p, q \geq n_1$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-1}$ et on continue par récurrence. On construit par là une extractrice $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite d'entiers strictement croissante, telle que pour tout k, $\forall p, q \geq n_k$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$, et en particulier $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Remarquons que $(x_{n_k})_k$ converge si et seulement si la série $\Sigma(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge. Or $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ pour tout k, donc la série $\Sigma\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est convergente car positive majorée par le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison 1/2). Ainsi $\Sigma(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Au final la suite extraite (x_{n_k}) est convergente, d'où le résultat. □

Exercice 2.3. Montrer que l'espace $L^1([0,1], \mathbb{R})$ est un espace de Banach en utilisant le critère de convergence absolue des espaces de Banach.

Théorème 2.14 (Prolongement des applications linéaires continues)**.** *Si F est un sous-espace vectoriel dense de E et $T : F \to G$ une aplication linéaire continue à valeurs dans un espace de Banach G, alors T admet un unique prolongement continu à E tout entier, qui en fait une application linéaire continue $\bar{T}$ telle que $\|\bar{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de prolongement des applications uniformément continues à valeurs complètes. □

Définition 2.15 (Espace dual)**.** Si E est un espace vectoriel normé, l'espace des *formes linéaires continues* $E' := \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$, muni de la norme d'opérateur, est appelé le *dual* de E.

Remarque 2.16. Puisque $\mathbb{R}$ est un espace de Banach, E' est toujours un espace de Banach (que E le soit ou non).

Nous ne développerons pas la théorie de la dualité dans un espace de Banach maintenant. Nous n'en aurons pas besoin dans les espaces de Hilbert, où le dual s'identifie canoniquement, comme on le verra, à l'espace de Hilbert primal (i.e. de départ).