Université Paris-Dauphine

—

Mise à niveau en analyse

Paul Pegon

2020–2021

Table des matières

1 Analyse dans les espaces métriques

But Parler de convergence et de continuité (notions topologiques), de manière quantifiée et séquentielle (cadre métrique).

1.1 Généralités

Définition 1.1 (Distance et espace métrique)**.** Une *distance* sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in X$,

(i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation),

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un ensemble muni d'une distance, c'est-à-dire un couple (X, d), est appelé un *espace métrique*.

Remarque 1.2 (Inégalité triangulaire renversée). Une distance vérifie automatiquement une inégalité triangulaire renversée :

$$|d(x, y_1) - d(x, y_2)| \leq d(y_1, y_2)$$

pour tous x, y_1, y_2.

Exercice 1.1. Si (X, d) est un espace métrique, démontrer l'inégalité triangulaire renversée $|d(x, y_1) - d(x, y_2)| \leq d(y_1, y_2)$ pour tous x, y_1, y_2.

Les espaces métriques sont un bon cadre pour commencer à faire de l'analyse : convergence, limite, continuité, notions topologiques se manipulent de façon intuitive et agréable.

Vocabulaire

Dans un espace métrique (X, d) on peut parler de :

Boule ouverte $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ pour tout $x \in X, r \geq 0$.

Boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ pour tout $x \in X, r \geq 0$.

Ensemble ouvert O est ouvert si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq O$.

Exercice 1.2. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que si $R > 0$ et $y \in B(x, R)$, alors il existe $0 < r < R$ tel que $B(y, r) \subseteq B(x, R)$. En déduire qu'une boule ouverte est ouverte.
2. Montrer qu'un ensemble O est ouvert si et seulement si c'est une réunion de boules ouvertes.
3. Montrer que l'intersection d'un nombre fini de boules ouvertes est ouverte.

Ensemble fermé F est fermé si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

Intérieur x est *intérieur à* $A \subseteq X$ si il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq A$. L'ensemble des points intérieurs à A, noté $\mathring{A}$, est *l'intérieur de* A. C'est un ouvert (le démontrer !).

Adhérence (ou fermeture) x est un point adhérent à $A \subseteq X$ si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A, c'est-à-dire l'ensemble de ses points adhérents. C'est un fermé (le démontrer !).

Densité Une partie $A \subseteq X$ est *dense* dans X si $\bar{A} = X$.

Séparabilité L'espace (X,d) est *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense.

Frontière La frontière de $A \subseteq X$ est $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarque 1.3. Attention, dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, on a

(i) $\overline{B(x,r)} = B_f(x,r)$

(ii) $\mathring{B_f}(x,r) = B(x,r)$

(iii) $\partial B(x,r) = S(x,r) \coloneqq \{y : d(x,y) = r\}$,

mais ces propriétés ne sont pas vraies en général dans un espace métrique quelconque.

Exercice 1.3. Si (X,d) est un espace métrique, a-t-on toujours $\overline{B(x,r)} = B_f(x,r)$? $\mathring{B_f}(x,r) = B(x,r)$? $\partial B(x,r) = S(x,r)$?

Application continue $f : (X,d) \to (X',d')$ est *continue en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,x_0) < \delta \implies d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Elle est dite *continue* si elle est continue en tout point.

Application uniformément continue $f : (X,d) \to (X',d')$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in X, d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Application Lipschitzienne $f : (X,d) \to (X',d')$ est K-lipschitzienne où $K \geq 0$ si

$$\forall x, y \in X, d(f(y), f(x)) \leq K d(x,y).$$

Lorsque f est Lipschitzienne, on note $\mathrm{Lip}(f)$ la plus petite constante K telle que f soit K-Lipschitzienne.

Exercice 1.4. Donner un exemple de fonction continue mais non uniformément continue, ainsi qu'un exemple de fonction uniformément continue qui n'est pas Lipschitzienne.

Suite convergente $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ dans X si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, d(x,x_n) \leq \varepsilon$.

Valeur d'adhérence ℓ est valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N, d(x_n, \ell) < \varepsilon.$$

Limite en un point Soit $f : (X, d) \to (X', d')$, $x_0 \in X, \ell \in X'$ et $A \subseteq X$. On dit que f admet ℓ pour limite lorsque x tend vers x_0 selon A, noté $\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall x \in A, d(x, x_0) < r \implies d'(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Lorsque A n'est pas précisé, on considère que $A = X$.

Exercice 1.5. Soit (x_n) une suite dans un espace métrique (X, d). Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ℓ est valeur d'adhérence de (x_n),

(ii) $\ell \in \bigcap_n \overline{\{x_p : p \geq n\}}$,

(iii) il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ telle que $\lim x_{\phi(n)} = \ell$.

Caractérisations séquentielles

Dans un espace métrique, la plupart de ces définitions admettent des caractérisations séquentielles (en terme de suites).

Proposition 1.4 (Caractérisations séquentielles)**.** *Dans un espace métrique (X, d) :*

— *un point $x \in X$ est adhérent à $A \subseteq X$ si et seulement s'il existe une suite $(x_n) \in A$ telle que $x_n \to x$,*

— *une partie $A \subseteq X$ est fermée si et seulement pour toute suite $(x_n) \in A$ convergeant vers une limite ℓ, nécessairement $\ell \in A$,*

— $\lim_{x_n \to x^\star, x_n \in A} f(x) = \ell$ *si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in A$ tendant vers $x^\star$,* $\lim_n f(x_n) = \ell$*,*

— *f est continue en $x^\star$ si et seulement pour toute suite (x_n) tendant vers $x^\star$,* $\lim f(x_n) = f(x^\star)$*,*

— *f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n), (y_n)$ telles que* $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$*, on a* $\lim_n d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

1.2 Complétude

Intérêt Assurer l'existence de limite sans la connaître a priori. Obtenir des théorèmes d'existence en analyse, de solutions d'équations différentielles notamment, par exemple par le théorème du point fixe de Picard. Également, comme on le verra, la complétude est un « morceau » de compacité.

Définition 1.5 (Suite de Cauchy, espace complet)**.** Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \in X$ est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente, on dit que l'espace métrique (X, d) est *complet*.

Exemple 1.6. Les espaces suivantes sont complets :

— $\mathbb{R}$ muni de la distance absolue $d(x,y) = |y-x|$,

— les espaces vectoriels normés de dimension finie (par exemple $\mathbb{R}^d$), comme on le verra,

— l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la distance uniforme $d(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$,

— l'espace $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^N : \sum_n |u_n|^p < +\infty\}$ muni de la distance $d_p(u,v) = (\sum_n |u_n - v_n|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 1.6. Soit E un ensemble et (X,d) un espace métrique. On note Y l'espace des fonctions de E dans X. Construire une distance δ sur Y qui métrise la convergence uniforme, i.e. telle que $f_n \to f$ uniformément si et seulement si $\delta(f_n, f) \to 0$.

Exemple 1.7. Les espaces suivants ne sont pas complets :

— $\mathbb{Q}$ muni de la distance absolue : par exemple $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers e dans $\mathbb{R}$ et e n'est pas rationnel,

— $X =]0,1[$: par exemple $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 1 donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc dans $]0,1[$, mais $1 \notin X$ donc x_n ne converge pas dans X, par unicité de la limite éventuelle dans X,

— l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels muni de la distance $d(f,g) = \|f-g\|$ induite par n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ (on le verra plus loin),

— $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la distance L^1 : $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$.

Proposition 1.8. *Soit (u_n) une suite dans un espace métrique (X,d). On a*

$$(u_n) \text{ converge} \implies (u_n) \text{ est de Cauchy} \implies (u_n) \text{ est bornée.}$$

Évidemment, en général les sens réciproques sont faux.

Remarque 1.9. La notion de suite de Cauchy, et donc de complétude, est une notion métrique (ou plus généralement *uniforme*), et non purement topologique : il nous faut une distance pour pouvoir la définir.

Quelques théorèmes importants dans les espaces complets

Théorème 1.10 (Théorème des fermés emboîtés)**.** *Soit (F_n) une suite de parties fermées non vides d'un espace métrique complet (X,d) tels que*

(i) $F_q \subseteq F_p$ *pour tout* $q \geq p$,

(ii) $\operatorname{diam} F_n \to 0$.

Dans ce cas, l'intersection $\bigcap^{\downarrow}_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduite à un singleton.

Remarque 1.11. Cette propriété caractérise la complétude.

Démonstration. Choisissons pour chaque n un point $x_n \in F_n$. Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que $\operatorname{diam} F_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Si $p, q \geq N$, $F_p \subseteq F_N$ et $F_q \subseteq F_N$ donc x_p et x_q sont dans F_N, d'où $d(x_p, x_q) \leq \operatorname{diam} F_N \leq \varepsilon$. Par conséquent, l'espace étant complet, (x_n) tend vers une limte $x^\star$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x_p \in F_n$ pour tout $p \geq n$, or F_n est fermé donc $x^\star = \lim x_p \in F_n$. Ceci étant vrai pour tout n, $x^\star \in \bigcap_n F_n$.

Enfin, $\operatorname{diam} \bigcap_n F_n \leq \operatorname{diam} F_p$ pour tout p donc $\operatorname{diam} \bigcap_n F_n = 0$, de sorte que $\bigcap_n F_n$ contient au plus un point (sinon, deux point sont à distance strictement postive, donc le diamètre est aussi strictement positif). Au final

$$\bigcap_n F_n = x^\star.$$

□

Exercice 1.7 (Théorème de Baire)**.** Il s'agit de montrer que toute intersection dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet est encore dense. Soit donc (X, d) un espace complet et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses.

1. Soit $x_0 \in X, r_0 > 0$. Montrer qu'il existe $x_1 \in X$, $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$ tels que $B_f(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r_0) \cap O_0$.
2. Construire des suites $(x_n)_n$, $(r_n)_n$ telles que $B_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap O_n$ et $0 < r_n \leq 2^{-n}$.
3. En déduire l'existence d'un élément $x^\star \in B(x, r_0) \cap \bigcap_n O_n$.
4. Conclure.
5. Application : Montrer que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est jamais complet, peu importe la norme.

Remarque 1.12. Ce théorème permet de démontrer le théorème de Banach-Steinhaus dans le cadre des espaces vectoriels normés, source de beaucoup de contre-exemples en analyse (sur l'approximation des applications continues par des polynômes ou polynômes trigonométriques notamment).

Théorème 1.13 (Prolongement des appplications uniformément continues)**.** *Soit $f : A \subseteq (X, d) \to (X', d')$ définie sur une partie dense A de X„ à valeurs dans un espace complet X'. Si f est uniformément continue sur A, alors elle admet un unique prolongement continu sur tout X, et ce prolongement est uniformément continu.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $(x_n) \in A$ une suite tendant vers x (une telle suite existe par caractérisation séquentielle d'un point adhérent). Puisque (x_n) est convergente, elle est de Cauchy. Comme f est uniformément continue, la suite $(f(x_n))$ est également de Cauchy. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que pour tout x, y, $d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$, qui existe par définition de la continuité uniforme. Puisque (x_n) est de Cauchy, il existe un rang N tel que pour tous $p, q \geq N$, on ait $d(x_p, x_q) < \delta$, de sorte que $d(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$ pour tous $p, q \geq N$.

L'espace (X', d') étant complet, la suite $(f(x_n))$ converge vers une limite ℓ, qui dépend a priori de la suite (x_n). Montrons qu'elle n'en dépend en fait pas. Si (y_n) est une autre suite tendant vers x, le même raisonnement conduit à ce que $(f(y_n))$ converge vers une limite ℓ'. Mais par l'inégalité triangulaire $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, x^\star) \to 0$ et donc par caractérisation séquentielle de la continuité uniforme, $\lim d(f(x_n), f(y_n)) = 0$. Or par l'inégalité triangulaire renversée, la fonction distance est continue, donc

$$\lim_n d(f(x_n), f(y_n)) = d(\ell, \ell'),$$

d'où $\ell = \ell'$ par l'axiome de séparation de la distance. On a ainsi montré que pour tout $x \in X$, il existe $\ell_x \in X'$ tel que

$$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim_n x_n = x \implies \lim_n f(x_n) = \ell_x.$$

On pose alors pour tout $x \in X$, $\bar{f}(x) = \ell_x$. Par construction, si $x \in A$ alors $f(x) = \bar{f}(x)$ (prendre la suite constante égale à x), de sorte que $\bar{f}$ prolonge f.

Montrons que $\bar{f}$ est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Soit alors $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \delta/2$. Par définition de $\bar{f}$, il existe des suites $(x_n), (y_n)$ d'éléments de A tendant respectivement vers x, y et tels que $\lim f(x_n) = \bar{f}(x), \lim f(y_n) = \bar{f}(y)$. Pour n assez grand, $d(x_n, y_n) < \delta$, de sorte que $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$. En passant à la limite dans cette inégalité on obtient $d'(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq \varepsilon$, d'où le résultat.

L'unicité d'un prolongement continu se déduit immédiatement de la continuité d'un prolongement et de la densité de A. □

Exercice 1.8 (« Prolongement de la limite »)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions de (X, d) dans (X', d') où (X', d') est complet. On suppose que cette suite est uniformément équicontinue, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, \forall x, \in X, d(x, y) < \delta \implies d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Montrer que si (f_n) converge simplement sur une partie dense $A \subseteq X$, alors elle converge simplement sur tout X, et que la limite f est uniformément continue.

Théorème 1.14 (Théorème du point fixe de Picard)**.** *Soit $f : (X, d) \to (X, d)$ où (X, d) est complet. On suppose que f est k-contractante :*

$$\forall x, y, d(f(x), f(y)) \leq k d(y, x), \qquad \textit{où } k \in [0, 1[.$$

Alors

- *f admet un unique point fixe $x^\star$,*
- *la suite (x_n) définie par $\left| \begin{array}{l} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{array} \right.$ converge à vitesse linéaire vers $x^\star$. Plus précisément :*

$$d(x_n, x^\star) \leq k^n \min \left\{ \frac{d(x_1, x_0)}{1 - k}, d(x^\star, x_0) \right\}.$$

Démonstration. Par récurrence immédiate

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1}) \\
&\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\
&\dots \\
&\leq k^n d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Pour tout $n, p \geq 0$, on a donc

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq \left(\sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \right) d(x_1, x_0) \\
&\leq \left(\sum_{i \geq n} k^i \right) d(x_1, x_0) \\
&= \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Par conséquence, x_n est de Cauchy, donc elle est convergente vers une certaine limite ℓ par complétude de (X, d). Par continuité de f, en passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ on trouve $\ell = f(\ell)$ et ℓ est un point fixe de f. Si ℓ' est un autre point fixe, on a

$$d(\ell, \ell') = d(f(\ell), f(\ell')) \leq kd(\ell, \ell'),$$

or $k < 1$ donc nécessairement $\ell = \ell'$. La fonction f admet donc un unique point fixe qu'on note $x^\star$. En passant à la limite $p \to \infty$ dans l'inégalité $d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$ on obtient $d(x_n, x^\star) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$. Enfin, remarquons que

$$d(x_n, x^\star) = d(f^n(x_0) f^n(x^\star)) \leq k^n d(x_0, x^\star)),$$

ce qui conclut. □

Remarque 1.15. Il existe nombre de variantes du théorème de point fixe de Picard. Dans certaines, f dépend en plus d'un paramètre supplémentaire λ, et sous certaines hypothèses le point fixe $x^\star_\lambda$ est régulier par rapport au paramètre.

1.3 Compacité

Intérêt Trouver des sous-suites convergentes, obtenir des théorèmes d'existence (équations aux dérivées partielles d'origine variationnelle par exemple).

Généralités

Dans cette partie (X, d) désigne un espace métrique quelconque. Un recouvrement d'une partie $A \subseteq X$ est une famille de parties $(C_i)_{i \in I}$ de X telles que $A \subseteq \bigcup_i C_i$.

Définition 1.16 (Compacité, précompacité, compacité relative)**.** — (X, d) est *compact* si de tout recouvrement d'ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini (c'est la *propriété de Borel-Lebesgue*).

— (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut-être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

— Une partie $A \subseteq X$ est relativement compact si $\bar{A}$ est compact.

Remarque 1.17. La compacité (resp. précompacité) est une notion intrinsèque, relative à un espace métrique (X, d) tout entier. On dit qu'une partie $A \subseteq X$ est compacte (resp. précompacte) si l'espace métrique induit (A, d) est compact.

Proposition 1.18. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

— *X compact $\implies$ X précompact $\implies$ X borné.*

— *A précompact $\implies$ $\bar{A}$ précompact.*

— *A compact $\implies$ A fermé.*

— *X compact et $A \subseteq X$ $\implies$ (A est compact si et seulement si A est fermé).*

— *X précompact et $A \subseteq X$ $\implies$ A précompact.*

Proposition 1.19 (Compacts emboîtés)**.** *Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties compacts non vides de (X, d), alors $\bigcap_n K_n$ est non vide.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\bigcap_n K_n = \emptyset$. En passant au complémentaire, cela signifie que $X = \bigcup_n K_n^c$, mais les K_n^c sont ouverts, donc par la propriété de Borel-Lebesgue (définition de la compacité), on peut en extraire un sous recouvrement fini $(K_{n_i}^c)_{i\leq N}$, $N \in \mathbb{N}$, i.e. $X = \bigcup_{i\leq N} K_{n_i}^c$. Or les ensembles K_n sont ordonnés, de sorte que $\bigcup_{i\leq N} K_{n_i}^c = K_{n^\star}^c$ où $n^\star = \max_i n_i$, et donc $K_{n^\star} = \emptyset$, ce qui est exclu. □

Théorème 1.20 (Caractérisations de la compacité)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est compact (propriété de Borel-Lebesgue),

(ii) X vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente,

(iii) X est précompact et complet.

Démonstration. Commençons par *(i)* $\implies$ *(ii)*. Soit (u_n) une suite de X. L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est

$$A = \bigcap_N \overline{\{u_p : p \geq N\}}$$

qui est l'intersection d'une suite décroissante de compacts emboîtés non vides, donc $A \neq \emptyset$. Ainsi, (u_n) a une valeur d'adhérence ℓ, donc il existe une suite extraire $(u_{\phi(n)})$ telle que $\lim u_{\phi(n)} = \ell$.

