Université Paris-Dauphine

—

Mise à niveau en analyse

—

Séance 3

Paul Pegon

2020–2021

Est indiqué en noir ce qui a été traité, en bleu ce qui n'a pas été traité mais qu'on encourage à regarder et en rouge des compléments qui pourront être lus en seconde lecture.

Table des matières

2.4 Espaces de Hilbert

Intérêt Généralisation de $\mathbb{R}^d$ en tant qu'espace euclidien à la dimension infinie.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.17 (Produit scalaire)**.** Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui est

(i) symétrique : $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

(ii) définie : $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$,

(iii) positive : $\langle x, x\rangle \geq 0$.

Définition 2.18 (Produit hermitien)**.** Un produit hermitien sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, c'est-à-dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{C}$ linéaire à gauche et semi-linéaire à droite [1] au sens où $\langle x, y + \lambda y'\rangle = \langle x, y\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y'\rangle$ pour tous $x, y, y' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et qui est de plus

1. Attention, dans certaines définitions, elle est linéaire à droite et semi-linéaire à gauche.

(i) hermitienne : $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,

(ii) définie : $\langle x, x\rangle = 0 \implies x = 0$,

(iii) positive [2] : $\langle x, x\rangle \geq 0$.

Un produit scalaire munit un espace vectoriel d'une structure assez proche de celle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Un certain nombre d'identités et d'inégalités sont encore vérifiées, en particulier la *fondamentale* et *très utile* inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition 2.19 (Inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkowski)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit sclaire (resp. hermitien), en notant $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

(Cauchy-Schwartz) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, *avec égalité ssi x et y sont liés,*

(Minkowski) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *avec égalité ssi x et y sont positivement liés, i.e. il existe $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda x = \mu y$.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$. On écrit que la norme au carré de $\|x\|y - \|y\|x$ est positive et on utilise l'identité remarquable $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$ sur $\mathbb{R}$, resp. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle$ sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|\|x\|y - \|y\|x\|^2 \geq 0 &\iff \|x\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\langle x, y\rangle \geq 0 \\ &\iff (\|x\|\|y\|)^2 \geq \langle x, y\rangle \|x\|\|y\| \\ &\iff \langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|, \text{ resp. } \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Remarquons que l'inégalité de Minkowski est équivalente à :

$$\begin{aligned} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\| \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ resp. } \operatorname{Re}\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\| \text{ sur } \mathbb{C}, \end{aligned}$$

donc celle-ci est vérifiée. Remarquons d'après (2.1) qu'on a égalité dans Minkowski ssi $\|x\|y = \|y\|x$, càd x et y sont liés.

Pour l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suffit de remarquer qu'il existe λ tel que $\langle \lambda x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ dans $\mathbb{R}$, resp. $\operatorname{Re}\langle \lambda x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$ dans $\mathbb{C}$: dans $\mathbb{R}$, prendre $\lambda = \pm 1$, et dans $\mathbb{C}$ prendre $\lambda = e^{-i\theta}$ où θ est un argument de $\langle x, y\rangle$. On remplace alors x par λx dans (2.1) pour trouver l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et on a égalité ssi

$$\|\|\lambda x\|y - \|y\|\lambda x\|^2 = 0 \iff \|x\|y = \lambda\|y\|x,$$

et donc x et y sont liés. Réciproquement, il est clair que si x et y sont liés, on a égalité dans Cauchy-Schwartz. □

On peut reconstituer le produit scalaire ou hermitien à partir de la norme qu'elle induit à l'aide des *formules polaires*.

2. Remarquons que le premier point garantit que $\forall x, \langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.20 (Formules polaires)**.** *Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme $\|\cdot\|$, pour tous x, y :*

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

et si E est muni d'un produit hermitien :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\sum_{\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}} \lambda \|x + \lambda y\|^2}{8}.$$

Exercice 2.4. Démontrer les formules polaires : si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme $\|\cdot\|$, pour tous x, y,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

et si E est muni d'un produit hermitien,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\sum_{\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}} \lambda \|x + \lambda y\|^2}{8}.$$

Proposition 2.21 (Identité du parallélogramme)**.** *Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ou produit hermitien, alors pour tous $u, v \in E$,*

$$\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2} = \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2.$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

Exercice 2.5. Soit E un espace vectoriel réel (resp. complexe).

1. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire (resp. hermitien), de norme $\|\cdot\|$, montrer que celle-ci vérifie l'identité du parallélogramme.
2. Réciproquement, supposons que $\|\cdot\|$ est une norme sur E qui vérifie l'identité du parallélogramme, montrer que la formule polaire réelle (resp. complexe) définit un produit scalaire (resp. hermitien).

Définition 2.22 (Espace de Hilbert)**.** Un *espace de Hilbert* réel (resp. complexe) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel) muni d'un produit scalaire (resp. produit hermitien) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont la norme associée $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ en fait un espace de Banach.

Le produit scalaire et la complétude garantissent une propriété fondamentale des espaces de Hilbert : l'existence de projections.

