Université Paris Dauphine MIDO L3 Math

Cours de Mise à niveau en Analyse et Probabilités

Imen Ben Tahar : imen@ceremade.dauphine.fr

24 - 28 août 2020

Introduction

Le cours de pré-rentrée L3 a pour objectif de revoir en un laps de temps court des notions fondamentales en Analyse et en Probabilités qui ont été introduites et étudiées en L2 Math MIDO. Il se structure en cinq leçons qui suivent le même schéma : tout d'abord un rappel des définitions et des théorèmes importants, ensuite un large temps accordé à des exercices plus ou moins complexes. Le choix de ces exercices a été conditionné par une double nécessité, d'une part permettre au lecteur de se familiariser, manipuler et se confronter aux divers concepts présentés ; et d'autre part apercevoir la diversité de champs d'applications.

Dans la partie 1 Analyse , nous commençons par traiter des structures de bases de la topologie, celles qui nous permettent notamment de parler de “voisinage", “limite", “continuité", aussi bien dans l'espace familier $\mathbb{R}$ que dans des espaces plus abstraits. Nous accordons une attention particulière aux notions de connexité et compacité. Nous consacrons la dernière section de ce chapitre aux espaces vectoriels normés et aux applications linéaires.

Dans la partie 2 Probabilités, nous commençons par introduire le cadre formel de la théorie des Probabilités. Nous nous attarderons sur les notions de variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, espérance et moments d'ordre supérieur. Enfin, nous aborderons les diverses notions de Convergence de suite de variables aléatoires et de suites de lois de probabilités.

Bibliographie conseillée

Au lecteur désireux d'approfondir certains éléments, nous conseillons de consulter en premier lieu les deux références suivantes et le matériel pédagogique qui y figure : le cours Analyses 4 dirigé par Daniela Tonon let e cours Probabilités dirigé par Julien Poisat en L2 math MIDO.

Pour aller plus loin, nous pouvons conseiller, en Analyse : le livre *Topologie et analyse 3e année* de Georges Skandalis [3] ; en Probababilités : le livre *Aléatoire* de Sylvie Méléard [2] ou encore *Calcul des probabilités* de Dominique Foata et Aimé Fuchs [1].

Table des matières

1

Analyse

“ Par téléphone cellulaire, ils accèdent à toutes personnes par GPS, en tous lieux par la Toile, à tout le savoir : ils hantent donc un espace topologique de voisinages, alors que nous vivions dans un espace métrique, référé par des distances."
M. Serres, extrait de Petite Poucette.

1.1 Espace métrique,premières définitions

Définition 1.1 (Distance et espace métrique) *Soit X un ensemble non vide. Une distance sur X est une application $d: X \times X \to \mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout $x, y, z \in X$*

$$\text{(i)}\ \ d(x,y) = d(y,x) \quad \text{(ii)}\ \ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad \text{(iii)}\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Le couple (X, d) est désigné par espace métrique.

Proposition 1.1 (Propriétés élémentaires d'une distance) *Soit (X, d) un espace métrique, alors pour tout $x, y, z \in X$*

$$\text{(i)}\ \ d(x,y) \geq 0; \quad \text{(ii)}\ \ |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$$

Définition 1.2 (Boule ouverte, boule fermée) *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$. La boule ouverte (respectivement boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) := \{y \in X,\ d(x,y) < r\}$ (resp. $\bar{B}(x,r) := \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}$).*

Définition 1.3 (Partie bornée) *Soit (X, d) un espace métrique. Une partie $A \subset X$ est dit bornée si et seulement si il existe une boule fermée $\bar{B}(y_0, r)$ telle que $A \subset \bar{B}(y_0, r) \subset X$.*

Définition 1.4 (Fonction bornée) *Soit X un ensemble non vide et (Y, δ) un espace métrique. Une fonction $f : X \to Y$ est dite bornée (pour la distance δ) si et seulement si l'ensemble $f(X)$ est borné dans (Y, δ). On note $F_b(X; (Y, \delta))$ l'ensemble des fonctions définies sur X, à valeurs dans Y et qui sont bornées pour la distance δ.*