Montrons que *(ii)* $\implies$ *(iii)* et commençons par la précompacité. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'absurde, supposons que X ne puisse être recouvert par des boules de rayon ε. On peut donc construire par récurrence une suite (u_n) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&u_0 \in X \\
&u_1 \text{ t.q. } d(u_0, u_1) \geq \varepsilon \\
&u_2 \text{ t.q. } \min\{d(u_0, u_2), d(u_1, u_2)\} \geq \varepsilon \\
&\dots \\
&u_{n+1} \text{ t.q. } \min_{i \leq n} d(u_i, u_{n+1}) \geq \varepsilon \\
&\dots
\end{aligned}$$

On ne peut en extraire de sous-suite convergente, car aucune sous-suite n'est de Cauchy : absurde.

Passons maintenant à la complétude. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Elle admet par la propriété de Bolzano-Weierstrass une valeur d'adhérence ℓ :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N > 0, \exists n^\star \geq N, d(u_{n^\star}, \ell) < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite étant de Cauchy, il existe un rang N à partir duquel les éléments de la suite sont à distance au plus ε. Soit alors un $n^\star$ comme ci-dessus. On a pour tout $n \geq N$:

$$d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{n^\star}) + d(u_{n^\star}, \ell) \leq 2\varepsilon.$$

Par définition de la limite, $u_n \to \ell$ et X est complet.

Montrons que *(iii)* $\implies$ *(i)*. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de X. On dit qu'une partie $A \subseteq X$ est finiment recouverte (f.r.) si elle est recouverte par un nombre fini de U_i. Par l'absurde, supposons que X n'est pas f.r. Prenons $\varepsilon_0 = 2^0$. X est recouvert par un nombre fini de boules $B(x_j^0, \varepsilon_0)$, $j \in J_0$. Elles ne peuvent pas être toutes f.r., sans quoi X le serait aussi. Ainsi une boule $B_0 = B(x_{j_0}^0, \varepsilon_0)$ n'est pas fr. Cette boule est encore précompacte. Donc en posant $\varepsilon_1 = 2^{-1}$, B_0 peut être recouverte par un nombre fini de boules $B(x_j^1, \varepsilon_1), j \in J_1$. À nouveau, elles ne peuvent être toutes f.r. On itère ainsi le processus, par récurrence. On construit ainsi une suite de boules $B_i = B(x_{j_i}^i, 2^{-i})$, et en notant $y_i = x_{j_i}^i$ on a $d(y_{i+1}, y_i) \leq 2^{-i}$. Ainsi

$$d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1}) + \dots d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \leq \sum_{i \geq n} 2^{-i} = 2^{-n+1}.$$

Par conséquent, la suite (y_n) est de Cauchy. Par complétude de X, il existe une sous-suite $(y_{\phi(n)})_n$ convergeant vers un point $x^\star$. Puisque (U_i) est un recouvrement de X, il existe $i^\star$ tel que $x^\star \in U_{i^\star}$. Comme $U_{i^\star}$ est un ouvert et que $\varepsilon_n \to 0$, pour n assez grand on a $B_{\phi(n)} = B(y_{\phi(n)}, \varepsilon_{\phi(n)}) \subseteq U_{i^\star}$ et donc $B_{\phi(n)}$ est fr : c'est exclu. □

Proposition 1.21. *Sur un espace métrique compact, une suite (x_n) est convergente si et seulement elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Exercice 1.9. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exemple 1.22. Les espaces suivants sont compacts :

— les fermés bornés en dimension finie (on le verra),

— les produits d'espaces compacts,

— $\mathcal{F} := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ t.q. } \mathrm{Lip}(f) \leq 1, f(0) = 0\}$, d'après le Théorème d'Ascoli. C'est une partie d'un espace de dimension infinie !

Théorèmes à connaître

Théorème 1.23 (Théorème de Heine)**.** *Si f est continue sur un espace métrique compact, alors elle est uniformément continue.*

Démonstration. Par l'absurde, si f n'était pas uniformément continue, il existerait $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x_n, y_n \in X$ tels que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Par compacité, il existe une sous-suite $x_{\phi(n)} \to \ell$, et comme $d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) \to 0$, $(y_{\phi(n)})$ tend également vers ℓ. Par continuité de f, $\lim f(x_{\phi(n)}) = \lim f(y_{\phi(n)}) = f(\ell)$, et en passsant à la limite dans $d'(f(x_\phi(n)), f(y_{\phi(n)})) \geq \varepsilon$ on obtient $0 = d'(\ell, \ell) \geq \varepsilon > 0$ ce qui est absurde. □

Théorème 1.24. *L'image d'un compact par une application continue est continue.*

Démonstration. On va utiliser la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement de $f(K)$. On a

$$f(K) \subseteq \bigcup_i U_i \implies K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq \bigcup_i f^{-1}(U_i),$$

mais l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, et K est compact, donc il existe un nombre finie d'indices $i_0, \ldots, i_n$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{k \leq n} f^{-1}(U_{i_k}) \implies f(K) \subseteq \bigcup_{k \leq n} f(f^{-1}(U_{i_k})) \subseteq \bigcup_{k \leq n} U_{i_k}.$$

On a donc extrait des U_i un recouvrement fini de $f(K)$, donc $f(K)$ est compact. □

Corollaire 1.25. *Une fonction continue sur un compact à valeurs réelles atteint ses bornes.*

Exercice 1.10 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que la suite définie par $M_n := \sup_x\{f(x) - f_n(x)\}$ est convergente.
2. Montrer que pour tout $\forall n, \exists x_n \in X, \forall k \leq n, M_n \leq f(x) - f_k(x)$.
3. En déduire qu'il existe $x^\star$ tel que $\lim M_n \leq f(x^\star) - f_k(x^\star)$ pour tout k puis que f_n converge uniformément vers f.

4. Application : On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

Théorème 1.26 (Théorème d'Ascoli). *Soit $f_n : (X, d) \to (X', d')$ de (X, d) métrique compact vers (X', d') métrique complet une suite de fonctions qui est*

(A) uniformément équi-continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in X, d(x, y) < \delta \implies d'(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon,$$

(B) simplement relativement compact :

$$\forall x \in X, (f_n(x))_{n \in N} \text{ est relativement compact.}$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction f, qui est encore uniformément continue.

Remarque 1.27. Il existe des variantes au théorème d'Ascoli. On peut par exemple se passer de l'hypothèse de complétude de l'espace d'arrivée (en se plaçant dans le complété), et même de l'hypothèse métrique sur l'espace de départ (X est uniquement un espace topologique compact). Une autre variante suppose que la famille est simplement précompacte (plutôt que relativement compacte) et conclut à la précompacité de la famille de fonctions dans l'espace des fonctions continues muni de la distance uniforme.

1.4 Exercices

Exercice 1.11 (Normalité des espaces métriques). Soient A et B deux fermés disjoints d'un espace métrique (X, d). Montrer qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que f vaille 1 sur A et 0 sur B. Montrer que si A est bornée, on peut trouver une telle fonction qui soit de support bornée, i.e. telle que $\{f > 0\}$ est borné.

Exercice 1.12. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne sur un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d). On définit pour tout $x \in X$

$$\bar{f}(x) = \inf_{y \in A} f(y) + Ld(x, y).$$

Montrer que $\bar{f}$ est un prolongement L-lipschitzien de f à tout X.

Exercice 1.13. On considère $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Munir $\bar{\mathbb{R}}$ d'une distance métrisant la convergence à laquelle on s'attend.

Exercice 1.14. Soit $a_n \leq b_n$ avec a_n croissante et b_n décroissante, $b_n - a_n \to 0$. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer la convergence de la méthode de la dichotomie.

Exercice 1.15. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que si f' est bornée au voisinage de a, alors f se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que si de plus f' admet une limite en a, ce prolongement est dérivable en a.

Exercice 1.16. Les fonctions suivantes sont-elles contractantes ? Admettent-t-elle un point fixe ?

1. $f(x) = \cos(x/3) + 1/(2 + x^2)$ sur $\mathbb{R}$;
2. $f(x) = x/2$ sur $]0, 1]$;
3. $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, 1]$;
4. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$;
5. $f(x) = 1 + x/2$ sur $[0, 1]$.

Exercice 1.17. Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ telle qu'une itérée T^p est contractante.

1. Montrer que T admet un unique point fixe, obtenu comme limite de $x_{n+1} = T(x_n), x_0 = a$ quelque soit $a \in X$.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(x) = f(x^2)$.

Exercice 1.18. On pose $F(x, y) = (x + \cos x/2 + \sin y/2, y - \sin y/2 + \cos x/2)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que le système $F(x, y) = (a, b)$ admet toujours une solution.

Exercice 1.19. Montrer qu'une bijection continue $f : X \to Y$ où X est compact, est de réciproque continue.

Exercice 1.20. Montrer qu'un produit de deux espaces métriques compacts $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ est compact, muni de la distance $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Exercice 1.21 (Théorème de Dini)**.** Soit X un espace métrique compact et $(f_n) : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions convergeant simplement vers une fonction continue f.

1. Montrer que f_n converge uniformément vers f. (On pourra considérer les quantité $M_n \coloneqq \sup_x\{f(x) - f_n(x)\}$.)
2. On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 0$, $P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x^2 - P_n^2)$. Montrer que P_n converge uniformément vers la valeur absolue sur $[0, 1]$.

2 Espaces vectoriels normés

Intérêt Bon cadre pour généraliser $\mathbb{R}^d$ puis faire de l'analyse en dimension infinie (espaces de fonctions).

2.1 Généralités

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition 2.1 (Norme, espace normé)**.** Une norme est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité),

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire),

(iii) $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation).

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un *espace vectoriel normé* (evn).

Remarque 2.2. Si seuls les deux premiers axiomes sont satisfaits, il s'agit alors d'une *semi-norme* et on parle d'espace vectoriel *semi-normé.*

Remarque 2.3. Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est naturellement muni d'une structure d'espace métrique en posant $d(x,y) = \|y-x\|$. Celle-ci est homogène et invariante par translation.

Proposition 2.4. *Si $(E, \|\cdot\|)$ est un evn, la norme est une application 1-Lipschitzienne (et donc en particuleir continue) d'après l'inégalité triangulaire renversée :*

$$|\|y\| - \|x\|| \leq \|y-x\|.$$

De plus, les applications $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ et $(x,y) \mapsto x+y$ sont continues de $\mathbb{R} \times E$ dans E et de $E \times E$ dans E respectivement.

Par abus, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, une même notation $\|\cdot\|$ sera utilisée pour toutes les normes. Si T est une applications linéaire entre deux evn E et F, on définit

$$\|T\| \coloneqq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

L'application linéaire T est continue si et seulement si $\|T\| < +\infty$, d'après l'exercice suivant, et $\|\cdot\|$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F, appelée *norme d'opérateur.*

Exercice 2.1. Soit T une application linéaire de E dans F. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\|T\| \coloneqq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} < \infty$;

b) T est Lipschitzienne ;

c) T est continue ;

d) T est continue en 0 ;

e) T est bornée sur $B_f(0,1)$.

f) T est bornée sur une boule $B(x,r)$ ou $B_f(x,r)$.

Exemple 2.5. Les espaces suivants sont des evn :

— $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ où $\|(x_1, \ldots, x_d)\|_p = \left(\sum_{i \leq d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$,

— $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ où $\ell^p(\mathbb{N}, E)$ avec E evn,

— l'espace des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(X,E)$ où X est quelconque, E est un evn, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$,

— l'espace $\mathcal{C}(K, E)$ des fonctions continues sur un métrique compact K à valeurs dans un evn E muni de la convergence uniforme,

— les espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ définis dans un prochain chapitre.

En analyse, on recherche de la *compacité* pour résoudre des problèmes d'existence. On ne peut pas espérer qu'un evn non trivial soit compact : il n'est même pas borné. Peut-on néanmoins espérer que $B_f(0,1)$ le soit ? Presque jamais... sauf en dimension finie, comme nous allons le voir maintenant.

2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Il s'agit de généraliser les propriétés de $\mathbb{R}^d$, en « oubliant » le produit scalaire canonique pour l'instant. Dans $\mathbb{R}^d$, la norme infinie est définie par $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le d}|x_i|$, et les boules pour cette norme sont simplement des cubes ; on note $Q(x,r) = \{y : \|y-x\|_\infty \le r\}$ le cube centré en x de côté $2r$. Observons que :

— $[-1,1]$ est compact (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass),

— en dimension $d \ge 1$, le cube unité $Q(0,1) = [-1,1]^d$ est compact comme produit d'espaces compacts,

— tous les cubes $Q(x,r)$ sont aussi compacts comme translatés et dilatations du cube unité (ces opérations étant continues),

— les bords des cubes $\partial Q(x,r) = \{y : \|x-y\|_\infty = r\}$ sont par conséquent également compacts.

On peut déduire les principales propriétés des evn de dimension finie à partir de ces observations.

Proposition 2.6 (Équivalence des normes)**.** *Si E est un evn de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E et $\|\cdot\|$ une norme quelconque. Si x se décompose $x = \sum x_i e_i$ dans cette base, on pose :

$$\|x\|'_\infty \coloneqq \max_{1\le i\le d}|x_i|.$$

Montrons que $\|\cdot\|'_\infty$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes. Remarquons tout d'abord que l'application $\phi : (x_i)_{1\le i\le d} \mapsto \sum_i x_i e_i$ réalise une isométrie linéaire entre $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|'_\infty)$, de sorte que les sphères $S'_\infty(x,r)$ et boules fermées $B'_\infty(x,r)$ dans $(E, \|\cdot\|'_\infty)$ sont compacts d'après les obervations faites en préambule. On a pour tout $x \in E$, par propriétés d'une norme :

$$\|x\| = \left\|\sum x_i e_i\right\| \le \sum_i \|x_i e_i\| \le \sum_i \|e_i\| \max_i |x_i| = C\|x\|'_\infty,$$

où $C \coloneqq \sum_i \|e_i\|$. Par conséquent, l'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne donc continue sur l'espace $(E, \|\cdot\|'_\infty)$. Donc elle atteint ses bornes sur le compact $S'_\infty(0,1)$, en particulier son infimum : il existe $x^\star \in S'_\infty(0,1)$ tel que

$$\inf_{x:\|x\|'_\infty = 1} \|x\| = \|x^\star\| \eqqcolon c > 0.$$

Par homogénéité des normes, on a donc $\|x\| \geq c\|x\|'_\infty$ pour tout $x \in E$, ce qui conclut, puisqu'on a montré d'autre part que $\frac{1}{C}\|x\|'_\infty \leq \|x\|$. □

Proposition 2.7 (Compacts en dimension finie)**.** *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. On a déjà vu que dans un espace métrique, une partie compacte est nécessairement fermée et bornée, il s'agit de voir la réciproque. En gardant les notations de la preuve précédente, les normes étant équivalentes, il suffit de montrer la proposition pour l'espace $(E, \|\cdot\|'_\infty)$, et même uniquement pour $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ d'après l'isométrie linéaire ϕ. Prenons alors A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Par définition du caractère borné, A est incluse dans un cube fermé $Q(x, r)$, donc A est compact comme partie fermée de l'espace compact $Q(x, r)$. □

Proposition 2.8. *Un evn de dimension finie est toujours complet.*

Démonstration. De la même manière qu'à la preuve précédente, il suffit de remarquer que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. □

Il s'agit maintenant de montrer que la compacité de la boule unité fermée est *spécifique* à la dimension finie. Commençons par un lemme de F. Riesz.

Lemme 2.9 (Lemme de F. Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel strict. Pour tout $r \in]0, 1[$, il existe $u \in E \setminus F$ tel que $\|u\| = 1$ et $d(u, F) \geq r$.*

Démonstration. L'idée est de prendre u dans une direction « presque orthogonale » à F. Attention, on ne dispose pas de produit scalaire ! Dans notre cadre normé plus général, on peut considérer comme « orthogonal » à une partie A, un vecteur dirigé par $x - p$, où p est un projeté de x sur A, i.e. un point $p \in \operatorname{argmin}_{y \in A} d(x, y)$.

Bref, soit $x \in E \setminus F$. Par définition d'un infimum, puisque $d(x, F)/r > d(x, F)$, il existe $v \in F$ tel que

$$d(x, F) \leq \|x - v\| \leq \frac{d(x, F)}{r}.$$

On pose donc $u = \dfrac{x - v}{\|x - v\|}$. Par construction, $u = 1$, et par ailleurs, si $y \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\|u - y\| = \left\| \frac{x - v}{\|x - v\|} - y \right\| &= \frac{1}{\|x - v\|} \|x - (v + y\|x - v\|)\| \\
&\geq \frac{1}{\|x - v\|} d(x, F) \quad \text{car} \quad v + y\|x - v\| \in F \\
&\geq r.
\end{aligned}$$

D'où en prenant l'infimum sur $y \in F$: $d(u, F) \geq r$. □

Théorème 2.10 (Théorème de F. Riesz)**.** *Soit E est un evn. Sa boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. On a déjà vu que si E est de dimension finie, sa boule unité fermée est compacte. Montrons la réciproque par l'absurde, en supposant que $B_f(0,1)$ est compact et que E n'est pas de dimension finie. Commençons par prendre un point u_0 de norme 1 puis $F_0 = \text{Vect}\{u_0\}$. Comme E n'est pas de dimension finie, $F_0 \neq E$ donc d'après le lemme de F. Riesz (avec $r = 1/2$), il existe $u_1 \in E \setminus F_0$ de norme 1 tel que $d(u_1, F_0) \geq \frac{1}{2}$, et on pose $F_1 = \text{Vect}\{u_0, u_1\}$. À nouveau, $F_1 \neq E$ car E n'est pas de dimension finie, et on continue par récurrence. On construit ainsi une suite de vecteurs unitaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de sous-espaces vectoriels $F_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ tels que pour tout n, $d(x_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$ et en particulier pour tous $n \neq m$,

$$\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, il est impossible d'extraire de (u_n) une suite qui soit de Cauchy, et donc qui soit convergente : ceci contredit la compacité de la sphère unité ! $\square$

Remarque 2.11. En réalité, la preuve montre que si E est de dimension infinie, la sphère unité n'est pas précompacte : les x_i (et donc la sphère unité non plus) ne peuvent être recouverts par un nombre fini de boules de rayon $1/4$.

2.3 Espaces de Banach

Définition 2.12 (Espace de Banach)**.** Un espace normé complet est appelé *espace de Banach.*

Exercice 2.2. Les espaces suivants sont-ils des espaces de Banach ? Justifiez.

1. $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
2. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie ;
3. $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme L^1 ;
4. $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \{(u_n) : \sum |u_n|^p < \infty\}$ muni de la norme ℓ^p.

Il est possible de caractériser un espace de Banach en regardant la convergence de ses séries.