Théorème 2.23 (Théorème de projection)**.** *Si H est un espace de Hilbert, $C \subseteq H$ est un convexe fermé et x un point de H, alors il existe un unique minimiseur*

$$p \in \operatorname{argmin}_{p \in C} \|p - x\|,$$

appelé projeté de x sur C et noté $p_C(x)$. C'est l'unique p tel que *(i)* $p \in C$,

(ii) $\langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \quad (\forall y \in H)$ *si* H *est un Hilbert réel,*
$\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \quad (\forall y \in H)$ *si c'est un Hilbert complexe.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite d'éléments de C telle que $\|y_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{y\in C}\|y - x\| \doteq d(x,C)$. Montrons que (y_n) est de Cauchy. On applique l'identité du parallélogramme à $u = y_p - x$ et $v = y_q - x$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{y_q - y_p}{2}\right\|^2 + \left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y_q - x\|^2 + \|y_p - x\|^2\right) \\
\overset{\frac{1}{2}(y_p+y_q)\in C}{\Longrightarrow}\ &\left\|\frac{y_q - y_p}{2}\right\|^2 + d(x,C)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|y_q - x\|^2 + \|y_p - x\|^2\right) \\
&\Longrightarrow\ \frac{1}{4}\|y_q - y_p\|^2 \leq \frac{(\|y_q - x\|^2 - d(x,C)^2) + \|y_p - x\|^2 - d(x,C)^2)}{2} \\
&\qquad \xrightarrow{p,q\to+\infty} 0,
\end{aligned}$$

de sorte que (y_n) est de Cauchy. Comme H est complet, (y_n) converge vers un certain p qui est dans C car C est fermé. Par continuité de la norme, on obtient $\|x-p\| = d(x,C)$, donc $p \in \mathrm{argmin}_{y\in C}\|x-y\|$.

Montrons l'unicité de p. Prenons $\tilde{p} \in \mathrm{argmin}_{y\in C}\|x-y\|$, et à nouveau utilisons l'identité du parallélogramme, avec $u = p - x$ et $v = \tilde{p} - x$:

$$\begin{aligned}
0 \leq \left\|\frac{p-\tilde{p}}{2}\right\|^2 &= \frac{\|x-p\|^2 + \|x-\tilde{p}\|^2}{2} - \left\|\frac{p+\tilde{p}}{2}\right\|^2 \\
&= d(x,C)^2 - \underbrace{\left\|\frac{p+\tilde{p}}{2}\right\|^2}_{\geq d(x,C)^2 \text{ car } \frac{p+\tilde{p}}{2}\in C} \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

donc on a égalité et $p = \tilde{p}$.

Passons à la caractérisation du projeté, en commençant par montrer que $p = p_C(x)$ vérifie les propriétés souhaitées. Évidemment, $p_C(x) \in C$. D'autre part, soit $y \in C$. Par minimalité $\|y-x\|^2 \geq \|p-x\|^2$, soit en développant (par exemple sur $\mathbb{C}$) $\|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \geq \|p\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, p\rangle$. En remplaçant y par $y_t = p + t(y-p)$ où $t \in]0,1]$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\|y_t\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \geq \|p\|^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \leq \|y_t\|^2 - \|p\|^2 = 2t\,\mathrm{Re}\langle p, y-p\rangle + t^2\|y-p\|^2
\end{aligned}$$

On divise par $2t$ puis en faisant $t \to 0$, on obtient bien $\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \leq \mathrm{Re}\langle p, y-p\rangle$. On procède de la même manière sur $\mathbb{R}$. Supposons réciproquement que $p \in C$ est un point tel que $\mathrm{Re}\langle y-p, x-p\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. En utilisant l'identité remarquable on obtient

$$\begin{aligned}
\|y-x\|^2 &= \|(y-p)-(x-p)\|^2 \\
&= \|x-p\|^2 + \|y-p\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle
\end{aligned}$$

ce qui équivalent à

$$\begin{aligned}\|p-x\|^2-\|y-x\|^2 &= -\|y-p\|^2+2\operatorname{Re}\langle x-p,y-p\rangle \\ &\le 0+0,\end{aligned}$$

d'où $\|p-x\|^2 \le \|y-x\|^2$ pour tout $y \in C$, ce qui conclut. $\square$

Dans le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé F, cela permet d'obtenir une décomposition de H en somme d'espaces orthogonaux.

Définition 2.24 (Orthogonalité)**.** Soit H un espace de Hilbert. On dit que x et y sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$ si $\langle x,y\rangle = 0$. Étant donné un sev F, on définit l'espace orthogonal à F comme $F^\perp = \{y : x \perp y\}$.

Notons que par continuité et linéarité du produit scalaire (resp. sesquilinéarité du produit hermitien), $F^\perp$ est toujours un sev fermé et que $\bar{F}^\perp = F^\perp$.

