Université Paris-Dauphine
—
Pré-rentrée d'analyse (M1)
—
Plan du cours

Paul Pegon

30 août 2020

1 Topologie des espaces métriques

But Parler de convergence et de continuités (notions topologiques), de manière quantifiée et séquentielle (cadre métrique).

1.1 Généralités

— Distance, espace métrique, inégalité triangulaire, boules ouvertes et fermés, ensembles ouverts et fermés, intérieur, adhérence, frontière, parties denses, séparabilité.
— Fonction continue, uniformément continue, lipschitzienne. Exemples et contre-exemples.
— Suites convergentes, limites de fonctions en un point. Caractérisations séquentielles.

1.2 Complétude

Intérêt Assurer l'existence de limite sans la connaître a priori. Obtenir des théorèmes d'existence en analyse, de solutions d'équations différentielles notamment, par exemple par le théorème du point fixe de Picard. Également, comme on le verra, la complétude est un « morceau » de compacité.
— Suite de Cauchy, lien avec la convergence, espaces complets. Exemples et contre-exemples.
— Théorème des fermés emboîtés.
— Théorème de prolongement des applications uniformément continues. Limites d'application uniformément équicontinues sur une partie dense.
— Théorème du point fixe de Picard.
— Théorème de Baire.

1.3 Compacité

Intérêt Trouver des sous-suites convergentes, obtenir des théorèmes d'existence (équations aux dérivées partielles d'origine variationnelle par exemple).

- Définition (propriété de Borel-Lebesgue), précompacité, compacité relative. Exemples et contre-exemples.
- Compacts emboîtés.
- Caractérisations métriques de la compacité (Bolzano-Weierstrass, complétude et précompacité).
- Théorème de Heine.
- Stabilité de la compacité par une application continue.
- Théorème de Dini.

2 Espaces vectoriels normés

Intérêt Bon cadre pour généraliser $\mathbb{R}^d$ puis faire de l'analyse en dimension infinie (espaces de fonctions).

2.1 Généralités

- Définition d'une norme, inégalité triangulaire, continuité de la norme et des opérations vectorielles, espace normé. Exemples.
- Applications linéaires continues, caractérisations de la continuité d'une application linéaire.

2.2 Espaces normés de dimension finie

- Équivalence des normes en dimension finie.
- Les compacts sont les fermés bornés en dimension finie.
- Lemme de F. Riesz, Théorème de F. Riesz (un evn est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compact).

2.3 Espaces de Banach

- Définition. Exemples et contre-exemples.
- Critère par CVA des séries. Application à la complétude de L^1.
- Théorème de prolongement des applications linéaires continues sur un sous-espace dense.
- Formes linéaires, espace dual.

2.4 Espaces de Hilbert

Intérêt Généralisation de $\mathbb{R}^d$ en tant qu'espace euclidien à la dimension infinie.

— Définition. Exemples et contre-exemples. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski. Cas d'égalité. Formules polaires. Identité du parallélogramme.
— Théorème de projection sur un convexe fermé. Cas d'un sev fermé. Décomposition orthogonale.
— Théorème de représentation de Riesz.
— Bases hilbertiennes. Cas d'un Hilbert séparable. Inégalité de Bessel, égalité de Parseval. Applications.

3 Théorie de la mesure

Intérêt Généraliser l'intégrale de Riemann pour obtenir des théorèmes d'interversion limite-intégrale puissants, de bons espaces fonctionnels (complétude des espaces L^p), pouvoir intégrer ou « moyenner » sur tous types d'espaces (y compris de dimension infinie), donner une base commune à l'analyse et aux probabilités, décrire finement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ (ou d'autres espaces) en fonction de leur « taille » mesurée selon différentes *mesures* (théorie géométrique de la mesure), entre autres...

3.1 Tribus et mesures

— Clans et tribus. Fonctions additives et σ-additives, mesures positives. Espaces mesurables, espaces mesurés. Mesures finies, σ-finies, de probabilité.
— Propriétés de base des mesures : sous-additivité, limite monotone, lemme de Fatou (versions ensemblistes).
— Lemme de Borel-Cantelli. Loi du $0-1$.
— Théorème d'Egorov.