Théorème 2.13 (Caractérisation par convergence absolue)**.** *Un evn E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Supposons que E est un espace de Banach, et prenons une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E qui est absolument convergente, au sens où la série numérique $\Sigma \|x_n\|$ est convergente. On dénote la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. On a

$$\begin{aligned}
\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| \\
&\leq \sum_{k\geq n+1} \|x_k\| \\
&\xrightarrow{n\to+\infty} 0,
\end{aligned}$$

de sorte que la suite $(S_n)_n$ est de Cauchy dans E, donc elle converge.

Réciproquement, supposons que toute suite ACV est CV. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Il suffit de trouver une sous-suite convergente, alors nécessairement puisque (x_n) est de Cauchy, elle sera convergente. Par définition de la complétude, il existe n_0 tel que $\forall p,q \geq n_0$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-0}$. Il existe ensuuite $n_1 > n_0$ tel que $\forall p,q \geq n_1$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-1}$ et on continue par récurrence. On construit par là une extractrice $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite d'entiers strictement croissante, telle que pour tout k, $\forall p,q \geq n_k$, $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$, et en particulier $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$. Remarquons que $(x_{n_k})_k$ converge si et seulement si la série $\Sigma(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ converge. Or $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ pour tout k, donc la série $\Sigma\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ est convergente car positive majorée par le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison $1/2$). Ainsi $\Sigma(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ est absolument convergente, donc convergente par hypothèse. Au final la suite extraite (x_{n_k}) est convergente, d'où le résultat. □

Exercice 2.3. Montrer que l'espace $L^1([0,1],\mathbb{R})$ est un espace de Banach en utilisant le critère de convergence absolue des espaces de Banach.

Théorème 2.14 (Prolongement des applications linéaires continues)**.** *Si F est un sous-espace vectoriel dense de E et $T : F \to G$ une aplication linéaire continue à valeurs dans un espace de Banach G, alors T admet un unique prolongement continu à E tout entier, qui en fait une application linéaire continue $\bar{T}$ telle que $\|\bar{T}\| = \|T\|$.*

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 1.13. □

Définition 2.15 (Espace dual)**.** Si E est un espace vectoriel normé, l'espace des *formes linéaires continues* $E' := \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$, muni de la norme d'opérateur, est appelé le *dual* de E.

Remarque 2.16. Puisque $\mathbb{R}$ est un espace de Banach, E' est toujours un espace de Banach (que E le soit ou non).

Nous ne développerons pas la théorie de la dualité dans un espace de Banach maintenant. Nous n'en aurons pas besoin dans les espaces de Hilbert, où le dual s'identifie canoniquement, comme on le verra, à l'espace de Hilbert primal (i.e. de départ).

2.4 Espaces de Hilbert

Intérêt Généralisation de $\mathbb{R}^d$ en tant qu'espace euclidien à la dimension infinie.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.17 (Produit scalaire)**.** Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est une forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ qui est

(i) symétrique : $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$,

(ii) définie : $\langle x,x\rangle = 0 \implies x = 0$,

(iii) positive : $\langle x,x\rangle \geq 0$.

Définition 2.18 (Produit hermitien)**.** Un produit hermitien sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, c'est-à-dire une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{C}$ linéaire à gauche et semi-linéaire à droite [1] au sens où $\langle x, y+\lambda y'\rangle = \langle x,y\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y'\rangle$ pour tous $x, y, y' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et qui est de plus

(i) hermitienne : $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

(ii) définie : $\langle x,x\rangle = 0 \implies x = 0$,

(iii) positive [2] : $\langle x,x\rangle \geq 0$.

Un produit scalaire munit un espace vectoriel d'une structure assez proche de celle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. Un certain nombre d'identités et d'inégalités sont encore vérifiées, en particulier la *fondamentale* et *très utile* inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition 2.19 (Inégalités de Cauchy-Schwartz et de Minkowski)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit sclaire (resp. hermitien), en notant $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, les inégalités suivantes sont satisfaites :*

(Cauchy-Schwartz) $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, *avec égalité ssi x et y sont liés,*

(Minkowski) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *avec égalité ssi x et y sont positivement liés, i.e. il existe $\lambda, \mu \geq 0$ tels que $\lambda x = \mu y$.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$. On écrit que la norme au carré de $\|x\|y - \|y\|x$ est positive et on utilise l'identité remarquable $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$ sur $\mathbb{R}$, resp. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle$ sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|\|x\|y - \|y\|x\|^2 \geq 0 &\iff \|x\|^2\|y\|^2 + \|y\|^2\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\|\langle x,y\rangle \geq 0 \\ &\iff (\|x\|\|y\|)^2 \geq \langle x,y\rangle\|x\|\|y\| \\ &\iff \langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|, \text{ resp. } \mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Remarquons que l'inégalité de Minkowski est équivalente à :

$$\begin{aligned} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\| \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ resp. } \mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq \|x\|\|y\| \text{ sur } \mathbb{C}, \end{aligned}$$

donc celle-ci est vérifiée. Remarquons d'après (2.1) qu'on a égalité dans Minkowski ssi $\|x\|y = \|y\|x$, càd x et y sont liés.

Pour l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il suffit de remarquer qu'il existe λ tel que $\langle\lambda x, y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ dans $\mathbb{R}$, resp. $\mathrm{Re}\langle\lambda x,y\rangle = |\langle x,y\rangle|$ dans $\mathbb{C}$: dans $\mathbb{R}$, prendre $\lambda = \pm 1$, et dans $\mathbb{C}$ prendre $\lambda = e^{-i\theta}$ où θ est un argument de $\langle x,y\rangle$. On remplace alors x par λx dans (2.1) pour trouver l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et on a égalité ssi

$$\|\|\lambda x\|y - \|y\|\lambda x\|^2 = 0 \iff \|x\|y = \lambda\|y\|x,$$

et donc x et y sont liés. Réciproquement, il est clair que si x et y sont liés, on a égalité dans Cauchy-Schwartz. $\square$

1. Attention, dans certaines définitions, elle est linéaire à droite et semi-linéaire à gauche.
2. Remarquons que le premier point garantit que $\forall x, \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$.

On peut reconstituer le produit scalaire ou hermitien à partir de la norme qu'elle induit à l'aide des *formules polaires.*

Proposition 2.20 (Formules polaires)**.** *Si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme $\|\cdot\|$, pour tous x, y :*

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

et si E est muni d'un produit hermitien :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\sum_{\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}} \lambda \|x + \lambda y\|^2}{8}.$$

Exercice 2.4. Démontrer les formules polaires : si E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme $\|\cdot\|$, pour tous x, y,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

et si E est muni d'un produit hermitien,

$$\langle x, y \rangle = \frac{\sum_{\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}} \lambda \|x + \lambda y\|^2}{8}.$$

Proposition 2.21 (Identité du parallélogramme)**.** *Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ou produit hermitien, alors pour tous $u, v \in E$,*

$$\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2} = \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2.$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

Exercice 2.5. Soit E un espace vectoriel réel (resp. complexe).

1. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire (resp. hermitien), de norme $\|\cdot\|$, montrer que celle-ci vérifie l'identité du parallélogramme.
2. Réciproquement, supposons que $\|\cdot\|$ est une norme sur E qui vérifie l'identité du parallélogramme, montrer que la formule polaire réelle (resp. complexe) définit un produit scalaire (resp. hermitien).

Définition 2.22 (Espace de Hilbert)**.** Un *espace de Hilbert* réel (resp. complexe) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (resp. $\mathbb{C}$-espace vectoriel) muni d'un produit scalaire (resp. produit hermitien) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont la norme associée $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x \rangle}$ en fait un espace de Banach.

Le produit scalaire et la complétude garantissent une propriété fondamentale des espaces de Hilbert : l'existence de projections.

Théorème 2.23 (Théorème de projection)**.** *Si H est un espace de Hilbert, $C \subseteq H$ est un convexe fermé et x un point de H, alors il existe un unique minimiseur*

$$p \in \operatorname{argmin}_{p \in C} \|p - x\|,$$

appelé projeté de x sur C et noté $p_C(x)$. C'est l'unique p tel que *(i)* $p \in C$,

(ii) $\langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \quad (\forall y \in H)$ *si* H *est un Hilbert réel,*

$\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0 \quad (\forall y \in H)$ *si c'est un Hilbert complexe.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite d'éléments de C telle que $\|y_n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} \inf_{y\in C}\|y - x\| \doteq d(x,C)$. Montrons que (y_n) est de Cauchy. On applique l'identité du parallélogramme à $u = y_p - x$ et $v = y_q - x$:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{y_q - y_p}{2}\right\|^2 + \left\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|y_q - x\|^2 + \|y_p - x\|^2\right)\\
\overset{\frac{1}{2}(y_p+y_q)\in C}{\Longrightarrow}\ &\left\|\frac{y_q - y_p}{2}\right\|^2 + d(x,C)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|y_q - x\|^2 + \|y_p - x\|^2\right)\\
&\Longrightarrow \frac{1}{4}\|y_q - y_p\|^2 \leq \frac{(\|y_q - x\|^2 - d(x,C)^2) + \|y_p - x\|^2 - d(x,C)^2)}{2}\\
&\qquad\qquad \xrightarrow{p,q\to+\infty} 0,
\end{aligned}
$$

de sorte que (y_n) est de Cauchy. Comme H est complet, (y_n) converge vers un certain p qui est dans C car C est fermé. Par continuité de la norme, on obtient $\|x-p\| = d(x,C)$, donc $p \in \operatorname{argmin}_{y\in C}\|x-y\|$.

Montrons l'unicité de p. Prenons $\tilde{p} \in \operatorname{argmin}_{y\in C}\|x-y\|$, et à nouveau utilisons l'identité du parallélogramme, avec $u = p - x$ et $v = \tilde{p} - x$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left\|\frac{p-\tilde{p}}{2}\right\|^2 &= \frac{\|x-p\|^2 + \|x-\tilde{p}\|^2}{2} - \left\|\frac{p+\tilde{p}}{2}\right\|^2\\
&= d(x,C)^2 - \underbrace{\left\|\frac{p+\tilde{p}}{2}\right\|^2}_{\geq d(x,C)^2 \text{ car } \frac{p+\tilde{p}}{2}\in C}\\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

donc on a égalité et $p = \tilde{p}$.

Passons à la caractérisation du projeté, en commençant par montrer que $p = p_C(x)$ vérifie les propriétés souhaitées. Évidemment, $p_C(x) \in C$. D'autre part, soit $y \in C$. Par minimalité $\|y-x\|^2 \geq \|p-x\|^2$, soit en développant (par exemple sur $\mathbb{C}$) $\|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \geq \|p\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x,p\rangle$. En remplaçant y par $y_t = p + t(y-p)$ où $t \in]0,1]$, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\|y_t\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \geq \|p\|^2\\
\iff\ & 2t\,\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \leq \|y_t\|^2 - \|p\|^2 = 2t\,\mathrm{Re}\langle p, y-p\rangle + t^2\|y-p\|^2
\end{aligned}
$$

On divise par $2t$ puis en faisant $t \to 0$, on obtient bien $\mathrm{Re}\langle x, y-p\rangle \leq \mathrm{Re}\langle p, y-p\rangle$. On procède de la même manière sur $\mathbb{R}$. Supposons réciproquement que $p \in C$ est un point tel que $\mathrm{Re}\langle y-p, x-p\rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$. En utilisant l'identité remarquable on obtient

$$
\begin{aligned}
\|y-x\|^2 &= \|(y-p)-(x-p)\|^2\\
&= \|x-p\|^2 + \|y-p\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x-p, y-p\rangle
\end{aligned}
$$

ce qui équivalent à

$$\begin{aligned}\|p-x\|^2 - \|y-x\|^2 &= -\|y-p\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x-p, y-p\rangle \\ &\leq 0+0,\end{aligned}$$

d'où $\|p-x\|^2 \leq \|y-x\|^2$ pour tout $y \in C$, ce qui conclue. $\square$

Dans le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé F, cela permet d'obtenir une décomposition de H en somme d'espaces orthogonaux.

Définition 2.24 (Orthogonalité)**.** Soit H un espace de Hilbert. On dit que x et y sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Étant donné un sev F, on définit l'espace orthogonal à F comme $F^\perp = \{y : x \perp y\}$.

Notons que par continuité et linéarité du produit scalaire (resp. sesquilinéarité du produit hermitien), $F^\perp$ est toujours un sev fermé et que $\bar{F}^\perp = F^\perp$.

Proposition 2.25. *Soit H un espace de Hilbert et F un sev fermé de H. Les applications $p_F, p_{F^\perp}$ sont les projecteurs orthogonaux sur F et $F^\perp$ respectivement (elles sont en particulier linéaires) et H se décompose en sous-espaces supplémentaires :*

$$\begin{aligned}H &= F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \\ \mathrm{Id} &= p_F + p_{F^\perp}.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x \in H$. Il se décompose en $x = p+q$ où $p = p_F(x)$ et $q = x - p_F(x)$. On sait que (dans $\mathbb{C}$ par exemple) $\operatorname{Re}\langle x-p, y-p\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$, c'est-à-dire $\operatorname{Re} e^{i\theta}\langle q, y\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$ car F est un $\mathbb{C}$-ev. À y fixé, on peut trouver θ tel que $\operatorname{Re} e^{i\theta}\langle q, y\rangle = |\langle q, y\rangle|$, de sorte que $|\langle q, y\rangle| = 0$ pour tout $y \in F$. Par conséquent, $x - p_F(x) \in F^\perp$, de sorte que $H = F + F^\perp$. Nécessairement $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ car F et $F^\perp$ sont orthogonaux, et ainsi p_F est la projection linéaire sur F parallèlement à $F^\perp$.

En faisant le même raisonnement avec $F^\perp$ au lieu de F, on a la somme directe $H = F^\perp \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp\perp}$ et x s'y décompose $x = p_{F^\perp}(x) + (x - p_{F^\perp}(x))$. Or $x = (x - p_F(x)) + p_F(x)$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ tandis que $p_F(x) \in F \subseteq F^{\perp\perp}$, donc par unicité de la décomposition dans $F^\perp \oplus F^{\perp\perp}$, on obtient $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x)$ et $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$. D'où la décomposition $\mathrm{Id} = p_F + p_{F^\perp}$. $\square$

Remarque 2.26. Remarquons qu'on a à la fois $H = F \oplus F^\perp$ et $H = F^{\perp\perp} \oplus F^\perp$, et comme F est un sev de $F^{\perp\perp}$, alors $F = F^{\perp\perp}$.

Récapitulons quelques propriétés sur les orthogonaux, dont les preuves ont déjà été données ou sont immédiates.

Proposition 2.27. *Si H est un espace de Hilbert et F un sev.*

— *$F^\perp$ est toujours fermé,*

— *$F^\perp = \bar{F}^\perp$,*

— *$F^{\perp\perp} = \bar{F}$.*

Proposition 2.28 (Hyperplans et orthogonalité)**.** *Si H est un espace de Hilbert et F est un hyperplan fermé, i.e. $F = \{x : f(x) = 0\}$ où $f \in E'$ est une forme linéaire non nulle, alors $F^\perp$ est une droite $F^\perp = \operatorname{Vect} u$, $u \in F^\perp, u \neq 0$.*

Démonstration. Soit $u \in F^\perp$, $u \neq 0$. En particulier $u \notin F$, donc $f(u) \neq 0$. Prenons $x \in H$ puis notons $x_\lambda = f - \lambda u$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité $f(x_\lambda) = f(x) - \lambda f(u)$, et donc il existe λ tel que $f(x_\lambda) = 0$, i.e. $x_\lambda \in F$. Bref

$$x = \underbrace{x_\lambda}_{\in F} + \underbrace{\lambda u}_{\in F^\perp},$$

d'où $x_\lambda = p_F(x)$ et $\lambda u = p_{F^\perp}(x)$ de sorte que $F^\perp = \operatorname{Im} p_{F^\perp} \subseteq \operatorname{Vect} u$, et on a égalité $F^\perp = \operatorname{Vect} u$ car $u \in F^\perp$. $\square$

Dualité

Étant donné $y \in H$, l'application $j_y : H \to K, x \mapsto \langle x, y\rangle$ appartient à H', et $\|j_y\| \leq \|y\|$ d'après Cauchy-Schwartz. Sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$), l'application $j : H \to H', y \mapsto j_y$ est linéaire (resp. semi-linéaire) continue.

Théorème 2.29 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Si H est un Hilbert réel (resp. complexe), il s'identifie à son dual, au sens où j est une isométrie linéaire (resp. semi-linéaire) bijective.*

Démonstration. Plaçons-nous dans le cas réel. On remarque que $j_y(y) = \|y\|^2 > 0$ si $y \neq 0$, donc j_y est non nulle et j est injective. De plus, c'est une isométrie : d'une part d'après Cauchy-Schwartz, $\|j_y\| \leq \|y\|$, et d'autre part $j_y(y) = \|y\|\|y\|$, donc $\|j_y\| \geq \|y\|$ et on a inégalité.

Montrons que j est surjective. Soit f une forme linéaire non nulle et $F = \{x : f(x) = 0\}$. On sait que $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. D'après la Proposition 2.28, il existe $u \in F^\perp$ non nul tel que $F^\perp = \operatorname{Vect} u$, et on peut supposer que $f(u) = \|u\|^2$ (quitte à multiplier u par un scalaire bien choisi). Vérifions que $j_u = f$ sur F et sur $F^\perp$. Si $x \in F$, $f(x) = 0 = \langle x, u\rangle$. Si $x \in F^\perp$, il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda u$. D'une part, $f(x) = \lambda f(u) = \lambda\|u\|^2$, et d'autre part $\langle x, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle = \lambda\|u\|^2$, d'où $f(x) = \langle x, u\rangle$. Par conséquent j_u et f coïncident sur F et $F^\perp$, donc sur leur somme H, d'où le résultat. $\square$

Bases hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe). À la notion de base venant de l'algèbre linéaire, adaptée au cas de la dimension finie, on substitue la notion de *base hilbertienne*, qui est adaptée à la dimension infinie.

Définition 2.30 (Base hilbertienne)**.** Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est une base hilbertienne si

(i) $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq$ (famille orthogonale),

(ii) $\|e_i\| = 1$ pour tout i (famille unitaire),

(iii) $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i : i \in I\}}$ (famille totale).

Proposition 2.31. *Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Si l'espace H est de dimension finie, le résultat est évident : il suffit de prendre une base (algébrique) orthonormée. Si H est de dimension infinie, soit (x_n) une suite dense. Posons $F_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On peut construire une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ orthonormée telle que pour tout n, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de F_n, par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (le même qu'en algèbre linéaire, sans que le procédé ne s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations, dans notre cas) : ayant construit une bon $(e_1, \ldots, e_n)$ de F_n, si $x_{n+1} \notin F_n$, alors on complète cette famille (par Gram-Schmidt) en une bon $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ de F_{n+1}, et on itère. Par construction, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne. $\square$

Théorème 2.32 (Décomposition hilbertienne, inégalités de Bessel)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n : n < N\}, N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ une famille orthonormée, finie ou non. Pour tout $n < N$, on note $F_n = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$, et $F = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n : n < N\}}$. Alors*

(i) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^\star}\langle x, e_n\rangle e_n$ est convergente dans H et $p_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$,

(ii) $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{n\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$.