Proposition 2.25. *Soit H un espace de Hilbert et F un sev fermé de H. Les applications $p_F, p_{F^\perp}$ sont les projecteurs orthogonaux sur F et $F^\perp$ respectivement (elles sont en particulier linéaires) et H se décompose en sous-espaces supplémentaires :*

$$\begin{aligned}H &= F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \\ \mathrm{Id} &= p_F + p_{F^\perp}.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x \in H$. Il se décompose en $x = p+q$ où $p = p_F(x)$ et $q = x-p_F(x)$. On sait que (dans $\mathbb{C}$ par exemple) $\operatorname{Re}\langle x-p,y-p\rangle \le 0$ pour tout $y \in F$, c'est-à-dire $\operatorname{Re} e^{i\theta}\langle q,y\rangle \le 0$ pour tout $y \in F$ car F est un $\mathbb{C}$-ev. À y fixé, on peut trouver θ tel que $\operatorname{Re} e^{i\theta}\langle q,y\rangle = |\langle q,y\rangle|$, de sorte que $|\langle q,y\rangle| = 0$ pour tout $y \in F$. Par conséquent, $x-p_F(x) \in F^\perp$, de sorte que $H = F + F^\perp$. Nécessairement $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ car F et $F^\perp$ sont orthogonaux, et ainsi p_F est la projection linéaire sur F parallèlement à $F^\perp$.

En faisant le même raisonnement avec $F^\perp$ au lieu de F, on a la somme directe $H = F^\perp \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp\perp}$ et x s'y décompose $x = p_{F^\perp}(x) + (x-p_{F^\perp}(x))$. Or $x = (x-p_F(x))+p_F(x)$ et $x-p_F(x) \in F^\perp$ tandis que $p_F(x) \in F \subseteq F^{\perp\perp}$, donc par unicité de la décomposition dans $F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$, on obtient $x-p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$ et $p_F(x) = x-p_{F^\perp}(x)$. D'où la décomposition $\mathrm{Id} = p_F + p_{F^\perp}$. $\square$

Remarque 2.26. Remarquons qu'on a à la fois $H = F \oplus F^\perp$ et $H = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$, et comme F est un sev de $F^{\perp\perp}$, alors $F = F^{\perp\perp}$.

Récapitulons quelques propriétés sur les orthogonaux, dont les preuves ont déjà été données ou sont immédiates.

Proposition 2.27. *Si H est un espace de Hilbert et F un sev.*

- *$F^\perp$ est toujours fermé,*
- *$F^\perp = \bar{F}^\perp$,*

— $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

Proposition 2.28 (Hyperplans et orthogonalité)**.** *Si H est un espace de Hilbert et F est un hyperplan fermé, i.e. $F = \{x : f(x) = 0\}$ où $f \in E'$ est une forme linéaire non nulle, alors $F^\perp$ est une droite $F^\perp = \operatorname{Vect} u$, $u \in F^\perp, u \neq 0$.*

Démonstration. Soit $u \in F^\perp$, $u \neq 0$. En particulier $u \notin F$, donc $f(u) \neq 0$. Prenons $x \in H$ puis notons $x_\lambda = f - \lambda u$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité $f(x_\lambda) = f(x) - \lambda f(u)$, et donc il existe λ tel que $f(x_\lambda) = 0$, i.e. $x_\lambda \in F$. Bref

$$x = \underbrace{x_\lambda}_{\in F} + \underbrace{\lambda u}_{\in F^\perp},$$

d'où $x_\lambda = p_F(x)$ et $\lambda u = p_{F^\perp}(x)$ de sorte que $F^\perp = \operatorname{Im} p_{F^\perp} \subseteq \operatorname{Vect} u$, et on a égalité $F^\perp = \operatorname{Vect} u$ car $u \in F^\perp$. $\square$

Dualité

Étant donné $y \in H$, l'application $j_y : H \to K, x \mapsto \langle x, y\rangle$ appartient à H', et $\|j_y\| \leq \|y\|$ d'après Cauchy-Schwartz. Sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$), l'application $j : H \to H', y \mapsto j_y$ est linéaire (resp. semi-linéaire) continue.

Théorème 2.29 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Si H est un Hilbert réel (resp. complexe), il s'identifie à son dual, au sens où j est une isométrie linéaire (resp. semi-linéaire) bijective.*

Démonstration. Plaçons-nous dans le cas réel. On remarque que $j_y(y) = \|y\|^2 > 0$ si $y \neq 0$, donc j_y est non nulle et j est injective. De plus, c'est une isométrie : d'une part d'après Cauchy-Schwartz, $\|j_y\| \leq \|y\|$, et d'autre part $j_y(y) = \|y\|\|y\|$, donc $\|j_y\| \geq \|y\|$ et on a inégalité.

Montrons que j est surjective. Soit f une forme linéaire non nulle et $F = \{x : f(x) = 0\}$. On sait que $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. D'après la Proposition 2.28, il existe $u \in F^\perp$ non nul tel que $F^\perp = \operatorname{Vect} u$, et on peut supposer que $f(u) = \|u\|^2$ (quitte à multiplier u par un scalaire bien choisi). Vérifions que $j_u = f$ sur F et sur $F^\perp$. Si $x \in F$, $f(x) = 0 = \langle x, u\rangle$. Si $x \in F^\perp$, il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda u$. D'une part, $f(x) = \lambda f(u) = \lambda\|u\|^2$, et d'autre part $\langle x, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda\|u\|^2$, d'où $f(x) = \langle x, u\rangle$. Par conséquent j_u et f coïncident sur F et $F^\perp$, donc sur leur somme H, d'où le résultat. $\square$

Bases hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). À la notion de base venant de l'algèbre linéaire, adaptée au cas de la dimension finie, on substitue la notion de *base hilbertienne*, qui est adaptée à la dimension infinie.