Exemples

• **La distance triviale** : Soit X un ensemble non vide, la distance triviale sur X est l'application δ définie par : $\delta(x,x) = 0$ et $\delta(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Les boules ouvertes pour cette distance sont : $B(x,r) = \{x\}$ pour $r \in]0,1]$ et $B(x,r) = X$ pour $r > 1$.
• **La distance usuelle sur $\mathbb{R}$** : On considère $|\cdot| : (x,y) \in \mathbb{R} \mapsto |x - y|$. Les boules ouvertes pour cette distance sont les intervalles ouverts : $B(x,r) =]x - r, x + r[$.
• **Quelques distances usuelles sur $\mathbb{R}^2$** : Pour $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2}, \qquad \text{et} \quad d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i| \,.$$

Les applications d_1, d_2 et d_∞ sont des distances sur $\mathbb{R}^2$.
• **La distance de convergence uniforme sur $F_b(X; (Y, \delta))$** : Soit X un ensemble non vide, et (Y, δ) un espace métrique. La distance de convergence uniforme sur $F_b(X; (Y, \delta))$ est la distance définie par $d_\infty : f, g \in F_b(X; (Y, \delta)) \mapsto \sup_{x \in X} \delta(f(x), g(x))$.

Convergence, limite, continuité

Dans ce paragraphe on considère un espace métrique (X, d).

Définition 1.5 (Convergence d'une suite) *Soient $x^\star \in X$ et $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers $x^\star$ dans (X, d) (ou que $x^\star$ est une limite de la suite (x_n) dans (X, d)) si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ tel que $d(x_k, x^\star) < \varepsilon$ pour tout $k \geq n$.On note.*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^\star \qquad \textit{dans} \ \ (X, d) \ .$$

Proposition 1.2 (Unicité de la limite dans un espace métrique)
Toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ admet au plus une limite.

Remarque 1.1 *Il est facile de vérifier que dans un espace métrique, une suite convergente est de Cauchy. La réciproque est en général, n'est pas vraie. Les espaces métriques où la réciproque est vraie portent sont désignés par espaces complets*

Définition 1.6 (Espace complet) *On dit d'un espace métrique (X, d) qu'il est complet si toute suite $(x_n)_n$ de Cauchy est une suite convergente.s*

Définition 1.7 (Suite de Cauchy) *Soient $x^\star \in X$ et $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (X, d) si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k, p \geq n_\varepsilon$, $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon$.*

Définition 1.8 (Continuité en un point) *Soit (Y, δ) un espace métrique, $f : X \to Y$ une application et $x^\star \in X$. On dit que f est continue au point $x^\star$ si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que : $d(f(x), f(x^\star)) < \varepsilon$ pour tout $x \in B(x^\star, r)$.*

Proposition 1.3 (Continuité et continuité séquentielle) *Soit (Y, δ) un espace métrique, $f : X \to Y$ une application. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
(i) *f est continue en $x^\star$.*
(ii) *f est séquentiellement continue en $x^\star$, c'est à dire : pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x^\star \ \ \textit{dans} \ \ (X, d) \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x^\star) \ \ \textit{dans} \ \ (Y, \delta) \ .$$

Définition 1.9 (Fonction continue) *Soit (Y, δ) un espace métrique et $f : X \to Y$. On dit que f est continue de (X, d) vers (Y, δ) si et seulement si elle est continue en tout point $x \in X$. On note $C^0((X, d); (Y, \delta))$ l'ensemble des fonctions continues.*

Proposition 1.4 (Transitivité de la continuité) *Soit (Y, δ) et (Z, Δ) deux espaces métriques. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. On note $g \circ f : X \to Z$ l'application définie par : $g \circ f(x) := g(f(x))$. Si f est continue en $x^\star \in X$ et g est continue en $f(x^\star)$, alors $g \circ f$ est continue en $x^\star$.*

Uniforme continuité, Lipschitz-continuité

Dans ce paragraphe on considère deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ)

Définition 1.10 (fonction uniformément continue) *Une fonction* $f: X \to Y$ *est dite uniformément continue de* (X, d) *dans* (Y, δ) *si et seulement si : pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\eta > 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$*,* $d(x, y) \leq \eta$ *implique* $\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$*.*

Définition 1.11 (fonction k-Lpschitzienne) *Soit une fonction* $f: X \to Y$*. Soit* k *une constante strictement positive. On dit que* f *est* k*-Lipschitzienne de* (X, d) *dans* (Y, δ) *si et seulement si : pour tout* $x, y \in X$*,* $d(x, y) \leq \eta$ *implique* $\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$*.*