En particulier $\|x\|^2 \geq \sum_{n\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$ (inégalité de Bessel).

Démonstration. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$. On a par définition $S_n \in F_n$ et $\langle x - S_n, e_k\rangle = 0$ pour tout $k \leq n$, donc $x - S_n \in F_n^\perp$ par linéarité et $S_n = p_{F_n}(x)$.

Puisque $x = S_n + (x - S_n)$ et $S_n \perp (x - S_n)$, $\|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$, et en particulier $\|S_n\|^2 \leq \|x\|^2$. En remarquant que $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$ par orthogonalité des e_k, cela implique que la série posiive $\Sigma_k|\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente car majorée par $\|x\|^2$. En passant à la limite, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Montrons que (S_n) est de Cauchy. On a

$$\begin{aligned}\|S_{n+p} - S_n\|^2 &= \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p}|\langle x, e_k\rangle|^2 \\ &\xrightarrow{n\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

Ainsi (S_n) converge vers un certain $\tilde{x} \in H$ et $\|S_n\|^2 \to \|\tilde{x}\|^2$. Par ailleurs $\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \to \sum_{k\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$, d'où $\|\tilde{x}\| = \sum_{k\geq 1}|\langle x, e_k\rangle|^2$.

Reste à montrer que $\tilde{x} = p_F(x)$. Par continuité du produit scalaire, on a pour tout i :

$$\langle \tilde{x}, e_i \rangle = \sum_{k \geq 1} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle,$$

la dernière égalité venant de l'orthogonalité de la famille. Ainsi $\langle \tilde{x} - x, e_i \rangle = 0$ pour tout i, et comme $F = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n : n < N\}}$, cela veut dire que $\tilde{x} - x \in F^\perp$ d'où $p_F(x) = \tilde{x}$. □

Corollaire 2.33 (Décomposition hilbertienne, égalité de Parseval)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n : n < N\}, N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ base orthonormée (finie ou non). Alors*

(i) la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^\star} \langle x, e_n \rangle e_n$ est convergente dans H et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$,

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n \geq 1} |\langle x, e_k \rangle|^2$ (égalité de Parseval)

Exercice 2.6 (Base de Fourier)**.** On note $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ l'espace des fonctions boréliennes complexes f définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, telles que $\int_0^{2\pi} |f|^2 < +\infty$ (modulo l'égalité presque partout), muni du produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f \bar{g}$. Montrer que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ définie par $e_n(x) = e^{ix}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T}, \mathbb{C})$. (On pourra admettre que l'espace des polynômes trigonométriques est dense dans $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$.)

2.5 Exercices

Exercice 2.7. Montrer que l'image d'une application linéaire $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$ k-dissipative, i.e. $\|T(x)\| \geq k\|x\|$ pour tout $x \in E$, sur un Banach E est fermée.

Exercice 2.8. On considère l'espace $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

1. On considère le sous-ensemble $K = \{(u_n) : \forall n, |u_n| \leq \varepsilon_n\}$ où $(\varepsilon_n) \in \ell^p$. Montrer que K est compact. (On pourra utiliser le critère de complétude et pré-compacité.)
2. On considère une partie K fermée, bornée et équi-intégrable, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall (u_n) \in K, \quad \sum_{n \geq N} |u_n|^p \leq \varepsilon.$$

   Montrer que K est compacte.
3. Donner un exemple de compact K ne satisfaisant pas a).
4. Montrer réciproquement que tout compact K de ℓ^p est équi-intégrable.

Exercice 2.9. Soit E, E' deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E d'intérieur non vide, alors $E = F$.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(E, E')$. En déduire l'équivalence :
   a) T est surjective ;
   b) T est d'image ouverte ;
   c) $T(E)$ est d'interieur non vide.

Exercice 2.10. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Montrer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est un Banach.

Exercice 2.11. Montrer qu'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 2.12 (Intégrale de Riemann des fonctions réglées)**.** Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}_b([0,1],E)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier, càd de la forme $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{I_i}$ où les I_i sont des intervalles inclus dans $[0,1]$ et $\alpha_i \in E$. On définit son intégrale par

$$I(f) = \sum_i \ell(I_i)\alpha_i.$$

1. Montrer que c'est une application linéaire continue de $\mathcal{E}$ dans E.
2. En déduire un prolongement à $\mathcal{R} = \bar{\mathcal{E}}$, l'espace des fonctions réglées.
3. Montrer qu'une fonction continue est une fonction réglée.

Exercice 2.13. Sur $[0,1]$, on considère une suite de subdivisions $\Delta_n : 0 = x_0^n < \ldots < x_{N_n}^n = 1$, pointée par $\xi_i^n \in [x_i^n, x_{i+1}^n]$, dont le pas $\sigma_n = \max\{x_{i+1}^n - x_i^n\} \to 0$. On définit les sommes de Cauchy :

$$S_n(f) = \sum_i f(\xi_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n).$$

Montrer que S_n converge simplement vers I sur l'espace des fonctions réglées (voir l'exercice précédent).

Exercice 2.14. Montrer que si une intégrale est absolument convergente à valeurs dans un Banach, i.e. $\int_0^{+\infty} \|f\| < +\infty$, elle est convergente : la limite $\lim M \to +\infty \int_0^M f$ existe.

Exercice 2.15. Soit E un espace de Banach. On considère $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$.

1. Montrer que $\mathrm{Id} - T$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n$, dont on justifiera l'existence.
2. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $S^2 = \mathrm{Id} + T$.

Exercice 2.16. On considère les espaces $\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $B : \ell^1 \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$, est bien définie par la formule

   $$B(u,v) = \sum_n u_n v_n$$

   et qu'elle est bilinéaire et continue. En déduire que $B(\cdot,\bar{v}) \in (\ell^1)'$ et $B(\bar{u},\cdot) \in (\ell^\infty)'$ pour tous $\bar{u},\bar{v}$, et que les applications $i_1 : \ell^\infty \to (\ell^1)'$, $i_1 : \bar{v} \mapsto B(\cdot,\bar{v})$ et $i_\infty : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $i_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u},\cdot)$ sont continues.
2. Montrer que i_1 est une isométrie bijective (« ℓ^∞ est le dual de ℓ^1 »).
3. Montrer que i_∞ est une isométrie mais n'est pas bijective.
4. On considère $j_\infty : \bar{u} \mapsto B(\bar{u},\cdot)_{|c_0}$, $j_\infty : \ell^1 \to (c_0)'$. Montrer que j_∞ est une isométrie bijective (« ℓ^1 est le dual de c_0 »).

3 Théorie de la mesure

Intérêt Généraliser l'intégrale de Riemann pour obtenir des théorèmes d'interversion limite-intégrale puissants, de bons espaces fonctionnels (complétude des espaces L^p), pouvoir intégrer ou « moyenner » sur tous types d'espaces (y compris de dimension infinie), donner une base commune à l'analyse et aux probabilités, décrire finement les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ (ou d'autres espaces) en fonction de leur « taille » mesurée selon différentes *mesures* (théorie géométrique de la mesure), entre autres...

3.1 Tribus et mesures

On veut définir une mesure sur un ensemble X comme une quantité positive associée à ses sous-ensembles, et qui vérifie certaines propriétés assez naturelles : un ensemble vide a mesure nulle, la mesure de deux ou plusieurs morceaux disjoints doit être la sommme des mesures de chaque morceau. On a toujours en tête la droite réelle, et la mesure qu'on a envie d'attribuer à un intervalle $[a, b]$: sa longueur $b - a$. Or un résultat important stipule qu'il n'existe pas de mesure sur toutes les parties de $\mathbb{R}$, qui donne la longueur aux intervalles et vérifie les propriétés souhaitées ! La solution est de ne pas chercher à mesurer *toutes* les parties de $\mathbb{R}$, mais seulement une collection plus réduite : la tribu engendrée par les intervalles, appelée tribu de Borel.

Définition 3.1 (Clans et tribus)**.** Soit X un ensemble.

— Un *clan*, ou *algèbre*, sur X est une collection de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que
  - — $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,
  - — $A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \mathcal{C}$,
  - — $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n \in \mathcal{C}$,
  - — $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{1 \leq n \leq N} A_n \in \mathcal{C}$.

— Une *tribu*, ou *σ-algèbre*, sur X est une collection de parties $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que
  - — $\emptyset, X \in \mathcal{C}$,
  - — $A \in \mathcal{C} \implies A^c \in \mathcal{C}$,
  - — $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$,
  - — $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

Exemple 3.2. — $\{\emptyset, X\}$ est la *tribu grossière* sur X.

— $\mathcal{P}(X)$ est la *tribu discrète* sur X.

— La collection formée des réunions finies d'interveralles disjoints de $\mathbb{R}$ est une algèbre.

— La collection des parties finies ou co-finies (de complémentaire fini) d'un ensemble X est une algèbre sur X.

— La collection des parties dénombrables[3] ou co-dénombrables (de complémentaire dénombrable) d'un ensemble X est une tribu sur X.

3. Par dénombrable, on veut toujours dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Définition 3.3 (Clan et tribu engendrée)**.** Une intersection quelconque de clans (resp. de tribus) est encore un clan (resp. une tribu). Aussi, étant donné $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$, on peut définir le plus petit clan contenant $\mathcal{X}$, noté $\phi(\mathcal{X})$, et la plus petite tribu contenant $\mathcal{X}$, notée $\sigma(\mathcal{X})$.

Exemple 3.4 (Tribu de Borel). Dans un espace métrique (X, d), une tribu aura une importance particulière : la *tribu de Borel*, définie comme la plus petite tribu $\sigma(\mathcal{O})$ contenant la collection de tous les ouverts $\mathcal{O}$.

Définition 3.5 (Espace mesurable)**.** Un couple $(X, \mathcal{T})$ formé d'un ensemble X et d'une tribu $\mathcal{T}$ sur X est appelé un *espace mesurable.*

Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ est une collection d'ensembles et $f : X \to Y$, on note $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(A) : A \in C\}$.

Exercice 3.1. Soit $f : X \to Y$ et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
2. En déduire qu'une fonction continue entre deux espaces métriques est borélienne.

On notera $A \sqcup B$ et $\bigsqcup_i A_i$ des réunions d'ensembles disjoints.

Définition 3.6 (Fonction additive et σ-additive)**.** Soit $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ contenant $\emptyset$ et $f : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ telle que $f(\emptyset) = 0$. Elle est dite

— *additive* si $f(\bigsqcup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N f(A_i)$ lorsque $A_i \in \mathcal{X}$ pour tout i et $\bigsqcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{X}$,

— σ*-additive* si $f(\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty f(A_i)$ lorsque $A_i \in \mathcal{X}$ pour tout i et $\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{X}$.

Exemple 3.7. — Sur l'algèbre $\mathcal{I}$ des réunions finies d'intervalles (disjoints) la fonction f définie par

$$f\Big(\bigsqcup_{1\le i\le N} I_i\Big) := \sum_{i=1}^{N} \ell(I_i),$$

où $\ell(I_i)$ désigne la longueur d l'intervalle I_i, est σ-additive.

— Si $a \in X$ et $\mathcal{X}$ est la tribu discrète, f définie par $f(A) = 1$ si $a \in A$, 0 sinon, est σ-additive.

Définition 3.8 (Mesure, espace mesuré)**.** Une *mesure (positive)* μ sur $(X, \mathcal{T})$ est une application σ-additive $\mu : \mathcal{T} \to [0, \infty]$. Un tel triplet $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est appelé un *espace mesuré.*

Avant de donner une manière de construire des mesures et de les caractériser, commençons par en donner les propriétés fondamentales.

Proposition 3.9. *Soit* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* $\mathcal{T}$*,* $A, B \in \mathcal{T}$

(0) si $A \subseteq B$*,* $\mu(A) \le \mu(B)$ *(monotonie),*

(0') $\mu(\bigcup_n A_n) \le \sum_n \mu(A_n)$*, (*$\sigma$*-sous-additivité),*

(1) *si les* A_n *sont croissants,* $\mu(\bigcup_n^{\uparrow} A_n) = \lim \mu(A_n)$ *(limite monotone croissante),*

(1') *si les* A_n *sont décroissants et* $\mu(A_0) < \infty$*,* $\mu(\bigcap_n^{\downarrow} A_n) = \lim \mu(A_n)$*, (limite monotone décroissante),*

(2) $\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$ *(Fatou ensembliste),*

(2') *si il existe* $B \in \mathcal{T}$ *tel que* $A_n \subseteq B$ *pour tout* n *et* $\mu(B) < \infty$*,* $\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n)$ *(Fatou ensembliste renversé).*

Démonstration. Prouvons (0). Comme $B = A \sqcup B \setminus A$, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Prouvons (0'). On pose $\tilde{A}_0 = A_0$ et $\tilde{A}_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k$ pour tout $n \geq 1$. On a $\bigcup_n A_n = \bigsqcup_n \tilde{A}_n$ et

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigsqcup_n \tilde{A}_n) = \sum_n \mu(\tilde{A}_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Prouvons (1). Avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\bigsqcup_n \tilde{A}_n) &= \sum_n \mu(\tilde{A}_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(\tilde{A}_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(\bigsqcup_{0\leq n\leq N} \tilde{A}_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{0\leq n\leq N} A_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N).
\end{aligned}$$

L'item (1') s'obtient en appliquant (1) à $\tilde{A}_n = A_0 \setminus A_n$ et en utilisant le fait que $\mu(A_0 \setminus A_n) = \mu(A_0) - \mu(A_n)$ et que toutes ces quantités sont finies.

Prouvons (2). Rappelons que $\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_n^{\uparrow} B_n$ où $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$. En utilisant (1) on obtient

$$\mu(\liminf_n A_n) = \mu(\overset{\uparrow}{\bigcup_n} B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \liminf_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n).$$

L'item (2') s'obtient en appliquant (2) à $\tilde{A}_n = B \setminus A_n$ et en utilisant à nouveau le fait que $\mu(B \setminus A_n) = \mu(B) - \mu(A_n)$, toutes ces quantités étant finies. □

Définition 3.10. Une mesure sur X est dite

— *finie* si $\mu(X) < \infty$,

— *σ-finie* si il existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ tels que $\mu(X_n) < \infty$ $(\forall n)$ et $\mu(X \setminus \bigcup_n X_n) = 0$

— *de probabilité* si $\mu(X) = 1$.

Lemme 3.11 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Si* $(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est un espace mesuré et* $(A_n) \in \mathcal{T}$ *est telle que* $\sum \mu(A_n) < \infty$*, alors* $\mu(\limsup A_n) = 0$*.*

Exercice 3.2. Démontrer le lemme de Borel-Cantelli.

Remarque 3.12 (Interprétation probabiliste)*.* Soit μ une mesure de probabilité. Si la somme des probabilités des événéments est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalise simultanément est nulle.

Théorème 3.13 (Loi du $0-1$)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité*[4] *et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. Montrer que l'alternative est alors la suivante :*

(i) $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ *et* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$,

(ii) $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ *et* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

Exercice 3.3. Démontrer la loi du 0-1.

Définition 3.14 (Fonction mesurable)**.** Une fonction f d'un espace mesurable $(X_1, \mathcal{T}_1)$ dans un autre espace mesurable $(X_2, \mathcal{T}_2)$ est dite mesurable lorsque

$$\forall A \in \mathcal{T}_2, \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1.$$

Remarque 3.15*.* Remarquons l'analogie avec une caractérisation des fonctions continues entre deux espaces métriques : l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

Définition 3.16 (Fonction borélienne)**.** Une fonction entre deux espaces métriques est dite borélienne si elle est mesurable par rapport aux tribus boréliennes sur les espaces de départ et d'arrivée.

Théorème 3.17 (Théorème d'Egorov)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $E \subseteq \mathcal{T}$ tel que f_n converge uniformément sur E et $\mu(X \setminus E) \leq \varepsilon$.*

Exercice 3.4 (Preuve du théorème d'Egorov)**.** Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui converge presque partout.

1. Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu(X \setminus C) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit
$$C_N^k = \bigcap_{n\geq N} \left\{ |f_n - f| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$
Montrer que $C = \bigcap_k^{\downarrow} \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k$ et en déduire que pour tout k, $\mu(X \setminus \bigcup_N^{\uparrow} C_N^k) = 0$.
3. On fixe $\varepsilon > 0$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left(X \setminus C_{N_k}^k\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.
4. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $X_\varepsilon \in \mathcal{T}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X_ε et tel que $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$.
5. Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

4. C'est-à-dire un espace mesuré dont la mesure est de probabilité.

3.2 Construction et caractérisation de mesures

Dans cette partie, on donne une manière de *construire* des mesures par prolongement, et une une manière de les caractériser, en commençant par celle-ci.

Définition 3.18 (π-système, λ-système)**.** — On appelle λ-*système* (ou *système de Dynkin*) une collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ stable par réunion dénombrable croissante et différence emboîtée et qui contient X.

— On appelle π-*système* une collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ stable par intersection finie.

On note $\lambda(\mathcal{C})$ le plus petit [5] λ-système contenant la collection $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Théorème 3.19 (Théorème π-λ)**.** *Si $\mathcal{C}$ est un π-système alors $\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$.*

Exercice 3.5 (Preuve du théorème π-λ)**.** Soit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

1. Montrer que si $\mathcal{C}$ est à la fois un π-système et un λ-système, alors c'est une tribu.
2. On suppose dans cette question que $\mathcal{C}$ est un π-système. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on note $\mathcal{C}_A = \{B \in \mathcal{P}(X) : B \cap A \in \lambda(\mathcal{C})\}$.
   - (i) Montrer que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$ alors $\mathcal{C}_A$ est un λ-système et que si $A \in \mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}_A$ contient $\mathcal{C}$.
   - (ii) En déduire que si $A \in \mathcal{C}$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
   - (iii) En déduire que si $A \in \lambda(\mathcal{C})$, alors $\lambda(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}_A$.
3. Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système, alors $\lambda(\mathcal{C})$ est une tribu, et en déduire le théorème π-λ.