Définition 2.30 (Base hilbertienne)**.** Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est une base hilbertienne si

(i) $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq$ (famille orthogonale),

(ii) $\|e_i\| = 1$ pour tout i (famille unitaire),

(iii) $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i : i \in I\}}$ (famille totale).

Proposition 2.31. *Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Si l'espace H est de dimension finie, le résultat est évident : il suffit de prendre une base (algébrique) orthonormée. Si H est de dimension infinie, soit (x_n) une suite dense. Posons $F_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On peut construire une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ orthonormée telle que pour tout n, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F_n, par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (le même qu'en algèbre linéaire, sans que le procédé ne s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations, dans notre cas) : ayant construit une bon $(e_1, \ldots, e_n)$ de F_n, si $x_{n+1} \notin F_n$, alors on complète cette famille (par Gram-Schmidt) en une bon $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de F_{n+1}, et on itère. Par construction, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne. $\square$

Théorème 2.32 (Décomposition hilbertienne, inégalités de Bessel)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n : n < N\}, N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ une famille orthonormée, finie ou non. Pour tout $n < N$, on note $F_n = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$, et $F = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n : n < N\}}$. Alors*

(i) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star}\langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente dans H et $p_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$,

(ii) $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{n\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$.

En particulier $\|x\|^2 \geq \sum_{n\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$ (inégalité de Bessel).

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$. On a par définition $S_n \in F_n$ et $\langle x - S_n, e_k\rangle = 0$ pour tout $k \leq n$, donc $x - S_n \in F_n^\perp$ par linéarité et $S_n = p_{F_n}(x)$.

Puisque $x = S_n + (x - S_n)$ et $S_n \perp (x - S_n)$, $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$, et en particulier $\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$. En remarquant que $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$ par orthogonalité des e_k, cela implique que la série posiive $\Sigma_k|\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente car majorée par $\|x\|^2$. En passant à la limite, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Montrons que (S_n) est de Cauchy. On a

$$\begin{aligned}\|S_{n+p} - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\langle x, e_k \rangle|^2 \\ &\xrightarrow{n \to +\infty} 0.\end{aligned}$$

Ainsi (S_n) converge vers un certain $\tilde{x} \in H$ et $\|S_n\|^2 \to \|\tilde{x}\|^2$. Par ailleurs $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \to \sum_{k \geq 1} |\langle x, e_k \rangle|^2$, d'où $\|\tilde{x}\| = \sum_{k \geq 1} |\langle x, e_k \rangle|^2$.

Reste à montrer que $\tilde{x} = p_F(x)$. Par continuité du produit scalaire, on a pour tout i :

$$\langle \tilde{x}, e_i \rangle = \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle,$$

la dernière égalité venant de l'orthogonalité de la famille. Ainsi $\langle \tilde{x} - x, e_i \rangle = 0$ pour tout i, et comme $F = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n : n < N\}}$, cela veut dire que $\tilde{x} - x \in F^\perp$ d'où $p_F(x) = \tilde{x}$. $\square$

Corollaire 2.33 (Décomposition hilbertienne, égalité de Parseval)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n : n < N\}, N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ base orthonormée (finie ou non). Alors*

(i) la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$,

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_k \rangle|^2$ (égalité de Parseval)

Exercice 2.6 (Base de Fourier)**.** On note $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions boréliennes complexes f définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, telles que $\int_0^{2\pi} |f|^2 < +\infty$ (modulo l'égalité presque partout), muni du produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f\bar{g}$. Montrer que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ définie par $e_n(x) = e^{ix}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. (On pourra admettre que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$.)

2.5 Exercices

Exercice 2.7. Montrer que l'image d'une application linéaire $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ k-dissipative, i.e. $\|T(x)\| \geq k\|x\|$ pour tout $x \in E$, sur un Banach E est fermée.

Exercice 2.8. On considère l'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. On considère le sous-ensemble $K = \{(u_n) : \forall n, |u_n| \leq \varepsilon_n\}$ où $(\varepsilon_n) \in \ell^p$. Montrer que K est compact. (On pourra utiliser le critère de complétude et pré-compacité.)
2. On considère une partie K fermée, bornée et équi-intégrable, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall (u_n) \in K, \quad \sum_{n \geq N} |u_n|^p \leq \varepsilon.$$

   Montrer que K est compacte.

3. Donner un exemple de compact K ne satisfaisant pas a).
4. Montrer réciproquement que tout compact K de ℓ^p est équi-intégrable.