Proposition 1.5 *Les implications suivantes sont vraies.*

f *est* k*-Lipschitzienne* $\Rightarrow$ f *est uniformément continue* $\Rightarrow$ f *est globalement continue.*

1.2 Espaces topologiques

La notion de distance, grâce à l'expérience directe que l'on en fait sur la droite des réels, le plan ou l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, est proche de l'intuition géométrique. Elle se généralise à des espaces plus abstraits et permet de parler de “convergence” et de “continuité". Cependant, dans certains problèmes, la structure d'espace métrique s'avère *restrictive*. La structure *d' espace topologique* est plus générale : si à tout espace métrique peut être vu comme un espace topologique, l'inverse est faux (cf. par exemple la Proposition reference)

Définition 1.12 (Espace topologique) *Soit X un ensemble non vide. Une topologie sur X est une famille $\mathcal{O}$ de parties de X qui vérifie les propriétés suivantes*

$$\text{(i) } \emptyset \in \mathcal{O} \textit{ et } X \in \mathcal{O}, \quad \text{(ii) } \mathcal{O} \textit{ est stable par union}, \quad \text{(iii) } \mathcal{O} \textit{ est stable par intersection finie} .$$

On désigne le couple $(X, \mathcal{O})$ par espace topologique.

Définition 1.13 (Topologie d'un espace métrique) *Soit (X, d) un espace métrique. La topologie associée à la distance d est l'ensemble $\mathcal{O}_d$ défini par*

$$\mathcal{O}_d \quad := \quad \{A \subset X : \; \forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A\} .$$

Définition 1.14 (Comparaison de topologies) *Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ deux topologies définies sur un même ensemble X. On dit que $\mathcal{O}$ est plus fine que $\mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$.*

Définition 1.15 (Distances équivalentes) *Soit X un ensemble non vide. Soient d et $\bar{d}$ deux distances définies sur X. On dit que les deux distances d et $\bar{d}$ sont équivalentes si et seulement si elles induisent la même topologie sur X, i.e. $\mathcal{O}_d = \mathcal{O}_{\bar{d}}$.*

Définition 1.16 (Espace topologique séparé) Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit séparé si pour tout $x \neq y \in X$, il existe deux éléments $O_x, O_y \in \mathcal{O}$ vérifiant :

$$x \in O_x, y \in O_y \quad \text{et} \quad O_x \cap O_y = \emptyset .$$

Définition 1.17 (Topologie induite sur une partie) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$. La topologie induite par $\mathcal{O}$ sur A est la famille $\mathcal{O}_A = \{A \cap O, \quad O \in \mathcal{O}\}$.

Exemple 1.1 (Deux exemples fondamentaux)
• **La topologie discrète** : L'ensemble des partie d'un ensemble X, $\mathcal{P}(X)$, est une topologie. Elle est appelée *topologie discrète* et est la topologie la plus fine de X.
• **La topologie grossière de X** : L'ensemble $\{\emptyset, X\}$ est une topologie. Si X a au moins deux éléments distincts, cette topologie *n'est pas métrisable*, c'est à dire, aucune distance définie sur X ne peut induire cette topologie grossière.

Définition 1.18 (Ouvert, fermé, voisinage) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique :*
(i) *tout élément* $O \in \mathcal{O}$ *est appelé ouvert,*
(ii) *tout partie* $F \subset A$ *vérifiant* $F^c \in \mathcal{O}$ *est dite fermée,*
(iii) *si* $x \in X$ *et* $V \subset X$ *vérifie : il existe* $O \in \mathcal{O}$, *tel que* $x \in O \subset V$, *alors on dit que* V *est un voisinage de* x *dans* $(X, \mathcal{O})$. *On note* $\mathcal{V}(x)$ *l'ensemble des voisinages de* x.

Définition 1.19 (Base d'ouverts) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique. Une famille* $\mathcal{B}$ *d'ouverts est dit une base d'ouverts de* $\mathcal{O}$ *si et seulement si tout ouvert* $O \in \mathcal{O}$ *peut s'écrire comme une union d'intersections finies d'éléments de* $\mathcal{B}$.

Définition 1.20 (Base de voisinages) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et un point* $x \in X$. *Une famille* $\mathcal{B}V \subset \mathcal{V}(x)$ *est dite une base de voisinages de* x *si et seulement si tout voisinage de* x *contient un élément* $V \in \mathcal{B}V$.