Corollaire 3.20. *Si deux mesures finies μ et ν sur $(X, \mathcal{T})$ coïncident sur un π-système $\mathcal{C}$ et que $\mu(X) = \nu(X)$, alors elles coïncident sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Laissée en exercice. On pourra considérer $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \nu(A)\}$ est montrer que c'est un λ-système. □

Passons au théorème de prolongement.

Théorème 3.21 (Théorème de prolongement de Carathéodory)**.** *Toute fonction σ-additive $\tilde{\mu}$ sur une algèbre se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée. De plus, si $\tilde{\mu}$ est σ-finie alors le prolongement μ est unique et μ est σ-finie.*

Remarque 3.22. On admettra ici la preuve, qui utilise la notion de mesure extérieure et d'ensemble mesurable associé. Disons seulement que l'unicité (dans le cas σ-fini) peut se déduire du théorème π-λ, en sachant qu'une algèbre est a fortiori un π-système.

En conséquence de ce théorème, on obtient assez facilement l'existence et l'unicité de la *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$).

---

5. Il est bien défini.

Théorème 3.23 (Mesure de Lebesgue). *Il existe une unique mesure borélienne λ^d sur $\mathbb{R}^d$ telle que pour tout pavé P, c'est-à-dire un produit d'intervalles $P = \prod_{i=1}^d I_k$, $\lambda^d(P)$ soit égal au volume du pavé, soit $\lambda^d(P) = \prod_{i=1}^d \ell(I_k)$.*

Ébauche de preuve. Donnons l'idée dans $\mathbb{R}$.

— On note $\mathcal{S}$ l'ensemblee des intervalles de $\mathbb{R}$.

— L'ensemble $\mathcal{A}$ formée des réunions finies de ces intervalles est une algèbre.

— On définit μ sur $\mathcal{A}$ par $\mu(\bigsqcup_{k=1^n} I_k) = \sum \ell(I_k)$ et on vérifie qu'elle est bien définie et σ-additive.

— Elle est σ-finie.

— On cconclut par le théorème de prolongement de Carathéodory en notant que $\mathcal{A}$ engendre la tribu des boréliens.

$\square$

Enfin, le théorème de Carathéodory permet de faire le produit de plusieurs mesures. Si $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ sont deux espaces mesurables, la tribu produit sur $X_1 \times X_2$ est la tribu engendrée par les cylindres $\{A \times \mathbb{R} : A \in \mathcal{T}_1\} \cup \{\mathbb{R} \times A : A \in \mathcal{T}_2\}$, ou de manière équivalente par les pavés $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$, et on la note $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Théorème 3.24 (Mesure produit). *Si $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1)$ et $(X_1, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ sont deux espaces mesurés, il existe une mesure μ sur $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2)$ telle que $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2)$. Si μ_1 et μ_2 sont σ-finies, elle est unique et on la note $\mu_1 \otimes \mu_2$.*

Démonstration. Laissée en exercice, en application du théorème de prolongement de Carathéodory. $\square$

3.3 Construction de l'intégrale de Lebesgue

Principe Poser $\int \mathbf{1}_A d\mu := \mu(A)$ puis étendre par linéarité et approximations successives.

Dans le reste de cette section, on considère un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Lorsqu'une fonction est à valeurs $X = \mathbb{R}$ ou dans $X = \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on dira qu'elle est mesurable si elle l'est en tant que fonction de $(X, \mathcal{T})$ dans $(X, \mathcal{B}(X))$.

Définition 3.25 (Fonction simple, fonction étagée). Une fonction est dite simple si elle prend un nombre fini de valeurs. Une fonction f d'un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ qui est mesurable et simple est appelée une fonction étagée. Les fonctions étagées sont les fonctions de la forme

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

où $A_i \in \mathcal{T}$ et $\alpha_i \in \bar{\mathbb{R}}$ pour tout i. On peut toujours supposer (et on le fera souvent) que les A_i sont disjoints.

Remarque 3.26. On dira d'une fonction qu'elle est réelle si elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, les valeurs $\pm\infty$ exclues.

La classe des fonctions étagées est intéressante car une fonction positive (mesurable) peut toujours s'approcher de façon montone par des fonctions étagées.

Proposition 3.27. *Si f est une fonction mesurable positive, il existe une suite (f_n) de fonctions étagées positives et réelles qui est croissante au sens où pour tout x, $(f_n(x))_n$ est croissante, et telle que $f(x) = \lim_n f_n(x)$ pour tout x*

Démonstration. Il suffit de poser $f_n(x) = \min\{\lfloor 2^n f(x) \rfloor 2^{-n}, n\}$. □

Remarque 3.28.
— Si f est bornée, la convergence de cette suite est uniforme.
— Si μ est σ-finie ($X = \bigcup_n^{\uparrow} X_n$ où $\mu(X_n) < \infty$), on peut supposer que $\{x : f_n(x) \neq 0\}$ est de mesure finie ; il suffit de considérer la suite $f_n \times \mathbf{1}_{X_n}$.

Définition 3.29 (Intégrale de Lebesgue)**.** On définit successivement :
— l'intégrale d'une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, avec la convention $0 \times \infty = 0$ par
$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sum_{i=1}^N \alpha_i \mu(A_i),$$
— l'intégrale d'une fonction mesurable positive f par
$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \sup \left\{ \int g \,\mathrm{d}\mu : 0 \leq g \leq f,\ g \text{ étagée positive} \right\},$$
— l'intégrale d'une fonction mesurable $f = f_+ - f_-$ où f_+, f_- désignent les parties positives et négatives, par
$$\int f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int f_- \,\mathrm{d}\mu,$$
dès lors que l'une des intégrale $\int f_+ \,\mathrm{d}\mu$ ou $\int f_- \,\mathrm{d}\mu$ est finie : on dit que l'intégrale est définie. Si les deux sont finies, on dit que f est intégrable ou sommable par rapport à μ et on note $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Remarque 3.30. Pour intégrer sur un sous-ensemble mesurable E, c'est très facile :
$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int \mathbf{1}_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Exemple 3.31.
— Lorsque μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, si f est une fonction continue sur un segment, ou plus généralement une fonction réglée, on retrouve l'intégrale de Riemann.
— Sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, si μ est la mesure de comptage (qui à un ensemble associe son nombre d'éléments), et $u : \mathbb{N} \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une suite (u_n) on retrouve la somme d'une série numérique :
$$\int u \,\mathrm{d}\mu = \sum_n u_n,$$
lorsque u est positive ou intégrable (c'est-à-dire sommable !).

L'intégrale de Lebesgue jouit des même propriétés de positivité et linéarité que l'intégrale de Riemann.

Proposition 3.32. — *Si f est mesurable positive alors $\int f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$.*

— *Si f, g sont mesurables positives (resp. intégrables) et $\alpha, \beta \in [0, +\infty]$ (resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) alors*

$$\int (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu + \beta \int g \,\mathrm{d}\mu,$$

— *Si f est d'intégrale définie, $|\int f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.*

Exercice 3.6. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que $\int f \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ implique que $f(x)$ est fini pour μ-presque tout x.

En réalité, pour établir la proposition précédente, on commence par l'établir dans le cas où f est étagée positive, puis on passe au cas général à l'aide de la Proposition 3.27 et du théorème de convergence monotone qui suit.

Théorème 3.33 (Théorème de convergence monotone (Beppo-Levi))**.** *Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant presque partout vers f, alors f est mesurable et*

$$\lim \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Il y a trois théorèmes de convergence à connaître absolument sur l'intégrale de Lebesgue : le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée. Il nous reste à établir les deux derniers.

Lemme 3.34 (Lemme de Fatou)**.** *Si (f_n) est une fonction mesurable positive, alors*

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Rappelons-nous de la définition de la limite inférieure : $\liminf_n f_n = \lim_n^{\uparrow} g_n$ où $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Les g_k sont mesurables positives, et d'après le théorème de convergencce montone on a

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_n g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int g_n d\mathrm{d}\mu = \liminf_n \int g_n \,\mathrm{d}\mu \overset{g_n \leq f_n}{\leq} \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Remarque 3.35 (Fatou renversé). Si il existe g intégrable tel que pour tout n $|f_n| \leq g$ presque partout, alors

$$\int \limsup f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Théorème 3.36 (Théorème de convergence dominée)**.** *Si* (f_n) *est une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers* f *et* g *une fonction intégrable telle que pour tout* n*,* $|f_n| \leq g$ *presque partout, alors*

$$\lim_n \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

et en particulier

$$\int f_n \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On a $|f - f_n| \leq 2g$ et on pose $g_n = 2g - |f - f_n| \geq 0$. D'après le lemme de Fatou, on sait que $\int \liminf g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int g_n \,\mathrm{d}\mu$, c'est-à-dire, en sachant que $\liminf g_n = 2g$,

$$\int 2g \,\mathrm{d}\mu \leq \int 2g \,\mathrm{d}\mu + \liminf \left(- \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \right) = \int 2g \,\mathrm{d}\mu - \limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu.$$

D'où en simplifiant par $\int 2g \,\mathrm{d}\mu$ (qui est fini) : $\limsup_n \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq 0$, d'où le résultat. □

Proposition 3.37 (Continuité d'une intégrale à paramètres)**.** *Soit* $f : X \times \Lambda \to \bar{\mathbb{R}}$ *une fonction dépendant d'un paramètre* $\lambda \in \Lambda$*,* Λ *espace métrique. On suppose que*

(i) pour presque tout x*,* $f(x, \cdot)$ *est continue,*

(ii) pour tout λ*,* $f(\cdot, \lambda)$ *est mesurable,*

(iii) il existe une fonction g *intégrable telle que* $\sup_{\lambda\in\Lambda} |f(x, \lambda)| \leq g(x)$ *pour presque tout* x*.*

Alors $\lambda \mapsto \int_X f(x, \lambda) \,\mathrm{d}\mu(x)$ *est (bien définie et) continue sur* Λ*.*

Proposition 3.38 (Régularité d'une intégrale à paramètres)**.** *Soit* $f : X \times \Lambda \to \bar{\mathbb{R}}$ *une fonction dépendant d'un paramètre* $\lambda \in \Lambda$*,* Λ *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On suppose que*

(i) pour presque tout x*,* $f(x, \cdot)$ *est de classe* $\mathcal{C}^n$*,* $n \geq 1$*,*

(ii) pour tout λ*,* $\partial_\lambda^n(\cdot, \lambda)$ *est mesurable,*

(iii) il existe λ_0 *tel que pour tout* $k < n$*,* $\partial_\lambda^k(\cdot, \lambda_0)$ *est intégrable,*

(iv) il existe une fonction g *intégrable telle que* $\sup_{\lambda\in\Lambda} |\partial_\lambda^n f(x, \lambda)| \leq g(x)$ *pour presque tout* x*.*

Alors $F : \lambda \mapsto \int_X f(x, \lambda) \,\mathrm{d}\mu(x)$ *est (bien définie et) de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* Λ *et pour tout* $k \leq n$

$$F^{(k)}(\lambda) = \int_X \partial_\lambda^k f(x, \lambda) \,\mathrm{d}\mu(x).$$

Étant donnée une mesure μ, on peut définir des mesures à partir d'une densité f.

Exercice 3.7 (Mesures à densité)**.** Étant donnée une fonction mesurable positive f et une mesure μ, montrer que l'application $f\mu$ définie par

$$\forall E \in \mathcal{T}, \quad [f\mu](E) \coloneqq \int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

est une mesure.

La linéarité de l'intégrale est à l'origine de la fameuse inégalité de Jensen.

Proposition 3.39 (Inégalité de Jensen)**.** *Si μ est une mesure de probabilité, f est intégrable et ϕ est une fonction convexe à valeurs réelles, alors*

$$\phi\left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right) \leq \int \phi \circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque 3.40. Remarquons que l'intégrale $\int \phi\circ f\,\mathrm{d}\mu$ est définie car ($f \in L^1(\mu)$ et $f \leq g$) implique que $\int g\,\mathrm{d}\mu$ est bien définie. En effet, on a $f_+ \leq g_+$ et $-g \leq -f$ implique que $g_- \leq f_-$ donc $\int g_- \leq \int f_- < +\infty$.

Démonstration. Soit a une application affine telle que $\alpha \leq \phi$ en tout point. On a alors

$$\alpha\left(\int f\,\mathrm{d}\mu\right) = \int \alpha(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int \phi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ceci est vrai pour toute minorante affine $\alpha \leq \phi$, d'où

$$\sup_{\alpha\leq\phi, \alpha \text{ affine}} \alpha\left(\int f d\mu\right) \leq \int \phi \circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

Or on sait qu'en tout point p, une fonction convexe réelle admet une minorante affine passant par p, de sorte qu'avec $p = \int f d\mu$, il existe $\alpha^\star$ minorante affine telle que $\alpha^\star(p) = \phi(p)$. Il vient

$$\phi\left(\int f d\mu\right) = \alpha^\star\left(\int f d\mu\right) = \sup_{\alpha\leq\phi, \alpha \text{ affine}} \alpha\left(\int f d\mu\right) \leq \int \phi \circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Terminons par les théorèmes de Tonelli et Fubini pour calculer des intégrales multiples.

Théorème 3.41 (Théorème de Tonelli)**.** *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On suppose que f est une fonction positive mesurable pour la tribu $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$. Alors les applications $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$ et $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$ sont respectives $\mathcal{T}_1$- et $\mathcal{T}_2$-mesurables, et*

$$\int_{X_1\times X_2} f\,\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2 = \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2}\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

Théorème 3.42 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $(X_1, \mathcal{T}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{T}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. On suppose que f est une fonction mesurable réelle qui est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable. Alors les applications $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)$ et $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)$ sont respectivement définies μ_1- et μ_2- presque partout, respectivement μ_1- et μ_2-intégrables, et*

$$\int_{X_1\times X_2} f\,\mathrm{d}\mu_1\otimes\mu_2 = \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2}\int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2).$$

3.4 Mesures de Borel et de Radon

Sur un espace métrique (ou topologique), on peut définir des mesures compatibles avec la topologie : les mesures de Borel. Dans de nombreux cas d'espaces métriques, ces mesures seront automatiquement *régulières* de sorte que les espaces de fonctions régulières jouiront de bonnes propriétés de densité dans les espaces de fonctions intégrables.

Dans cette section, X est un espace métrique, dont la collection des ouverts est notée $\mathcal{O}$ et celle des compacts $\mathcal{K}$.

Définition 3.43 (Régularité d'une mesure)**.** Une mesure de Borel μ sur un espace métrique X est dite

— *extérieurement régulière* si

$$\forall B \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subseteq O, O \in \mathcal{O}\},$$

— *intérieurement régulière* si

$$\forall B \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, K \in \mathcal{K}\},$$

— *régulière* si elle est extérieurement et intérieurement régulière.

Définition 3.44 (Espace polonais)**.** Un espace polonais est un espace métrique séparable et complet [6].

Théorème 3.45. *Toute mesure de Borel finie sur un espace polonais est régulière.*

Remarque 3.46. Puisque $\mathbb{R}^d$ est un espace polonais, tout mesure de Borel finie sur $\mathbb{R}^d$ est automatiquement régulière.

Définition 3.47 (Mesure de Radon)**.** Une mesure μ sur X est dite *localement finie* si pour tout $x \in X$, il existe un ouvert O contenant x tel que $\mu(O) < \infty$. Une *mesure de Radon* est une mesure localement finie et régulière.

Remarque 3.48. Dans un espace métrique qui est localement compact, le fait d'être localement fini se reformule en $\mu(K) < \infty$ pour tout compact K.

Voici un autre théorème important de régularité automatique :

Théorème 3.49. *Toute mesure localement finie sur un espace métrique localement compact séparable est régulière : c'est une mesure de Radon.*

Corollaire 3.50. *Puisque la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est localement finie, et que $\mathbb{R}^d$ est localement compact, elle est régulière : c'est une mesure de Radon.*

Ces propriétés de régularités seront utiles notamment pour approcher les ensembles boréliens par des fonctions continues bornées ou continues à support compact et obtenir des résultats de densité das les espace L^p.

Terminons cette section par le Théorème de Lusin, qui dit qu'une fonction borélienne est continue en-dehors d'un morceau de mesure arbitrairement petite.

6. La définition la plus courante est en réalité un peu plus générale.

Théorème 3.51 (Théorème de Lusin (version faible))**.** *Soit $f : X \to Y$ une fonction borélienne entre deux espaces métriques et μ une mesure finie extérieurement régulière sur X. On suppose que Y est séparable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fermé $F \subseteq X$ tel que f est continue sur F et $\mu(X \setminus F) \leq \varepsilon$.*

Exercice 3.8. [Preuve du théorème de Lusin] Soit $f : X \to Y$ une fonction Borélienne entre deux espaces métriques et μ une mesure de Borel finie régulière sur X, avec Y séparable. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe une base dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire une suite $(U_n)_{n\in N}$ d'ouverts de Y tels que tout ouvert O s'écrive comme une réunion des $\{U_n : U_n \subseteq O\}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux ensembles fermés $F_n^1 \subseteq f^{-1}(U_n), F_n^2 \subseteq f^{-1}(U_n^c)$ tels que $\mu(f^{-1}(U_n) \setminus F_n^1) \leq \varepsilon 2^{-n}$ et $\mu(f^{-1}(U_n^c) \setminus F_n^2) \leq \varepsilon 2^{-n}$.
3. On pose $F = \bigcap_n (F_n^1 \cup F_n^2)$. Montrer que $\mu(X \setminus (F_n^1 \cup F_n^2)) \leq \varepsilon 2^{-n}$ et que $\mu(X \setminus F) \leq 2\varepsilon$.
4. Montrer que f est continue sur E. (On pourra regarder l'image réciproque de $f_{|F}^{-1}(U_n^c)$.)

Remarque 3.52. Remarquons que si μ est intérieurement régulière à la place de l'être extérieurement, on peut de plus avoir F compact.

3.5 Exercices

Exercice 3.9. Donner des conditions sur un ensemble E pour que les classes suivantes soient des tribus :

1. $\{\varnothing, \{x\}, E\}$ où $x \in E$ est donné.
2. $\{\varnothing, \{x\}, \{x\}^c, E\}$ où $x \in E$ est donné.
3. La classe des singletons de E.
4. La classe des parties finies de E.
5. La classe des parties dénombrables de E.
6. La classe des parties finies ou cofinies de E. On dit qu'une partie A de E est cofinie si $E \setminus A$ est finie.
7. La classe des parties dénombrables ou codénombrables de E. On dit qu'une partie A de E est codénombrable si $E \setminus A$ est dénombrable.

Comparer les tribus engendrées par les différentes classes de parties décrites ci-dessus.

Exercice 3.10. 1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une semi-algèbre sur X, l'algèbre engendrée $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{F})$ est formée des réunions finies d'éléments de $\mathcal{F}$.