Exercice 2.9. Soit E, E' deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide, alors $E = F$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(E, E')$. En déduire l'équivalence :
   a) T est surjective ;
   b) T est d'image ouverte ;
   c) $T(E)$ est d'interieur non vide.

Exercice 2.10. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Montrer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme d'opérateur est un Banach.

Exercice 2.11. Montrer qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2.12 (Intégrale de Riemann des fonctions réglées)**.** Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_b([0,1], E)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier, càd de la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{I_i}$ où les I_i sont des intervalles inclus dans $[0,1]$ et $\alpha_i \in E$. On définit son intégrale par

$$I(f) = \sum_i \ell(I_i)\alpha_i.$$

1. Montrer que c'est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans E.
2. En déduire un prolongement à $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{E}}$, l'espace des fonctions réglées.
3. Montrer qu'une fonction continue est une fonction réglée.

Exercice 2.13. Sur $[0,1]$, on considère une suite de subdivisions $\Delta_n : 0 = x_0^n < \ldots < x_{N_n}^n = 1$, pointée par $\xi_i^n \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, dont le pas $\sigma_n = \max\{x_{i+1}^n - x_i^n\} \to 0$. On définit les sommes de Cauchy :

$$S_n(f) = \sum_i f(\xi_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n).$$

Montrer que S_n converge simplement vers I sur l'espace des fonctions réglées (voir l'exercice précédent).

Exercice 2.14. Montrer que si une intégrale est absolument convergente à valeurs dans un Banach, i.e. $\int_0^{+\infty} \|f\| < +\infty$, elle est convergente : la limite $\lim M \to +\infty \int_0^M f$ existe.

Exercice 2.15. Soit E un espace de Banach. On considère $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$.

1. Montrer que $\mathrm{Id} - T$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$, dont on justifiera l'existence.

2. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $S^2 = \mathrm{Id} + T$.

Exercice 2.16. On considère les espaces $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $B : \ell^1 \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$, est bien définie par la formule
$$B(u, v) = \sum_n u_n v_n$$
et qu'elle est bilinéaire et continue. En déduire que $B(\cdot, \bar{v}) \in (\ell^1)'$ et $B(\bar{u}, \cdot) \in (\ell^\infty)'$ pour tous $\bar{u}, \bar{v}$, et que les applications $i_1 : \ell^\infty \to (\ell^1)'$, $i_1 : \bar{v} \mapsto B(\cdot, \bar{v})$ et $i_\infty : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $i_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u}, \cdot)$ sont continues.
2. Montrer que i_1 est une isométrie bijective (« ℓ^∞ est le dual de ℓ^1 »).
3. Montrer que i_∞ est une isométrie mais n'est pas bijective.
4. On considère $j_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u}, \cdot)_{|c_0}$, $j_\infty : \ell^1 \to (c_0)'$. Montrer que j_∞ est une isométrie bijective (« ℓ^1 est le dual de c_0 »).

3 Théorie de la mesure

Intérêt Généraliser l'intégrale de Riemann pour obtenir des théorèmes d'interversion limite-intégrale puissants, de bons espaces fonctionnels (complétude des espaces L^p), pouvoir intégrer ou « moyenner » sur tous types d'espaces (y compris de dimension infinie), donner une base commune à l'analyse et aux probabilités, décrire finement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ (ou d'autres espaces) en fonction de leur « taille » mesurée selon différentes *mesures* (théorie géométrique de la mesure), entre autres...

3.1 Tribus et mesures

On veut définir une mesure sur un ensemble X comme une quantité positive associée à ses sous-ensembles, et qui vérifie certaines propriétés assez naturelles : un ensemble vide a mesure nulle, la mesure de deux ou plusieurs morceaux disjoints doit être la sommme des mesures de chaque morceau. On a toujours en tête la droite réelle, et la mesure qu'on a envie d'attribuer à un intervalle $[a, b]$: sa longueur $b - a$. Or un résultat important stipule qu'il n'existe pas de mesure sur toutes les parties de $\mathbb{R}$, qui donne la longueur aux intervalles et vérifie les propriétés souhaitées ! La solution est de ne pas chercher à mesurer *toutes* les parties de $\mathbb{R}$, mais seulement une collection plus réduite : la tribu engendrée par les intervalles, appelée tribu de Borel.

Définition 3.1 (Clans et tribus)**.** Soit X un ensemble.

— Un *clan*, ou *algèbre*, sur X est une collection de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que
  — $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,
  — $A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \mathcal{C}$,
  — $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{1 \le n \le N} A_n \in \mathcal{C}$,

— $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{1 \leq n \leq N} A_n \in \mathcal{C}$.

— Une *tribu*, ou *σ-algèbre*, sur X est une collection de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que
  - — $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,
  - — $A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \mathcal{C}$,
  - — $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$,
  - — $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

Exemple 3.2. — $\{\emptyset, X\}$ est la *tribu grossière* sur X.

— $\mathcal{P}(X)$ est la *tribu discrète* sur X.

— La collection formée des réunions finies d'interveralles disjoints de $\mathbb{R}$ est une algèbre.