Définition 1.21 (Point isolé, d'adhérence, d'accumulation) *Soit* $(x, \mathcal{O})$ *un espace topologique, une partie* $A \subset X$ *et un point* $x \in X$.
(i) x *est un point isolé dans* A *s'il existe* $V \in \mathcal{V}(x)$ *tel que* $V \cap A = \{x\}$
(ii) x *est un point d'adhérence de* A *si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$
(iii) x *est un point d'accumulation de* A *si pour tout* $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap (A \backslash \{x\}) \neq \emptyset$.

Définition 1.22 (Adhérence, Intérieur, Frontière) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et une partie* $A \subset X$.
(i) *L'adhérence de* A, *est l'ensemble* $\bar{A} := \{x \in X,\ V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)\}$
(ii) *L'intérieur de* A *est l'ensemble* $\overset{\circ}{A} := \{x \in X :\ A \in \mathcal{V}(x)\}$
(iii) *La frontière de* A *est l'ensemble* $\partial A := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition 1.6 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et une partie* $A \subset X$.
(i) *L'adhérence de* A *est le plus petit fermé de (X,O) qui contient* A
(ii) *La partie* A *est fermée si et seulement si* $A = \bar{A}$
(iii) *L'intérieur de* A *est le plus grand ouvert contenu dans* A
(iv) *La partie* A *est un ouvert si et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$.

Définition 1.23 (Partie dense) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique. Une partie* $A \subset X$ *est dite dense dans* $(X, \mathcal{O})$ *si et seulement si* $\bar{A} = X$.

Définition 1.24 (Espace topologique séparable) *Un espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est dit séparable si et seulement si il contient une partie dense qui est au plus dénombrable.*

Exemple 1.2 $\mathbb{R}$ *muni de sa topologie usuelle est séparable car* $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1.3 Limites, continuité dans les espaces topologiques

Dans cette section on considère deux espaces topologiques $(X, \mathcal{O})$ et (Y, τ).

Limites de suites

Définition 1.25 (Valeur d'adhérence d'une suite) *Soit $\ell \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) dans $(X, \mathcal{O})$ si et seulement si : pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(\ell)$ de ℓ, pour tout $n \in N$, il existe $p \geq n$ tel que $x_p \in V$.*

Définition 1.26 (limite d'une suite) *Soit $\ell \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que ℓ est une limite de la suite (x_n) dans $(X, \mathcal{O})$ si et seulement si : pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(\ell)$ de ℓ il existe $N_V \in N$ vérifiant : pour tout $n \geq N_V$, $x_n \in V$.*

Proposition 1.7 (Unicité de la limite dans les espaces séparés) *Si $(X, \mathcal{O})$ est séparé, une suite (x_n) admet au plus une limite. Si une telle limite existe, on dit que ℓ est* la limite de *(x_n) et on note $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Proposition 1.8 (Limites et adhérence d'une partie) *Soit $A \subset X$.*
(i) *On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de A et $\ell \in X$ tels que (x_n) converge vers ℓ. Alors $\ell \in \bar{A}$.*
(ii) *Si (X, d) est un espace métrique, la réciproque est également vraie : $\ell \in \bar{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\ell = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

Définition 1.27 (Suite extraite) *Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$. On appelle suite extraite de (x_n) toute suite de la forme $(x_\Phi(n))$ où $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.*

Limites de fonctions

Définition 1.28 (Limite d'une fonction) *Soit une fonction $f : X \to Y$. Soit $A \subset X$, $x^\star \in \bar{A}$ et $y^\star \in Y$. On dit que $y^\star$ est limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $x^\star$ en restant dans A si et seulement si : pour tout voisinage W de $y^\star$ dans (Y, τ), il existe un voisinage V de $x^\star$ dans $(X, \mathcal{O})$ tel que : $f(V \cap A) \subset W$.*
Si (Y, τ) est séparé, une telle limite est unique, on écrit alors sans ambiguïté :

$$y^\star = \lim_{x\to x^\star, x\in A} f(x)$$

Définition 1.29 (Continuité en un point) *Soit une fonction $f : X \to Y$. Soit $x^\star \in X$. On dit que f est continue en $x^\star$ ei et seulement si l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x^\star)$ est un voisinage de $x^\star$: pour tout $W \in \mathcal{V}(f(x^\star))$, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x^\star)$.*