2. Montrer que la tribu engendrée par une semi-algèbre est celle engendrée par l'algèbre engendrée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est intervalles de $\mathbb{R}$ est une semi-algèbre, de même que les intervalles semi-ouverts à droite.

Exercice 3.11. Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurés, $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(F)$ tels que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ et $E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F}$. On définit

$$\mathcal{C} := \{A \times B,\ A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{G} := \{A \times F,\ A \in \mathcal{E}\} \cup \{E \times B,\ B \in \mathcal{F}\}.$$

1. Montrer que si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des semi-algèbres alors $\mathcal{C}$ est une semi-algèbre.
2. Montrer que $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Exercice 3.12. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que λ est σ-finie.
2. Montrer que $\lambda(K) < +\infty$ pour tout ensemble compact (fermé borné) de $\mathbb{R}$.
3. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ? Même question pour un fermé ?
4. Construire un ensemble dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebegue nulle.
5. Construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebegue égale à 3.

Exercice 3.13. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et soient μ, ν deux mesures finies sur $(E, \mathcal{A})$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon$. (Ind. On pensera à utiliser le Lemme de Fatou et le Lemme de Borel-Cantelli).

Exercice 3.14. Dans les cas suivants (où $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$) montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
2. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}$,
3. $f_n(x) = \sin(nx)\mathbf{1}_{[0,n]}(x)$,
4. $f_n(x) = |\cos(x)|^{1/n}e^{-x}$,
5. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{nx+1}\mathbf{1}_{[0,1]}$,
6. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^n)}{nx^{n+\frac{1}{2}}}$.

Exercice 3.15. Calculer la limite des suites suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|/n}dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{2\cos(\frac{x}{n})-1}\ \mathbf{1}_{\{3|\cos(\frac{x}{n})|\geq 2\}}\ dx, \qquad \sum_{m\geq 1} \frac{n}{m}\sin(\frac{1}{nm}).$$

Exercice 3.16.
1. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u,v) = (u^2 + v^2, 2uv)$ est un C^1-difféomorphisme de $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; u > v > 0\}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y > 0\}$.
2. En déduire la valeur de $\int_{(\mathbb{R}_+)^2} |u^4 - v^4|e^{-(u+v)^2}dudv$.

Exercice 3.17. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini.

1. Soit $u : X \to [0, +\infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que

$$\int_X u\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\})dt.$$

2. Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $u : X \to [0, +\infty]$ une fonction positive mesurable. Montrer que
$$\int_X u^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\}) dt.$$

Exercice 3.18. Calculer l'intégrale
$$I = \int_{y>x>0} e^{-y+x} \frac{\sqrt{y-x}}{y^2} d\lambda_2(x, y).$$
[Indication : on pourra considérer le changement de variable $u = y - x, v = y/x$.]

Exercice 3.19. Calculer le volume de la boule euclidienne de rayon r de $\mathbb{R}^n$.

4 Espaces L^p

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si f est une fonction mesurable réelle, pour tout $p \in [1, +\infty[$, on définit
$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$
et pour $p = +\infty$, on définit
$$\|f\|_\infty := \mu - \operatorname{ess\,sup} |f| := \inf\{M : |f| \leq M \text{ p.p.}\}$$

4.1 Inégalités de Hölder et de Minkowski

Proposition 4.1 (Inégalité de Hölder)**.** *Si f, g sont mesurables et $p, q \in [1, +\infty]$ sont deux exposants conjugués, au sens où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 4.2. L'exposant conjugué de 1 est $+\infty$ et réciproquement.

Démonstration. Commençons par le cas $p, q \in]1, +\infty[$, et supposons sans perte de généralité que $f, g \geq 0$. Si $\|f\|_p = 0$, f est nulle presque partout et fg aussi donc l'inégalité est évidente. Il en est de même pour g donc on peut supposer que $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. Quitte à diviser f par $\|f\|_p$ et g par $\|g\|_q$, on peut supposer que $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Il s'agit alors de montrer que $\int fg \, \mathrm{d}\mu \leq 1$. On utilise alors l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour tout $a, b > 0$. Pour la démontrer il suffit de fixer par exemple a et de montrer par une étude des variations de $u : x \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{x^q}{q} - ax$ que $u \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Il vient pour tout x, $f(x)g(x) \leq \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}$, et en intégrant :
$$\int fg \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} \int f^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int g^q \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$
Le cas $p = 1, q = +\infty$ (ou l'inverse) est en réalité plus simple, puisque $|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty$ pour presque tout x, de sorte qu'en intégrant on obtienne
$$\int |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$
□

Exercice 4.1. Démontrer l'inégalité de Hölder pour $p, q \in]1, +\infty[$ en utilisant l'inégalité de Jensen. Étant données deux fonctions mesurables positive f, g, on pourra, lorsque c'est possible, considérer la mesure $\nu = \dfrac{g^q \mu}{[g^q \mu](X)}$.

Proposition 4.3 (Inégalité de Minkowski)**.** *Pour toutes fonctions réelles mesurables f, g, on a*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut considérer $f, g \geq 0$, f et g non-(nulles presque partout). Commençons par remarquer que le cas $p = 1$ est clair d'après l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$: $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ pour tout x. Le cas $p = +\infty$ est aussi facile, puisque $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour presque tout x, de sorte que par définition, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Passons au cas intéressant $p \in]1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu &= \int (f+g)^{p-1}(f+g)\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int f(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu + \int g(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

puis en utilisant l'inégalité de Hölder avec (p, q) tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\leq \left(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

or puisque $pq = p + q$, $(p-1)q = p$, ceci donne

$$= \left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

En divisant par $(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$ et en sachant que $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ on trouve :

$$\left(\int (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \square$$

Exercice 4.2. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables et $p \in [1, +\infty]$, alors

$$\left\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

4.2 Généralités

On définit pour tout $p \in [1, +\infty]$,

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f \text{ mesurable } : \|f\|_p < +\infty\}.$$

D'après l'inégalité de Minkowski $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire, donc $\mathcal{L}^p(\mu)$ est une semi-norme, mais attention ce n'est pas une norme : $\|f\|_p = 0$ implique que f est nulle μ-presque partout, mais pas partout !

Exercice 4.3. Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que f est nulle μ-presque partout si et seulement si $\int f \, d\mu = 0$.

Afin d'obtenir un espace normé, on *choisit* de considérer que deux fonctions égales presque partout sont identiques. Rigoureusement, on quotiente l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions mesurables par la relation d'équivalence

$$f \mathcal{R}_\mu g \iff f = g \ \mu\text{-presque partout.}$$

On note $\mathcal{F}/\mathcal{R}_\mu$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation. On vérifie que la somme, le produit et le produit par un scalaire « passent au quotient » [7]. De plus, on vérifie que $\|\cdot\|_p$ est indépendante du représentant choisi dans une classe d'équivalence et peut donc être définie sur le quotient. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{R}_\mu$ muni des opérations $+$ et $.$ est un espace vectoriel, et par définition $\|\cdot\|_p$ est une norme sur cet espace. On définit ainsi l'espace vectoriel normé $L^p(\mu)$:

$$L^p(\mu) = (\mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{R}_\mu, \|\cdot\|_p).$$

Remarque 4.4. Même si théoriquement, il est satisfaisant d'avoir construit un espace vectoriel normé bien classique, il faudra faire attention à ce qu'on ne manipule plus vraiment des fonctions mais des classes d'équivalence, bien que l'on note toujours f une telle classe d'équivalence. En particulier, les valeurs ponctuelles $f(x)$ pour x fixé n'ont plus nécessairement de sens : par exemple pour la mesure de Lebesgue, un singleton est de mesure nulle. Ce pourquoi il sera parfois plus commode de recourir à nouveau aux « vrais » fonctions $f \in \mathcal{L}^p$.

Complétude

Théorème 4.5. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Commençons par le cas $p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. On construit une sous-suite $g_k = f_{n_k}$ par récurrence de sorte que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Ainsi $\sum_k \|g_{k+1} - g_k\|_p < +\infty$, et donc

$$\left\| \sum_k |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \leq \sum_k \| |g_{k+1} - g_k| \|_p < +\infty.$$

Par conséquent la puissance p-ième de $\sum_k |g_{k+1} - g_k|$ est d'intégrale finie, donc cette fonction est finie presque partout. Ainsi, la série $\sum_k (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ est absolument convergente donc convergente pour presque tout x. On peut alors poser

$$h := \sum_k |g_{k+1} - g_k|,$$

7. Par exemple si $f_1 \mathcal{R}_\mu f_2$ et $g_1 \mathcal{R}_\mu g_2$, alors $f_1 + g_1 \mathcal{R}_\mu f_2 + g_2$.

et

$$g := \sum_k (g_{k+1} - g_k) + g_0 = \lim_n g_n,$$

qui sont définies presque partout. Puisque h et g_0 sont dans $L^p(\mu)$, g l'est aussi. Montrons enfin que $g_k \to g$ dans $L^p(\mu)$. On a

$$|g - g_k| = \left|\sum_{l>k} g_{l+1} - g_l\right| \leq \sum_{l>k} |g_{l+1} - g_l| \leq h \in L^p,$$

donc $|g - g_k|^p \to 0$ presque partout et $|g - g_k|^p \leq h^p \in L^1$, d'où l'on conclut par le théorème de convergence dominée que $\int |g - g_k|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$, soit $\|g - g_k\|_p \to 0$. On a donc montré que (f_n) est une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente : elle est donc convergente.

Passons au cas $p = +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Prenons des représentants dans $\mathcal{L}^\infty$, notés de la manière par abus. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \exists N_k, \forall p, q \geq N_k, \|f_p - f_q\|_\infty \leq \frac{1}{k},$$

donc pour tous $p, q \geq N_k$, il existe $S_{p,q}$ de mesure nulle tel que $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}$ pour tout $x \in X \setminus S_{p,q}$. On pose

$$S = \bigcup_{k>0} \bigcup_{p,q \geq N_k} S_{p,q},$$

qui est de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. On a

$$\forall k > 0, \forall p, q \geq N_k, \forall x \in X \setminus S, \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k},$$

donc pour tout $x \in X \setminus S$, $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle est convergente vers un certain $f(x) \in \mathbb{R}$ et f est mesurable. En faisant tendre $p \to \infty$ dans la précédente inégalité on obtient $\forall x \in X \setminus S$, $|f(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k}$, et donc puisque S est de mesure nulle,

$$\forall k > 0, \forall q \geq N_k, \|f - f_q\|_\infty \leq \frac{1}{k},$$

ce qui veut dire que $f_n \to f$ dans $L^\infty(\mu)$. □

Densité et séparabilité

On suppose dans cette section que X est un espace métrique localement compact et séparable, par exemple $\mathbb{R}^d$, et que μ est une mesure localement finie (c'est-à-dire ici, finie sur les compacts), par exemple la mesure de Lebesgue. Remarquons que sous ces hypothèses, μ est σ-finie.

Commençons par un premier résultat de densité de fonctions étagées concentrées sur un ensemble de mesure finie.

Proposition 4.6. *Si $f \in L^p(\mu)$ il existe une suite (f_n) de fonctions étagées telles que $\mu(\{f_n \neq 0\}) < \infty$ et $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$.*

Démonstration. Voir l'exercice 4.4. □

Exercice 4.4. On décompose f en $f = f_+ - f_-$.

(i) Justifier l'existence de deux suites croissantes $(a_n), (b_n)$ de fonctions étagées telles que $\mu(\{a_n \neq 0\}), \mu(\{b_n \neq 0\}) < \infty$ et $a_n \uparrow f_+, b_n \uparrow f_-$.

(ii) Montrer que $a_n \to f_+$ et $b_n \to f_-$ dans $L^p(\mu)$ et conclure.

Lemme 4.7. *Si K est un compact inclus dans un ouvert U, il existe une fonction ϕ continue à support compact telle que*

$$\mathbf{1}_K \leq \phi \leq \mathbf{1}_U.$$

Démonstration. Voir l'exercice 4.5 □

Exercice 4.5. Soit X un espace métrique localement compact, une partie compacte K et un ouvert U tels que $K \subseteq U$.

(i) Montrer qu'il existe un compact K' et un ouvert U' tels que $K \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{K} \subseteq U$.

(ii) À l'aide de la question précédente, construire une fonction ϕ continue qui vaut 1 sur K et 0 sur $\tilde{U}^c$. On pourra utiliser les fonctions distance à un ensemble.

(iii) Conclure.

Théorème 4.8. *L'espace $\mathcal{C}_c(X)$ des fonctions continues à support compact*[8] *est dense dans $L^p(\mu)$ pour $p \in]1, +\infty[$.*

Démonstration. Commençons par approcher les Boréliens de mesure finie par des fonctions continues à support compact. Soit B un borélien de mesure finie et $\varepsilon > 0$. Puisque μ est une mesure de Radon, il existe un compact K et un ouvert U tels que $K \subseteq B \subseteq U$ et $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$. D'après le Lemme 4.7, il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\mathbf{1}K \leq \phi \leq \mathbf{1}_U$, de sorte que ϕ et $\mathbf{1}_B$ sont tous deux compris entre $\mathbf{1}_K$ et $\mathbf{1}_U$. Par conséquent

$$\int |f - \mathbf{1}_B|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int |\mathbf{1}_U - \mathbf{1}_K|^p \, \mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{U \setminus K} \, \mathrm{d}\mu = \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $f \in L^p(\mu)$. On sait d'après la Proposition 4.6 qu'il existe une fonction $\tilde{f}$ étagée telle que $\mu(\{\tilde{f} \neq 0\}) < \infty$ et $\|\tilde{f} - f\|_p \leq \varepsilon$. La fonction $\tilde{f}$ s'écrit

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{1}_{B_i}, \quad \alpha_i \neq 0.$$

8. C'est-à-dire nulle en-dehors d'une partie compact.

D'après ce qu'on vient de voir, pour tout i, il existe $g_i \in \mathcal{C}_c(X)$ telle que $\|\mathbf{1}_{B_i} - g_i\|_p \leq \varepsilon/(N|\alpha_i|)$. On pose alors
$$g = \sum_i g_i,$$
et on vérifie
$$\|\tilde{f} - g\|_p \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \|\mathbf{1}_{B_i} - g_i\|_p \leq \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \frac{\varepsilon}{N|\alpha_i|} \leq \varepsilon,$$
pour obtenir enfin $\|f - g\|_p \leq 2\varepsilon$. □

Remarque 4.9. — La densité des fonctions étagées dans L^p est vraie sans hypothèse sur X.

— La densité des fonctions étagées de concentration μ-finie est vrai dès lors que μ est σ-finie.

— Lorsque X est un espace polonais et μ est finie, on peut démontrer qu'on a densité des fonctions continues bornées $\mathcal{C}_b(X)$ au lieu de $\mathcal{C}_c(X)$.

Théorème 4.10 (Séparabilité des L^p)**.** *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $L^p(\mu)$ est séparable.*

Démonstration. On sait que tout borélien de mesure de finie peut s'approcher par un ouvert pris dans une base dénombrable $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La collection
$$\mathcal{F} = \left\{ \sum_{\text{finie}} \alpha_n \mathbf{1}_{O_n} : \alpha_n \in \mathbb{Q} \right\}$$
est dénombrable et dense, d'où la séparabilité. □

4.3 Convolution

Intérêt Régularisation de fonctions, bon comportement avec la transformée de Fourier. On se place à présent dans $\mathbb{R}^d$. Si f et g sont dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, on peut définir
$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y \quad (= g \star f(x)),$$
il s'agit en en quelque sorte d'une « moyenne » de f autour de x, pondérée par g. On l'appelle la *convolée de f et g*. On veut maintenant définir la convolée de deux fonctions qui ne sont pas nécessairement continues à support compact mais dans des espaces $L^p(\mu)$.

Théorème 4.11. *Supposons que $p, q, r \in [1, +\infty]$ sont trois exposants tels que*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$
et $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$. Alors pour presque tout x, $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est dans $L^1(\mu)$ donc $f \star g$ est bien définie presque partout, et $f \star g \in L^r(\mu)$. Plus précisément :
$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Remarque 4.12. Ainsi, la convolée de deux fonctions L^1 est une fonction L^1, ce qui fait de L^1 une algèbre. Elle n'est pas unitaire : définie dans un cadre plus général, l'élément neutre pour la convolution est la mesure de Dirac δ_0, or ce n'est une fonction.

Preuve du cas $q = 1$. Dans ce cas, $r = p$. Commençons déjà par le cas $p = 1$. D'après le théorème de Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}(\lambda^d \otimes \lambda^d)(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)| \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &\overset{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)| \,\mathrm{d}z \qquad < +\infty.\end{aligned}$$

Or cette même intégrale est aussi égale par Tonelli à $\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$, donc $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}y$ est finie pour presque tout x, i.e. $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est dans $L^1(\mu)$ et $f \star g$ est bien définie. Enfin

$$\begin{aligned}\|f \star g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

donc $f \star g \in L^1(\mu)$.

Passons au cas p quelconque. Pour cela, montrons que $\int \left(\int |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x < +\infty$. On va appliquer l'inégalité de Hölder en réécrivant le produit comme suit :

$$|f(x-y)g(y)| = \left(|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}\right)\left(|g(y)|^{\frac{1}{p'}}\right)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a

$$\begin{aligned}\left(\int |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^p &= \left(\int \left(|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}} \,\mathrm{d}y\right)\left(\int |g(y)|^{\frac{1}{p'}}\right) \mathrm{d}y\right)^p \\ &\leq \int |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y \left(\int |g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}},\end{aligned}$$

et en intégrant en x et appliquant le théorème de Tonelli à la première intégrale :

$$\begin{aligned}\int \left(\int |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^p \mathrm{d}x &\leq \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \left(\int |g(y)| \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{p'}} \\ &= \|f\|_p^p \|g\|_1 \|g\|_1^{\frac{p}{p'}} \\ &\overset{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1}{=} \|f\|_p^p \|g\|_1^p \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

En conséquence, $f \star g$ est bien défini, et de plus en prenant la puissance $1/p$-ième, ceci montre que $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_1$. $\square$

Convolution et probabilités

Proposition 4.13. *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes sur un espace de probabilité $(X, \Omega, \mathbb{P})$, de lois à densité $f_1, f_2 L^1(\mathbb{R})$ respectivement, alors la loi de $Z = X + Y$ a pour densité $f_1 \star f_2$.*

Exercice 4.6. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes réelles. Calculer la loi de $X + Y$ dans les cas suivants :

(i) X et Y ont loi uniforme sur $[-1, 1]$.