— La collection des parties finies ou co-finies (de complémentaire fini) d'un ensemble X est une algèbre sur X.

— La collection des parties dénombrables[3] ou co-dénombrables (de complémentaire dénombrable) d'un ensemble X est une tribu sur X.

Définition 3.3 (Clan et tribu engendrée)**.** Une intersection quelconque de clans (resp. de tribus) est encore un clan (resp. une tribu). Aussi, étant donné $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$, on peut définir le plus petit clan contenant $\mathcal{X}$, noté $\phi(\mathcal{X})$, et la plus petite tribu contenant $\mathcal{X}$, notée $\sigma(\mathcal{X})$.

Exemple 3.4 (Tribu de Borel)*.* Dans un espace métrique (X, d), une tribu aura une importance particulière : la *tribu de Borel*, définie comme la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{O})$ contenant la collection de tous les ouverts $\mathcal{O}$.

Définition 3.5 (Espace mesurable)**.** Un couple $(X, \mathcal{T})$ formé d'un ensemble X et d'une tribu $\mathcal{T}$ sur X est appelé un *espace mesurable.*

Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ est une collection d'ensembles et $f : X \to Y$, on note $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(A) : A \in C\}$.

Exercice 3.1. Soit $f : X \to Y$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
1. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
2. En déduire qu'une fonction continue entre deux espaces métriques est borélienne.

On notera $A \sqcup B$ et $\bigsqcup_i A_i$ des réunions d'ensembles disjoints.

Définition 3.6 (Fonction additive et σ-additive)**.** Soit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et $f : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ telle que $f(\emptyset) = 0$. Elle est dite

— *additive* si $f(\bigsqcup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N f(A_i)$ lorsque $A_i \in \mathcal{X}$ pour tout i et $\bigsqcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{X}$,

— *σ-additive* si $f(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty f(A_i)$ lorsque $A_i \in \mathcal{X}$ pour tout i et $\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{X}$.

3. Par dénombrable, on veut toujours dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple 3.7. — Sur l'algèbre $\mathcal{I}$ des réunions finies d'intervalles (disjoints) la fonction f définie par

$$f\Big(\bigsqcup_{1\leq i\leq N} I_i\Big) := \sum_{i=1}^{N} \ell(I_i),$$

où $\ell(I_i)$ désigne la longueur d l'intervalle I_i, est σ-additive.

— Si $a \in X$ et $\mathcal{X}$ est la tribu discrète, f définie par $f(A) = 1$ si $a \in A$, 0 sinon, est σ-additive.

Définition 3.8 (Mesure, espace mesuré)**.** Une *mesure (positive)* μ sur $(X, \mathcal{T})$ est une application σ-additive $\mu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$. Un tel triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé un *espace mesuré.*

Avant de donner une manière de construire des mesures et de les caractériser, commençons par en donner les propriétés fondamentales.

Proposition 3.9. *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, $A, B \in \mathcal{T}$*

(0) si $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonie),

(0') $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$, ($\sigma$-sous-additivité),

(1) si les A_n sont croissants, $\mu(\bigcup_n^{\uparrow} A_n) = \lim \mu(A_n)$ (limite monotone croissante),

(1') si les A_n sont décroissants et $\mu(A_0) < \infty$, $\mu(\bigcap_n^{\downarrow} A_n) = \lim \mu(A_n)$, (limite monotone décroissante),

(2) $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$ (Fatou ensembliste),

(2') si il existe $B \in \mathcal{T}$ tel que $A_n \subseteq B$ pour tout n et $\mu(B) < \infty$, $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)$ (Fatou ensembliste renversé).

Démonstration. Prouvons (0). Comme $B = A \sqcup B \setminus A$, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Prouvons (0'). On pose $\tilde{A}_0 = A_0$ et $\tilde{A}_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k$ pour tout $n \geq 1$. On a $\bigcup_n A_n = \bigsqcup_n \tilde{A}_n$ et

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigsqcup_n \tilde{A}_n) = \sum_n \mu(\tilde{A}_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Prouvons (1). Avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigsqcup_n \tilde{A}_n) &= \sum_n \mu(\tilde{A}_n)\\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(\tilde{A}_n)\\ &= \lim_{N\to\infty} \mu(\bigsqcup_{0\leq n\leq N} \tilde{A}_n)\\ &= \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{0\leq n\leq N} A_n)\\ &= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).\end{aligned}$$

L'item (1') s'obtient en appliquant (1) à $\tilde{A}_n = A_0 \setminus A_n$ et en utilisant le fait que $\mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ et que toutes ces quantités sont finies.

Prouvons (2). Rappelons que $\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_n^{\uparrow} B_n$ où $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$. En utilisant (1) on obtient

$$\mu(\liminf_n A_n) = \mu(\bigcup_n^{\uparrow} B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \liminf_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

L'item (2') s'obtient en appliquant (2) à $\tilde{A}_n = B \setminus A_n$ et en utilisant à nouveau le fait que $\mu(B \setminus A_n) = \mu(B) - \mu(A_n)$, toutes ces quantités étant finies. □

Définition 3.10. Une mesure sur X est dite

— *finie* si $\mu(X) < \infty$,

— *σ-finie* si il existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ tels que $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n)$ et $\mu(X \setminus \bigcup_n X_n) = 0$

— *de probabilité* si $\mu(X) = 1$.