Proposition 1.9 (Continuité et limite) *La fonction $f : X \to Y$ est continue en $x^\star \in X$ si et seulement si $f(x^\star)$ est une limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $x^\star$.*

Proposition 1.10 (Transitivité de la continuité) *Soit (Z, γ) un espace topologique. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. On suppose que f est continue en $x^\star \in X$ et g est continue en $f(x^\star) \in Y$. Alors l'application $g \circ f : x \in X \mapsto g(f(x)) \in Z$ est continue en $x^\star$.*

Proposition 1.11 (Cas des espaces métriques) *Dans le cas particulier où (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques, nous avons équivalence entre les propriétés suivantes :*
(i) *la fonction $f : X \to Y$ est continue en $x^\star$,*
(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $d(x, x^\star) \leq \eta$ implique $\delta(f(x^\star), f(x)) \leq \varepsilon$.*
(iii) *pour toute suite (x_n) qui converge vers $x^\star$, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x^\star)$.*

Continuité globale

Définition 1.30 (Continuité globale) *Soit $f : X \to Y$. On dit que f est continue sur X si et seulement si f est continue en tout point de $x \in X$.*

Proposition 1.12 *Soit $f : X \to Y$. On a équivalence entre les affirmations suivantes :*
(i) *f est continue sur X,*
(ii) *l'image réciproque par f de tout ouvert de (Y, τ) est un ouvert de $(X, \mathcal{O})$,*
(iii) *l'image réciproque par f de tout fermé de (Y, τ) est un fermé de $(X, \mathcal{O})$.*

1.4 Connexité

Définition 1.31 (Espace connexe, partie connexe) *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit connexe s'il ne peut pas s'écrire comme la réunion disjointe de deux ouverts non vides. Une partie $A \subset X$ est dit connexe si $(A, \mathcal{O}_A)$, où $\mathcal{O}_A$ est la topologie induite par $\mathcal{O}$ sur A, est un espace connexe.*

Proposition 1.13 (Une condition équivalente) *L'espace $(X, \mathcal{O})$ est si et seulement si les seules parties de $(X, \mathcal{O})$ qui sont à a fois fermées et ouvertes sont X et $\emptyset$.*

Proposition 1.14 (Adhérence d'un connexe) *Si A est une partie connexe de l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ alors son adhérence, $\bar{A}$, est connexe.*

Exemple 1.3 (La droite des réels) $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est connexe. Les partie connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Exemple 1.4 (L'espace $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$) $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie usuelle est connexe. On appelle pavé tout ensemble P de $\mathbb{R}^d$ de la forme $P = \prod_{i=1}^{d} I_i$ où I_i sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Tout pavé P est connexe.

Connexité et fonctions continues

Théorème 1.1 *L'image d'un connexe par une application continue et un connexe.*

Corollaire 1.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique connexe et $f : (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ une application continue. Alors $f(X)$ est un intervalle.*

Proposition 1.15 (Une caractérisation des connexes) *L'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est connexe si et seulement si toute application continue de X à valeurs dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Composantes connexes

Même si l'espace $(X, \mathcal{O})$ n'est pas connexe, il peut être utile de considérer sa partition en parties connexes.

Définition 1.32 (Composante connexe) *Soit $(x, \mathcal{O})$ un espace topologique et $x \in X$. La composante connexe de x, notée $C(x)$, est la plus grande partie connexe contenant x.*

Proposition 1.16 *Les composantes connexes des éléments de $(X, \mathcal{O})$ sont fermées, deux à deux disjointes et forment une partition de X.*

La Proposition suivante aide à identifier les composantes connexes d'un espace.

Proposition 1.17 *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique.*
(i) *si* $X = \bigcup_{i \in I} O_i$ *où* (O_i) *est une famille d'ouverts connexes deux à deux disjoints. Alors les* O_i *sont les composantes connexes de* X*.*
(ii) *si* $X = \bigcup_{j \in J} F_j$ *où* (F_j) *est une famille* **finie** *de fermés connexes deux à deux disjoints. Alors les* F_i *sont les composantes connexes de* X*.*

Connexité par Arc

Définition 1.33 (Chemin) *Soit* $(X, \mathcal{O})$ *un espace topologique et* $x, y \in X$*. Un chemin reliant* x *à* y *est une application continue* $\gamma : [0,1] \to X$ *telle que* $\gamma(0) = x$ *et* $\gamma(y) = 1$*.*