(ii) X et Y ont respectivement une loi de densité $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ où

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} \, dx.$$

On pourra vérifier et utiliser le fait que $\int_{\mathbb{R}_+} \gamma_{a,\lambda} = 1$.

On peut définir de manière générale la convolée de mesures finies (donc de lois de variables aléatoires réelles quelconques), comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 4.7. Soient μ et ν sont deux mesures de Borel finies sur $\mathbb{R}^d$. On pose

$$\sigma(A) := \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} one_{x+y \in A} d(\mu \otimes \nu)(x, y), \quad \text{pour tout borélien } A \subseteq \mathbb{R}^d.$$

(i) Montrer que σ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, on note $\mu * \nu$.

(ii) Remarquer que $\mu * \nu$ est une mesure finie et que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

(iii) Montrer que si $\mu = f\lambda^d, \nu = g\lambda^d$, où $f, g \geq$ sont intégrables, $\mu \star \nu = (f \star g)\lambda^d$.

Retour à la convolution dans L^p

Exercice 4.8 (Convolution dans L^p, cas général)**.** Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

1. On pose p', q' tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$. Vérifier que
$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1.$$
2. Démontrer l'inégalité de Hölder pour 3 fonctions f_1, f_2, f_3 :
$$\|f_1 f_2 f_3\|_1 \leq \|f_1\|_{p'} \|f_2\|_{q'} \|f_3\|_r.$$
3. Pour $r < +\infty$, démontrer que $\int \left(\int |f(x-y)g(y)| \, \mathrm{d}y\right)^r \mathrm{d}x \leq (\|f\|_p \|g\|_q)^r$. On pourra appliquer l'inégalité de Hölder en décomposant $f(x - \cdot)g(\cdot) = f_1 f_2 f_3$ pour 3 fonctions bien choisies.
4. Cas $r = +\infty$: démontrer que $f \star g(x)$ est bien défini pour *tout* x, et que $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Remarque 4.14. Remarquons que dans le cas où les exposants p, q sont conjugués, $r = +\infty$ et la convolée a un sens *ponctuel*.

Si f est une fonction sur $\mathbb{R}^d$ et $h \in \mathbb{R}^d$, on définit l'opérateur de translation $\tau_h f = x \mapsto (x - h)$. Remarquons que $\|\tau_h f\| = \|f\|$ pour tous f, h. Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on note $\|f\|_{p,A}$ ou $\|f\|_{L^p(A)}$ la quantité $\|f\mathbf{1}_A\|_p$.

Proposition 4.15 (Continuité de l'opérateur de translation)**.**

— *Version globale : si $f \in L^p(\mathbb{R}^d), p < +\infty$, alors $\|f - \tau_h f\|_p \xrightarrow{h \to 0} 0$.*

— *Version locale : si $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$, $\|f - \tau_h f\|_{p,K} \xrightarrow{h \to 0} 0$.*

Preuve du cas global. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. On sait par densité des fonctions continues à support compact qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Par conséquent $\|\tau_h f - \tau_h g\|_p \leq \varepsilon$ et

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p + \|\tau_h g - g\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

Or on sait que g est continue à support compact K donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Notons $\omega_g(\delta) := \sup_{x,y : \|x-y\| \leq \delta} |g(y) - g(x)|$ le module de continuité de g. On a

$$\begin{aligned}
\|\tau_h g - g\|_p &= \int_{\tilde{K}} |g(x+h) - g(x)|^p \,\mathrm{d}x \quad \text{où } \tilde{K} = K + B_f(0,1) \\
&\leq \lambda^d(\tilde{K}) \omega_g(\|h\|) \\
&\xrightarrow{h \to 0} 0,
\end{aligned}$$

car g est uniformément continue. Ainsi $\|\tau_h g - g\|_p \leq \varepsilon$ lorsque h est assez petit et donc $\|\tau_h f - f\|_p \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut. ☐

Exercice 4.9. Démontrer la version locale de la continuité de l'opérateur de translation.

Commençons par un exercice simple de régularité d'une convolée par une fonction continue.

Exercice 4.10 (Convolée par une fonction continue)**.**

1. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue, alors $f \circ g$ est uniformément continue.
2. Montrer qu si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \circ g$ est continue.

En réalité, l'opération de convolution elle-même a un effet régularisant, même si les fonctions ne sont pas régulières, comme le montre le résultat suivant.

Proposition 4.16 (Convolée pour des exposants conjugués)**.**

— *Version globale : Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^{p'}(\mu)$ alors $f \star g$ est définie en tout point, $f \star g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ et est uniformément continue, et $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.*

— *Version locale : Si $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}_c(\mathbb{R}^d)$ alors $f \star g$ est définie en tout point et $f \star g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque 4.17. En pariculier la convolée d'une fonction $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est continue.

Preuve dans le cas global. L'un des exposants p ou p' est fini, par exemple p. On a déjà vu par l'inégalité de Hölder que $\int |f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}y \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$ de sorte que $f \star g$ est bien définie et pour tout x, $|f \star g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Prenons maintenant deux points u et v :

$$\begin{aligned} |f \star g(u) - f \star g(v)| &\leq \left| \int (f(u-y) - f(v-y)) g(y) \,\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \|g\|_{p'} \|f(u-\cdot) - f(v-\cdot)\|_p \\ &= \|g\|_{p'} \|f - \tau_{u-v} f\|_p \\ &\xrightarrow{u-v\to 0} 0, \end{aligned}$$

par continuité de l'opérateur de translation. □

Exercice 4.11. Démontrer la version locale de la continuité de la convolée dans le cas de deux exposants conjugués.

Lorsque f est continue, le support de f est définie comme $\operatorname{spt} f = \overline{\{f \neq 0\}}$: il s'agit du plus petit fermé en-dehors duquel la fonction est nulle.

Exercice 4.12 (Support d'une fonction)**.** Si f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$, montrer qu'il existe un plus petit ensemble fermé en-dehors duquel f s'annule Lebesgue-presque partout.

Ainsi, si f est seulement borélienne, on définit le support de f, noté $\operatorname{spt} f$, comme le plus petit ensemble fermé en-dehors duquel f s'annule Lebesgue-presque partout.

Proposition 4.18. *Si f, g sont deux fonctions mesurables,* $\operatorname{spt} f \star g \subseteq \overline{\operatorname{spt} f \cup \operatorname{spt} g}$.

Exercice 4.13 (Support d'une convolée)**.** Montrer que le support de la convolée de deux fonctions boréliennes f, g est inclus dans $\overline{\operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g}$, et que l'inclusion peut être stricte.

Définition 4.19 (Approximation de l'unité)**.** Une suite $(\rho_n) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si

— $\rho_n \geq 0$,
— $\int \rho_n \to 1$,
— $\forall \varepsilon > 0, \quad \int_{B(0,\varepsilon)^c} \rho_n \to 0$.

Exercice 4.14. Soit ρ une fonction positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\int \rho = 1$. Soit (δ_n) une suite de réels strictement positive tendant vers 0 et posons pour tout n, $\rho_n(x) = \delta_n^{-d} \rho(x/\delta)$. Montrer que (ρ_n) est une approximation de l'unité.

Proposition 4.20 (Approximation de l'unité)**.** *Soit (ρ_n) une approximation de l'unité.*

— *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d), p \in [1, \infty[$, *alors* $f \star \rho_n \xrightarrow{L^p} f$.
— *Si* $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ *alors* $f \star \rho_n$ *converge uniformément sur tout compact vers* f.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $\int \rho_n = 1$ pour tout n. On a

$$f(x) - (f \star \rho_n)(x) = \int (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y,$$

et donc

$$\begin{aligned}\int |f - f \star \rho_n|^p &= \int \left| \int (f(x) f(x-y))\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \right|^p \mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Jensen}}{\leq} \int \int |f(x) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} \int \|\tau_y f - f\|_p^p \rho_n(y)\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

et pour $\delta > 0$ fixé

$$= \int_{B(0,\delta)} \underbrace{\|\tau_y f - f\|_p^p}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y + 2^{p-1}\|f\|_p^p \underbrace{\int_{B(0,\delta)^c} \rho_n(y)\,\mathrm{d}y}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0},$$

ce qui permet de conclure : prendre d'abord δ petit pour que la première intégrale soit plus petite que $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, puis faire tendre $n \to \infty$.

Si maintenant $m_n := \int \rho_n$ n'est pas identiquement égal à 1, on applique le résultat précédent à ρ_n/m_n, qui est d'intégrale 1, et on remarque que

$$\|f \star \rho_n - f \star \rho_n/m_n\|_p \leq \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \|f \star \rho_n\|_p \leq \left(1 - \frac{1}{m_n}\right) \|f\|_p \|\rho_n\|_1 \to 0,$$

ce qui conclut.

Passons au second point, en supposant à nouveau que $\int \rho_n = 1$. Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. Pour $0 < \delta \leq 1$, on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f \star \rho_n(x)| \leq& \int_{B_f(0,\delta)} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_f(0,\delta)} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\,\mathrm{d}y \\ \leq& \sup_{\substack{x,y \in K + B_f(0,1) \\ \|x-y\| \leq \delta}} |f(x) - f(y)| + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_f(0,\delta)} \rho_n,\end{aligned}$$

le premier terme étant plus petit que ε lorsque δ est assez petit, puisque f est uniformément sur le compact $K + B_f(0,1)$. Ensuite, le second terme est plus petit que ε lorsque n est assez grand. On obtient donc

$$\sup_{x \in K} |f(x) - f \star \rho_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Comme pour le premier point, le cas $\int \rho_n \neq 1$ se déduit aisément. $\square$

Exercice 4.15. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ est (ρ_n) une approximation de l'unité.

1. Montrer que si f est bornée et uniformément continue, alors $f \star \rho_n \to \rho$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que si $(\operatorname{diam} \operatorname{spt} \rho_n)$ est borné alors $f \star \rho_n \to f$ uniformément sur tout compact.
3. Montrer que si $\operatorname{diam} \operatorname{spt} \rho_n \to 0$ et f est uniformément continue, alors $f \star \rho_n \to f$ uniformément sur tout compact.

Définition 4.21 (Famille/Suite régularisante)**.** Une famille $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une suite régularisante lorsque $\varepsilon \to 0$ si

— $\rho_\varepsilon \geq 0$,
— $\int \rho_\varepsilon = 1$,
— $\operatorname{diam}(\operatorname{spt} \rho_\varepsilon) \leq \varepsilon$,
— $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On dit qu'elle est radiale si $\rho_\varepsilon(x) = \bar{\rho}_\varepsilon(\|x\|)$ pour une certaine fonction $\bar{\rho}_\varepsilon$.

Exemple 4.22 (Une suite régularisante standard)*.* On pose $\rho(x) = e^{\frac{1}{\|x\|^2}-1}$ si $\|x\| < 1$ et $\rho(x) = 0$ si $\|x\| \geq 1$, puis $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(x/\varepsilon)$. C'est une suite régularisante radiale.

Remarque 4.23*.* Une suite régularisante est en particulier une approximation de l'unité, mais elle jouit de meilleures propriétés encore.

Proposition 4.24 (Dérivation d'une convolée)**.** — *Version globale : si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{C}_b^1$, c'est-à-dire bornée de dérivée bornée, alors $f \star \rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_{x_k}(f \star \rho) = f \star \partial_{x_k}\rho$.*

— *Version locale : si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star \rho \in \mathcal{C}^(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_{x_k}(f \star \rho) = f \star \partial_{x_k}\rho$.*

Preuve dans le cas $d = 1$. On sait déjà d'après Proposition 4.16 que $f \star \rho$ et $f \star \rho'$ sont continues, mais on va l'obtenir ici par le théorème de dérivation sous l'intégrale.

Traitons la version globale. On a

$$f \star \rho(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y)\, \mathrm{d}y \quad \text{où} h(x, y) = f(y)\rho(x - y).$$

La fonction $h(x, \cdot)$ est intégrable puisque f est borné est ρ est intégrable. De plus, elle est $\mathcal{C}^1$ en la première variable et $\partial_x h(x, y) = f(y)\rho'(x - y)$, de sorte que

$$|\partial_x h(x, y)| \leq |f(y)| \|\rho'\|_\infty.$$

On a donc un chapeau intégrable pour la dérivée, qui est indépendante du paramètre x. Aisi, par le théorème de dérivation sous l'intégrale, $f \star \rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$(f \star \rho)'(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho'(x - y)\, \mathrm{d}y = (f \star \rho')(x).$$

□

Exercice 4.16. Montrer que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ et $\rho \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star \rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_{x_k}(f \star \rho) = f \star \partial_{x_k}\rho$ pour tout $k = 1, \ldots, d$.

Corollaire 4.25. *L'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, il suffit de considérer une fonction f continue à support compact et montrer qu'on peut l'approcher en norme L^p par une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Prenons une suite régularisante (ρ_ε) et considérons $f \star \rho_\varepsilon$. En itérant Proposition 4.24, on obtient que $f \star \rho_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\operatorname{spt} f \star \rho_\varepsilon \subseteq \overline{\operatorname{spt} f + B_f(0, \varepsilon)}$, donc f est à support compact. Par Proposition 4.20, on obtient que $f \star \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} f$. □

Jusqu'à présent, dans cette section nous nous sommes concentrés sur $\mathbb{R}^d$ tout entier [9]. On peut néanmoins se servir des convolutions pour régulariser des fonctions sur un ouvert Ω en faisant au préalable une découpe lisse de notre fonction (« cut-off » en anglais).

Lemme 4.26 (Existence d'une découpe lisse)**.** *Soit K un compact et U un ouvert tels que $K \subseteq U$. Il existe $\phi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ telle que $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{spt} \phi \subseteq U$ et $\phi(x) = 1$ pour tout $x \in K$.*

Démonstration. On pose $\varepsilon = d(K, U^c)$. On définit $K_\varepsilon = \{x : d(x, K) \leq \varepsilon/4\}$ et $U_\varepsilon = \{x : d(x, K) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. D'après Lemme 4.7, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathbf{1}_{K_\varepsilon} \leq \psi \leq \mathbf{1}_{U_\varepsilon}$. On pose alors $\phi = \psi \star \rho_{\varepsilon/4}$. On sait que

$$\operatorname{spt} \phi \subseteq \overline{\operatorname{spt} \psi + B_f(\varepsilon/4)} \subseteq \overline{U_\varepsilon + B_f(\varepsilon/4)} \subseteq \overline{\{x : d(x, K) < 3\varepsilon/4\}} \subseteq U.$$

Si $x \in K$, on a par ailleurs

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_{y \in x + B_f(\varepsilon/4)} \psi(y) \rho_{\varepsilon/4}(x - y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int \rho_{\varepsilon/4}(x - y) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

car $x + B_f(\varepsilon/4) \subseteq K + B_f(\varepsilon/4) \subseteq K_\varepsilon$ et $\psi = 1$ sur K_ε,

$$= 1.$$

□

Théorème 4.27. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$. On étend f à tout $\mathbb{R}^d$ en posant $\bar{f}(x) = f(x)$ sur Ω et $\bar{f}(x) = 0$ si $x \notin \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un compact $K_n \subseteq \Omega$ tel que $\lambda^d(\Omega \setminus K_n) \leq \frac{1}{n}$ par régularité intérieure. D'après le lemme précédent, il existe $\chi_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ tel que $\chi_n = 1$ sur K_n. On pose alors

$$f_n(x) = (\bar{f} \star \rho_n)\chi_n.$$

9. Il nous faut un groupe pour la convolution

On a

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_{p,\Omega} &\leq \|f-f\chi_n\|_{p,\Omega} + \|f\chi_n - \bar{f}\star\rho_n\chi_n\|_{p,\Omega} \\ &\leq \|f-f\mathbf{1}_{K_n}\|_{p,\Omega} + \|\bar{f}-\bar{f}\star\rho_n\|_{p,\mathbb{R}^d} \\ &\to 0,\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de convergence dominée pour le premier terme, et Proposition 4.20 pour le second. □

4.4 Transformée de Fourier

On se placera sur $\mathbb{R}$ dans les démonstrations pour simplifier.

Définition 4.28 (Transformée de Fourier dans L^1)**.** Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 4.29. Elle est bien définie pour tout ξ car $\int_{\mathbb{R}^d}|e^{2i\pi x\cdot\xi}f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$.

Théorème 4.30 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f}$ appartient à l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues qui tendent vers 0 lorsque $\|\xi\| \to +\infty$, et*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Preuve dans le cas $d=1$. La continuité de $\hat{f}$ vient de la continuité d'une intégrale à paramètre. L'intégrande $g(x,\xi) = e^{2i\pi x\xi}f(x)$ est majorée en module par $|f(x)|$, intégrable indépendante du paramètre, et g est continue, ce qui conclut.

Par l'inégalité triangulaire, pour tout ξ, $|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1$, donc $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ et $\mathcal{F}$ est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$. Or les fonctions continues à support compact sont denses dans L^1 et l'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, donc il suffit de montrer que la transformée de Fourier d'une fonction continue à support compact est dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Supposons donc que f est continue à support compact, et plaçons nous dans $\mathbb{R}$ pour simplifier. Par intégration par parties sur un intervalle $[-R,R]$ en-dehors duquel f est nulle, on obtient

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \left[\frac{e^{-2i\pi\xi}}{-2i\pi\xi}f(x)\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R}\frac{e^{-2i\pi\xi}}{-2i\pi\xi}f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_{-R}^{R}\frac{e^{-2i\pi\xi}}{-2i\pi\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

donc

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi|\xi|}\|f'\|_1,$$

et $|\hat{f}(\xi)| \to 0$ lorsque $|\xi| \to +\infty$. D'où le résultat. □

Dans $\mathbb{R}^d$, un multi-indice α un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Sa longueur est définie par $|\alpha| = \sum \alpha_i$, et par $\partial^\alpha f$ on désigne la dérivée parielle $\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$. En première lecture, on pourra considérer $d = 1$, et α est simplement un entier, $\partial^\alpha f = f^{(\alpha)}$.

Définition 4.31 (Espace de Schwartz)**.** On définit *l'espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ou des *fonctions à décroissance rapide*, comme l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x\|^\ell |\partial^\alpha f(x)| < +\infty.$$

Remarque 4.32. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, \infty[$ puisque $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 4.17. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

1. En supposant que $d = 1$, montrer que $Xf = x \mapsto xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. En supposant que $d = 1$, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout $p \in [1, +\infty]$, $f^{(\alpha)} \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
3. Généraliser à la dimension d quelconque.