Lemme 3.11 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Si $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et $(A_n) \in \mathcal{T}$ est telle que $\sum \mu(A_n) < \infty$, alors $\mu(\limsup A_n) = 0$.*

Exercice 3.2. Démontrer le lemme de Borel-Cantelli.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mu(\limsup A_n) = \mu(\bigcap_n^{\downarrow} \bigcup_{k\geq n} A_k) &\overset{\mu(\bigcup A_n)<\infty}{=} \lim_n \mu(\bigcup_{k\geq n} A_k)\\ &\leq \liminf_n \mu(A_n) = 0,\end{aligned}$$

car la série $\Sigma_n \mu(A_n)$ est convergente. □

Remarque 3.12 (Interprétation probabiliste)*.* Soit μ une mesure de probabilité. Si la somme des probabilités des événements est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalise simultanément est nulle.

Théorème 3.13 (Loi du $0-1$)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité*[4] *et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. Montrer que l'alternative est alors la suivante :*

(i) $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ *et* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$,

(ii) $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *et* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

Exercice 3.3. Démontrer la loi du 0-1.

4. C'est-à-dire un espace mesuré dont la mesure est de probabilité.

Démonstration. Le premier point correspond au lemme de Borel-Cantelli. Pour le second point, supposons que $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$. Notons que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1 \iff \mathbb{P}(\liminf A_n^c) = 0$ car $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$. De plus,

$$\mathbb{P}(\liminf A_n^c) = \mathbb{P}(\overset{\uparrow}{\bigcup_n} \bigcap_{k\geq n} A_k^c) = \lim_n \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \tag{3.1}$$

Or pour tout entier p

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) &\overset{\text{indep}}{\leq} \prod_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{n+p}(1-\mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \prod_{k=n}^{n+p} \exp(-\mathbb{P}(A_k)) \\ &\leq \exp(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout p, puisque $\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$, on obtient

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_n \mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) = 0.$$

□

Définition 3.14 (Fonction mesurable)**.** Une fonction f d'un espace mesurable $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dans un autre espace mesurable $(X_2, \mathcal{T}_2)$ est dite mesurable lorsque

$$\forall A \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1.$$

Remarque 3.15. Remarquons l'analogie avec une caractérisation des fonctions continues entre deux espaces métriques : l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

Définition 3.16 (Fonction borélienne)**.** Une fonction entre deux espaces métriques est dite borélienne si elle est mesurable par rapport aux tribus boréliennes sur les espaces de départ et d'arrivée.

Théorème 3.17 (Théorème d'Egorov)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $E \subseteq \mathcal{T}$ tel que f_n converge uniformément sur E et $\mu(X \setminus E) \leq \varepsilon$.*

Exercice 3.4 (Preuve du théorème d'Egorov)**.** Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(X \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$C_N^k = \bigcap_{n\geq N} \left\{|f_n - f| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$
Montrer que $C = \bigcap_k^{\downarrow} \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k$ et en déduire que pour tout k, $\mu(X \setminus \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k) = 0$.
3. On fixe $\varepsilon > 0$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left(X \setminus C_{N_k}^k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.
4. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X_\varepsilon \in \mathcal{T}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X_ε et tel que $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.
5. Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

3.2 Construction et caractérisation de mesures

Dans cette partie, on donne une manière de *construire* des mesures par prolongement, et une une manière de les caractériser, en commençant par celle-ci.

Définition 3.18 (π-système, λ-système)**.** — On appelle λ-*système* (ou *système de Dynkin*) une collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ stable par réunion dénombrable croissante et différence emboîtée contenant X.

— On appelle π-*système* une collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie.

On note $\lambda(\mathcal{C})$ le plus petit [5] λ-système contenant la collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Théorème 3.19 (Théorème π-λ)**.** *Si $\mathcal{C}$ est un π-système alors $\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$.*

Exercice 3.5 (Preuve du théorème π-λ)**.** Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ est à la fois un π-système et un λ-système, alors c'est une tribu.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{C}$ est un π-système. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on note $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \cap A \in \lambda(\mathcal{C})\}$.
   (i) Montrer que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$ alors $\mathcal{C}_A$ est un λ-système et que si $A \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}_A$ contient $\mathcal{C}$.
   (ii) En déduire que si $A \in \mathcal{C}$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
   (iii) En déduire que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
3. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\lambda(\mathcal{C})$ est une tribu, et en déduire le théorème π-λ.

5. Il est bien défini.

Corollaire 3.20. *Si deux mesures finies μ et ν sur $(X, \mathcal{T})$ coïncident sur un π-système $\mathcal{C}$ et que $\mu(X) = \nu(X)$, alors elles coïncident sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Laissée en exercice. On pourra considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \nu(A)\}$ est montrer que c'est un λ-système. □

Passons au théorème de prolongement.