3.2 Construction et caractérisation de mesures

— λ-système (classe de Dynkin), π-système. Théorème $\pi-\lambda$. (Théorème de classe monotone.) Caractérisation des mesures σ-finies par un π-système.
— Théorème de prolongement de Carathéodory : prolongement d'une fonction σ-additive d'un clan à la tribu engendrée. Unicité dans le cas σ-fini. Existence et unicité de la mesure de Lebesgue. Mesures produits.

3.3 Construction de l'intégrale de Lebesgue

Principe Poser $\int \mathbf{1}_A d\mu := \mu(A)$ puis étendre par linéarité et approximations successives.
— Intégrale d'une fonction étagée, puis mesurable positive, puis signée.

- Approximation monotone : toute fonction mesurable positive est limite croissante d'une suite de fonctions étagées positives finies.
- Théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Théorème de convergence dominée.
- Inégalité de Jensen.
- Théorème de Fubini.

3.4 Mesures de Borel

- Mesure de Borel. Régularité intérieure, extérieure, régularité. Mesures de Radon
- Régularité des mesures de Borel finies sur $\mathbb{R}^d$ (ou tout espace polonais), des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^d$ (ou tout espace métrique séparable localement compact).
- Théorèmes de Lusin.

4 Espaces L^p

4.1 Inégalités de Hölder et de Minkowski

4.2 Généralités

- Espaces $\mathcal{L}^p, L^p$, semi-normes et normes.
- Complétude de $L^p, p \in [1, +\infty]$, preuve par « réciproque » du Th. de convergence dominée.
- Sur $\mathbb{R}$ (ou X métrique séparable localement compact), μ la mesure de Lebesgue (ou μ mesure de Radon) : densité de C_c dans L^p et séparabilité de L^p lorsque $p < \infty$.

4.3 Convolution

Intérêt Régularisation de fonctions, bon comportement avec la transformée de Fourier.

- Définition pour des fonctions de C_c. Définition pour $f \in L^p, g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \geq 1$. Inégalité de Young (cas $q = 1$). Algèbre L^1.
- Continuité de l'opérateur de translation sur $L^p(\mathbb{R}^d), p < \infty$, version globale et locale.
- $L^p \star L^{p'} \subseteq C_b$, version locale : $L^p_{\mathrm{loc}} \star L^{p'}_c \subseteq C(\mathbb{R}^d)$ pour tout p.
- Support d'une fonction, support d'une convolée.
- Approximation de l'unité, suite régularisante. Théorème d'approximation (dans L^p où $p < \infty$, $C_b(\mathbb{R}^d)$ et $C(\mathbb{R}^d)$ lorsque l'approximation est à support borné).
- Dérivation d'une convolée $L^1 \star \mathcal{C}^1_b$ ou $L^1_{\mathrm{loc}} \star C^1_c$.
- Densité de C^∞_c dans L^p, $p < \infty$, sur $\mathbb{R}^d$ ou Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ (existence d'une découpe lisse).

4.4 Transformée de Fourier

On se placera sur $\mathbb{R}$ souvent pour simplifier.

— Définition dans L^1. Lemme de Riemann-Lebesgue : $\mathcal{F}(L^1) \subseteq C_0$. Norme de l'opérateur.
— Espace de Schwartz. Stabilité par multiplication par les polynômes, par dérivation. Densité dans les $L^p p$.
— Formulaire sur la transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz. Stabilité de l'espace par transformée de Fourier.
— Transformée de Fourier d'une Gaussienne).
— Adjoint de la transformée de Fourier. Théorème d'inversion (dans Schwartz).
— Théorème de Plancherel, définition de la transformée de Fourier sur L^2.

5 Calcul différentiel

5.1 Généralités

— Définition de la différentielle et différentielle seconde. Formule de Taylor. Dans $\mathbb{R}^d$ (ou l'espace euclidien), notion de gradient, application hessienne. Sur $\mathbb{R}^d$, matrices jacobiennes et hessiennes. Dérivées et différentielles partielles.
— Application de classe C^k. Critère pour être C^1. Notion de C^k-difféomorphisme, critère.

5.2 Inversion locale et fonctions implicites

Théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale, théorème des fonctions implicites.