Proposition 4.33 (Petit formulaire de Fourier)**.** *On note* $e_\lambda = x \mapsto e^{2i\pi\lambda\cdot x}$, $\tau_\lambda f = f(\cdot - \lambda)$ *et* $h_\lambda f = f(\cdot/\lambda)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}^d$ *et* $\check{f} = f(-\cdot)$*. Alors pour tout* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*,*

(a) $\widehat{e_\lambda f} = \tau_\lambda \hat{f}$,

(b) $\widehat{\tau_\lambda f} = e_{-\lambda} \hat{f}$,

(c) $\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$,

(d) $\hat{\hat{f}} = \check{\hat{f}}$,

(e) $\hat{\hat{f}} = \check{\hat{\hat{f}}}$,

(f) $\widehat{h_\lambda f} = \lambda h_{\frac{1}{\lambda}} \hat{f}$,

(g) $\widehat{f'} = 2i\pi X \hat{f}$,

(h) $-\widehat{2i\pi X} f = \hat{f}'$, *avec* $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. En exercice. □

Remarque 4.34. Toutes ces propriétés restent vraies dans L^1 par densité de l'espace de Schwartz.

Théorème 4.35. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est stable par la transformation de Fourier.*

Preuve pour $d = 1$. En sachant que $(2i\pi X)^p f^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, en appliquant successivement (g) et (h) de Proposition 4.33, on a

$$[(-\widehat{2i\pi X)^p} f]^{(k)} = (2i\pi X)^k (-\widehat{2i\pi X})^p f = (2i\pi X)^k \hat{f}^{(p)},$$

or on sait que la transformée d'une fonction intégrable (donc de Schwartz aussi) and dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, et donc $(2i\pi X)^k \hat{f}^{(p)} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, ce qui implique que $\hat{f}$ est (de classe $\mathcal{C}^\infty$ et) à décroissance rapide. □

Exercice 4.18 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** Soit $G_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}e^{-\lambda\pi|x|^2}$ une Gaussienne centrée. On se place en dimension 1.

1. Montrer que $G_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $\int_\mathbb{R} G_\lambda = 1$.
2. Montrer que G_λ satisfait l'EDO $y' = -2\lambda\pi xy$.
3. En déduire que $\widehat{G_\lambda}' = -\frac{2\pi}{\lambda}x\widehat{G_\lambda}$.
4. En déduire que $\widehat{G_\lambda} = e^{-\frac{\pi x^2}{\lambda}}$.
5. En déduire que $\widehat{\widehat{G_\lambda}} = G_\lambda$.

Proposition 4.36. *La famille de gaussiennes normalisées G_λ vérifie :*

1. $(G_\lambda)_\lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *est une approximation de l'unité lorsque* $\lambda \to 0$.
2. $\|\widehat{G_\lambda}\|_\infty \leq 1$ *et* $\widehat{G_\lambda} \uparrow 1$ *simplement.*
3. $\widehat{\widehat{G_\lambda}} = G_\lambda$.

Proposition 4.37. *Pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$.*

Démonstration. C'est une simple application du théorème de Fubini. □

Théorème 4.38 (Théorème d'inversion)**.** *Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f = \mathcal{F}\breve{\mathcal{F}}f$, de sorte que $\breve{\mathcal{F}} = f \mapsto \hat{f}(-\cdot)$ est l'inverse de la transformation de Fourier.*

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\int \breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f)g = \int \mathcal{F}\mathcal{F}(f)\breve{g} = \int \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(\breve{g}) = \int f\mathcal{F}\mathcal{F}\breve{g}.$$

Prenons alors $g = G_\lambda$. On a $\breve{g} = g = G_\lambda$ et $\hat{\hat{G}}_\lambda = G_\lambda$, de sorte que $\int \breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f)G_\lambda = \int fG_\lambda$, ce qui s'écrit encore :

$$\breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) \star G_\lambda(0) = f \star G_\lambda(0).$$

On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_0$ et donc, puisque G_λ est une approximation de l'unité, que pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\phi \star G_\lambda \to \phi$ sur tout compact lorsque $\lambda \to 0$, et donc en particulier en faisant tendre λ vers 0 on obtient

$$\breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f)(0) = f(0).$$

En remplaçant f par $\tau_{-x}f$ on vérifie par le formulaire donné plus haut que ceci se réécrit $\hat{\hat{f}}(-x) = f(x)$, d'où le résultat. □

Corollaire 4.39. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\breve{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ presque partout.*

Théorème 4.40 (Théorème de Plancherel)**.** *Pour tout $f \in \mathcal{S}$, on a $\int_\mathbb{R}|f|^2 = \int_\mathbb{R}|\hat{f}|^2$. En particulier, la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se prolonge de manière unique en une isométrie linéaire $\mathcal{F}_{L^2}$ sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier. De plus si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}_{L^2}f = \mathcal{F}f$ preque partout.*

Démonstration. On a
$$\int |\hat{f}|^2 = \int \hat{f}\bar{\hat{f}} = \int f\hat{\bar{\hat{f}}} = \int f\overline{\check{\mathcal{F}}\mathcal{F}f} = \int f\bar{f} = \int |f|^2,$$
et on conclut par le théorème de prolongement des applications linéaires continues sur un sous-espace dense. □

4.5 Exercices

Exercice 4.19. Pour quelle(s) valeur(s) de p les fonction suivantes définies de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont-elles dans l'espace $\mathcal{L}^p$?

1. $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$
2. $x \mapsto x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$
3. $x \mapsto \frac{\arctan x}{x}\mathbf{1}_{]0,+\infty]}(x)$
4. $x \mapsto \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_{[n,n+1[}(x)$

Exercice 4.20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient f_α et g_α les fonctions définies par
$$f_a(x) = \frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{[-1;1]}(x), \quad g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}\mathbf{1}_{[1;+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad h_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

1. A quelle condition sur α et p, $f_\alpha \in L^p$?
2. Même question pour g_α.
3. Et pour h_α ?
4. Montrer que si $p < q$, il n'y a pas d'inclusion entre $L^p(\mathbb{R})$et $L^q(\mathbb{R})$.

Exercice 4.21 (Inégalités de Hölder et de Minkowski)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p, q \in]0, 1[$ deux exposants conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Considère deux fonctions mesurables f, g.

1. Démontrer *l'inégalité de Hölder*
$$\int |fg|d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$
en utilisant l'inégalité de Jensen.
Indication : considérer la mesure μ_ϕ où $\phi = |f|^p / \int |f|^p d\mu$ (lorsqu'elle est bien définie) et la fonction $h = |g|/|f|^{p-1}\mathbf{1}_{f\neq 0}$.
2. Démontrer l'inégalité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b \geq 0$ et en déduire une autre preuve de l'inégalité de Hölder.
Indication : considérer d'abord le cas où $\int |f|^p d\mu = \int |g|^q d\mu = 1$.
3. Démontrer *l'inégalité de Minkowski*
$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$
en utilisant l'inégalité de Hölder.
Indication : se ramener au cas $f, g \geq 0$ et écrire $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.

Exercice 4.22. Calculer $\hat{f}$ lorsque

1. $f := 1$;
2. $f := \mathbf{1}_{[-a,a]}$, $a > 0$;
3. $f(x) := \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $\lambda > 0$;
4. $f(x) := \frac{\lambda}{\pi(x^2+\lambda^2)}$, $\lambda > 0$;

Exercice 4.23. Soit $f(x) = (1 - |x|)\,\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

1. Montrer que $f(x) = \mathbf{1}_{[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]} * \mathbf{1}_{[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$ et calculer $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$.
2. En déduire que $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1-\cos t}{t^2} dx$.

5 Calcul différentiel

5.1 Généralités

Dans cette section, E et F sont deux evn (par exemple $\mathbb{R}^d$), U un ouvert de E, $x_0 \in U$.

Définition 5.1 (Différentielle)**.** Soit $f : U \subseteq E \to F$. Si il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que au voisinage de x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|),$$

alors on dit que f est *différentiable*[10] *en* x_0. L'application linéaire L est alors unique et on la note $dF(x_0)$.

Remarque 5.2. Attention, si $\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}$ (c'est la dérivée dans la direction u) existe pour tout u, f n'est pas forcément différentiable. Par exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut vérifier que la dérivation dans la direction $u = (a, b)$ est $\phi(u) = \frac{a^3}{a^2+b^2}$, or celle-ci n'est pas linéaire : f ne peut être différentiable.

Définition 5.3 (Différentielle seconde)**.** Si f est différentiable sur un voisinage ω de x_0 et $df : \omega \subseteq E \to \mathcal{L}_c(E, F)$ est différentiable en x_0, alors f est dite deux fois différentiable en x_0, et on note

$$\begin{aligned} d^2 f(x_0) : E \times E &\to F \\ (h,k) &\mapsto [d(df)(x_0)(h)](k), \end{aligned}$$

la différentielle seconde en x_0. C'est une application bilinéaire de $E \times E$ dans F.

Théorème 5.4 (Théorème de Schwarz)**.** *Si f est deux fois différentiable en x_0, $d^2 f(x_0)$ est bilinéaire symétrique.*

Proposition 5.5 (Formule de Taylor)**.** *Si f est deux fois dérivable en a,*

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \frac{1}{2}d^2 f(a)(h,h) + o(\|h\|^2).$$

10. Il s'agit de la différentiabilité au sens de Fréchet.

5.2 Cas réel

On se place dans el cas $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$. On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Dérivées partielles On définit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{d}{dt}_{|t=x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{h},$$

lorsqu'elle existe.

Proposition 5.6. — *Si f est différentiable en x alors toutes les dérivées partielles existent et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d_x f(e_i)$.*

— *Si toutes les dérivées partielle existent et sont continues sur un voisinage de x, alors f y est de classe $\mathcal{C}^1$.*

Remarque 5.7. On définit de la même manière les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

et on a une propriété analogue : si f est deux fois différentiables, les dérivées partielles secondent existent et valent $d_X^2 f(e_i, e_j)$; si toutes les déérivées partielles secondes existent et sont continues sur un voisinage de x alors f y est de classe $\mathcal{C}^2$.

Différentielle d'une composée Si $df(x)$ et $dg(f(x)$ existent, alors

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x).$$

En coordonnées, si $x = (x_i)$ et $f(x) = y = (y_j)$ cela s'écrit

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(\cdot) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Gradient Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (attention, à valeurs *réelles*)

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Et la différentielle s'exprime $df(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h$.

Matrice jacobienne Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

et $df(x)(h) = Jf(x)h$ où h est vu comme un vecteur colonne.

Matrice hessienne Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\nabla^2 f(x) = Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R}),$$

et $d^2 f(h,k) = \nabla^2 fh \cdot k$. Le théorème de Schwarz garantit que $\nabla^2 f$ est une matrice symétrique.

Proposition 5.8 (Formule de Taylor (réel))**.** *Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en x, alors au voisinage de* 0

$$f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \frac{1}{2}\nabla^2 f(x)h \cdot h + o(\|h\|^2),$$

ou encore

$$f(x+h) = f(x) + \sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^2 f \partial x_i \partial x_j h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

5.3 Un peu d'optimissation

Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Extrema et points critiques On dit que

- f admet en $x^\star$ un minimum
  - global si $f(x) \geq f(x^\star)$ pour tout $x \in U$,
  - local si $f(x) \geq f(x^\star)$ pour tout x dans un voisinage $\omega \subseteq U$ de $x^\star$,
  - global strict si $f(x) > f(x^\star)$ pour tout $x \in U \setminus \{x^\star\}$,
  - local strict si $f(x) > f(x^\star)$ pour tout $x \in \omega \setminus \{x^\star\}$ où $\omega \subseteq U$ est un voisinage de $x^\star$,
- f admet en $x^\star$ un maximum local/global (strict) si $-f$ admet en ce point un minimum local/global (strict),
- f admet un extremum local/global (strict) si f admet un minimum ou un maximum local/global (strict),
- x_0 est un point critique de f si f est différentiable en x_0 et $\nabla f(x_0) = 0$.

Proposition 5.9. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

— *Si f admet un extremum local en x_0 en lequel elle est différentiable, c'est un point critique.*
— *Si f est deux fois différentiable en x_0 et x_0 est un minimum local, la matrice $\nabla^2 f$ est positive ($\nabla^2 f h \cdot h \geq 0$ pour toute h, càd ses valeurs propres sont positives).*
— *Si $\nabla f(x_0) = 0$ et $\nabla^2 f$ est définie positive, x_0 est un minimum local strict.*

Exercice 5.1. Étudier les points critiques et minima de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $f(x, y)$ vaut

(i) $x^2 + y^4$,
(ii) $x^2 + y^3$,
(iii) $x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$,
(iv) $x^2 - 2xy$.

5.4 Inversion locale et fonctions implicites

Théorème 5.10 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $x_0 \in \Omega, y_0 = f(x_0)$. On suppose que $df(x_0)$ est inversible. Alors il existe deux voisinages ouverts $U \subseteq \Omega$, $V \subseteq \mathbb{R}^d$ de x_0 et y_0 respectivement, tels que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V.*

Remarque 5.11. En particulier il existe $g : V \to U$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} x \in U, y \in V \\ y = f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U, y \in V \\ x = g(y) \end{cases}.$$

Démonstration. Posons $\bar{f}(x) = df(x_0)^{-1}(f(x))$, de sorte que $\bar{f}$ vérifie les mêmes hypothèses avec de plus $d\bar{f}(x_0) = \mathrm{Id}$.

Pour $y \in \mathbb{R}^d$, essayons de résoudre

$$y = \bar{f}(x) \iff \underbrace{x - \bar{f}(x) + y}_{=:F_y(x)} = x.$$

On veut trouver un point fixe de F_y. Utilisons pour cela le théorème du point fixe de Picard. On a

$$dF_y(x) = \mathrm{Id} - d\bar{f}(x) \implies \|dF_y(x)\| = \|\mathrm{Id} - d\bar{f}(x)\|,$$

or en $x = x_0$, $d\bar{f}(x_0) = \mathrm{Id}$, et par continuité de $d\bar{f}$, pour ε assez petit,

$$x \in B_f(x_0, \varepsilon) \implies \|\mathrm{Id} - d\bar{f}(x)\| \leq \frac{1}{2} \implies \|dF_y\| \leq \frac{1}{2} (\forall y).$$

Démontrons la stabilité de F_y :

$$\begin{aligned} \|F_y(x) - x_0\| &= \|x - \bar{f}(x) - x_0 + y\| \\ &= \|x - \bar{f}(x) - (x_0 - \bar{f}(x_0)) + y - \bar{f}(x_0)\| \\ &\leq \underbrace{\sup_{x \in B_f(x_0,\varepsilon)} \|\mathrm{Id} - d\bar{f}(x)\|}_{\leq \frac{1}{2}} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq \varepsilon} + \|y - \bar{f}(x_0)\| \\ &\leq \varepsilon \quad \text{si } \|y - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in B_f(y0, \varepsilon/2)$ on est dans les hypothèses du théorème du point fixe de Picard :

(i) $F_y : B_f(x_0, \varepsilon) \to B_f(x_0, \varepsilon)$,

(ii) F_y est $\frac{1}{2}$-contractante.

Par conséquent, il existe un unique $x \in B_f(x_0, \varepsilon)$ tel que $F_y(x) = x$, i.e. $y = f(x)$. On le note $g(y)$. De plus, remarquons que si $y \in B(x_0, \varepsilon/2)$ et $x \in B_f(x_0, \varepsilon)$ alors $F_y(x) \in B(x_0, \varepsilon)$ donc $g(y) = F_y(g(y)) \in B(x_0, \varepsilon)$. Par conséquent, f réalise une bijection de $U = f^{-1}(B(y_0, \varepsilon/2)) \cap B(x_0, \varepsilon)$ dans $V = B(y_0, \varepsilon/2)$. Quitte à réduire ε préalablement, on peut supposser que $df(x)$ est inversible sur $B(x_0, \varepsilon)$ car df est continue et l'ensemble des applications linéaires inversibles est un ouvert de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Donc f est une bijection de classe $\mathcal{C}^k$ dont la différentielle est inversible : c'est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme. □

Corollaire 5.12 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \Omega$ et que f est injective sur Ω. Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de Ω sur son image.*

Théorème 5.13 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert $\Omega \ni (x_0, y_0)$. On suppose que $d_yF(x_0, y_0)$ est inversible. Alors il existe des voisinages ouverts U et V de x_0 et y_0 respectivement, et une fonction $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que*

$$\begin{cases} x \in u, y \in V \\ F(x, y) = \ell_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U \\ y = f(x) \end{cases},$$

où $\ell_0 \coloneqq F(x_0, y_0)$.

Démonstration. L'idée est d'utiliser le théorème d'inversion locale, par lequel on veut pouvoir récupérer y à partir de x et de la valeur $F(x, y)$. On pose alors

$$f(x, y) \coloneqq (x, F(x, y)).$$

On calcule sa différentieelle, par blocs :

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ d_xF(x, y) & d_yF(x, y) \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det df(x, y) = \det(\mathrm{Id}) \times \det d_yF(x, y) = 1 \times (\neq 0) \neq 0$ par hypothèse, et df est donc inversible en (x_0, y_0). D'après le théorème d'inversion locale, il existe $\tilde{U} \ni (x_0, y_0)$, $\tilde{V} \ni (x_0, \ell_0)$ ouvers de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d$ tels que f soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $\tilde{U}$ sur $\tilde{V}$, dont on note (Id, G) la fonction réciproque f^{-1}. On a donc

$$\begin{cases} (x, y) \in \tilde{U}, (x, \ell) \in \tilde{V} \\ \ell_0 = F(x, y) \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) \in \tilde{U}, (x, \ell_0) \in \tilde{V} \\ y = G(x, \ell_0) =: g(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

Notons que

$$\{(x, y) \in \tilde{U} : (x, \ell_0) \in \tilde{V}\} = \tilde{U} \cap ((x \mapsto (x, \ell_0))^{-1}(\tilde{V}) \times \mathbb{R}^d) =: \Omega$$

de sorte que Ω est un ouvert contenant (x_0, y_0). Il contient forcément un pavé $B(x_0,\varepsilon) \times B(y_0,\varepsilon)$ et en posant $V = B(y_0,\varepsilon)$, $U = B(x_0,\varepsilon) \cap g^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$, (5.1) donne

$$\begin{cases} (x,y) \in U \times V \\ F(x,y) = \ell_0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) \in U \times V \\ y = g(x) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in U \\ y = g(x) \end{cases}.$$

□

- Définition de la différentielle et différentielle seconde. Formule de Taylor. Dans $\mathbb{R}^d$ (ou l'espace euclidien), notion de gradient, application hessienne. Sur $\mathbb{R}^d$, matrices jacobiennes et hessiennes. Dérivées et différentielles partielles.
- Application de classe C^k. Critère pour être C^1. Notion de C^k-difféomorphisme, critère.