Théorème 3.21 (Théorème de prolongement de Carathéodory)**.** *Toute fonction σ-additive $\tilde{\mu}$ sur une algèbre se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée. De plus, si $\tilde{\mu}$ est σ-finie alors le prolongement μ est unique et μ est σ-finie.*

Remarque 3.22*.* On admettra ici la preuve, qui utilise la notion de mesure extérieure et d'ensemble mesurable associé. Disons seulement que l'unicité (dans le cas σ-fini) peut se déduire du théorème π-λ, en sachant qu'une algèbre est a fortiori un π-système.

En conséquence de ce théorème, on obtient assez facilement l'existence et l'unicité de la *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$).

Théorème 3.23 (Mesure de Lebesgue)**.** *Il existe une unique mesure borélienne λ^d sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout pavé P, c'est-à-dire un produit d'intervalles $P = \prod_{i=1}^d I_k$, $\lambda^d(P)$ soit égal au volume du pavé, soit $\lambda^d(P) = \prod_{i=1}^d \ell(I_k)$.*

Ébauche de preuve. Donnons l'idée dans $\mathbb{R}$.

- On note $\mathcal{S}$ l'ensemblee des intervalles de $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathcal{A}$ formée des réunions finies de ces intervalles est une algèbre.
- On définit μ sur $\mathcal{A}$ par $\mu(\bigsqcup_{k=1^n} I_k) = \sum \ell(I_k)$ et on vérifie qu'elle est bien définie et σ-additive.
- Elle est σ-finie.
- On cconclut par le théorème de prolongement de Carathéodory en notant que $\mathcal{A}$ engendre la tribu des boréliens.

□

Enfin, le théorème de Carathéodory permet de faire le produit de plusieurs mesures. Si $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sont deux espaces mesurables, la tribu produit sur $X_1 \times X_2$ est la tribu engendrée par les cylindres $\{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{T}_1\} \cup \{\mathbb{R} \times A : A \in \mathcal{T}_2\}$, ou de manière équivalente par les pavés $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$, et on la note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Théorème 3.24 (Mesure produit)**.** *Si $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_1, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ sont deux espaces mesurés, il existe une mesure μ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ telle que $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$. Si μ_1 et μ_2 sont σ-finies, elle est unique et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.*

3.3 Construction de l'intégrale de Lebesgue

Principe Poser $\int \mathbf{1}_A d\mu := \mu(A)$ puis étendre par linéarité et approximations successives.

Dans le reste de cette section, on considère un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Lorsqu'une fonction est à valeurs $X = \mathbb{R}$ ou dans $X = \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on dira qu'elle est mesurable si elle l'est en tant que fonction de $(X, \mathcal{T})$ dans $(X, \mathcal{B}(X))$.

Définition 3.25 (Fonction simple, fonction étagée)**.** Une fonction est dite simple si elle prend un nombre fini de valeurs. Une fonction f d'un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ qui est mesurable et simple est appelée une fonction étagée. Les fonctions étagées sont les fonctions de la forme

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

où $A_i \in \mathcal{T}$ et $\alpha_i \in \bar{\mathbb{R}}$ pour tout i. On peut toujours supposer (et on le fera souvent) que les A_i sont disjoints.

Remarque 3.26. On dira d'une fonction qu'elle est réelle si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, les valeurs $\pm\infty$ exclues.

La classe des fonctions étagées est intéressante car une fonction positive (mesurable) peut toujours s'approcher de façon montone par des fonctions étagées.

Proposition 3.27. *Si f est une fonction mesurable positive, il existe une suite (f_n) de fonctions étagées positives et réelles qui est croissante au sens où pour tout x, $(f_n(x))_n$ est croissante, et telle que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ pour tout x*

Démonstration. Il suffit de poser $f_n(x) = \min\{\lfloor 2^n f(x) \rfloor 2^{-n}, n\}$. □

Remarque 3.28. — Si f est bornée, la convergence de cette suite est uniforme.

— Si μ est σ-finie ($X = \bigcup_n^{\uparrow} X_n$ où $\mu(X_n) < \infty$), on peut supposer que f_n a un support $\{x : f_n(x) \neq 0\}$ de mesure finie ; il suffit de considérer la suite $f_n \times \mathbf{1}_{X_n}$.

Définition 3.29 (Intégrale de Lebesgue)**.** On définit successivement :

— l'intégrale d'une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec la convention $0 \times \infty = 0$ par

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu(A_i),$$

— l'intégrale d'une fonction mesurable positive f par

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int g \, \mathrm{d}\mu : 0 \leq g \leq f,\ g \text{ étagée positive} \right\},$$

— l'intégrale d'une fonction mesurable $f = f_+ - f_-$ où f_+, f_- désignent les parties positives et négatives, par

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu,$$

dès lors que l'une des intégrale $\int f_+ \,\mathrm{d}\mu$ ou $\int f_- \,\mathrm{d}\mu$ est finie : on dit que l'intégrale est définie. Si les deux sont finies, on dit que f est intégrable ou sommable par rapport à μ et on note $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.