Définition 1.34 (Connexe par arc) *Un espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ *est dit connexe par arc si et seulement si pour tout* $x, y \in X$ *il existe un chemin relie* x *à* y*. Une partie* $A \subset X$ *est dit connexe par arc si et seulement si, muni de la topologie induite* $\mathcal{O}_A$*, l'espace* $(A, \mathcal{O}_A)$ *est connexe par arc.*

Proposition 1.18 *Si* $(X, \mathcal{O})$ *est connexe par arc, alors il est connexe .*

1.5 Compacité

Définition 1.35 (Propriété de Borel-Lebesgue) Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est dit compact si et seulement si : $(X, \mathcal{O})$ est séparé et si de tout recouvrement de X par des ouverts de $\mathcal{O}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Cette définition se traduit, par passage au complémentaire, ainsi :

Proposition 1.19 *Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est compact si et seulement si : $(X, \mathcal{O})$ est séparé et si de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.*

Définition 1.36 (Partie compacte) *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $A \subset X$ si $(A, \mathcal{O}_A)$ est compact où $\mathcal{O}_A$ est la topologie induite sur A par $\mathcal{O}$.*

La proposition suivante exprime le fait que pour une partie A compacte, la propriété de Borel-Lebesgue peut s'écrire avec les ouverts de $\mathcal{O}$.

Proposition 1.20 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace métrique séparé et $A \subset X$. La partie A est compacte si et seulement si de tout recouvrement de A par des ouverts de $\mathcal{O}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.37 (Partie relativement compacte) *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé et $A \subset X$. La partie A est dit relativement compacte si et seulement si son adhérence, $\bar{A}$, est compacte.*

Caractérisation séquentielle dans les espaces métriques

Si (X, d) est un espace métrique, la compacité peut être caractérisée en utilisant les suites.

Théorème 1.2 *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) *A est compacte.*
(ii) *toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*
(iii) *de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente.*

Corollaire 1.2 Tout espace métrique compact est séparable.

Dans le cas particulier où $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ le théorème précédent permet de montrer :

Théorème 1.3 (Heine-Borel-Lebesgue) *Tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$ avec $a \leq b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Propriétés des compacts

Proposition 1.21 (Compacts et fermés) *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé.*
(i) *Si $A \subset X$ est une partie compacte, alors elle est fermée.*
(ii) *Si $(X, \mathcal{O})$ est compact et $A \subset X$ est fermée, alors A est compacte.*
(iii) *Si $(X, \mathcal{O})$ est compact, les compacts sont les fermés.*

Corollaire 1.3 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Proposition 1.22 (Union, intersection, produit) *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique séparé.*
(i) *toute union finie de partie compactes et compacte.*
(iii) *une intersection quelconque de parties compactes est compacte.*
(iii) *(Théorème de Tychonoff) : un produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

Corollaire 1.4 Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance produit usuelle, les pavés de la forme $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i],\ a_i \leq b_i \in \mathbb{R}$, sont compacts.

Fonctions continues et compact

Théorème 1.4 (Image d'un compact par une fonction continue) *Soit $(X, \mathcal{O})$ et (Y, τ) deux espaces topologiques séparés. L'image d'une partie compacte par une fonction continue de $(X, \mathcal{O})$ dans (Y, τ) est une partie compacte.*

Corollaire 1.5 *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace compact et $f :\ (X, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continue. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes.*

Théorème 1.5 (Compacité et uniforme continuité) *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On suppose que (X, d) est compact, alors toute application continue $f :\ (X, d) \to (Y, \delta)$ est uniformément continue.*

1.6 Espaces vectoriels normés

Dans cette section nous considérons $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \times)$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.38 (Norme) *On appelle norme sur E toute application $\|\|_E$ définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés : pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\text{(i) } \|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x_E$$
$$\text{(ii) } \|x\|_E = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0_E$$
$$\text{(iii) } \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$$

Le couple $(E, \|\cdot\|_E)$ est appelé espace vectoriel normé. De plus, si on munit E de la topologie associée à cette distance et $E \times E$ de la topologie produit et $\mathbb{K}$ de la topologie usuelle alors les fonctions suivantes sont continues

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E \quad \textit{et} \quad (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda \times x \in E$$

On dit que la topologie induite par la norme sur E est compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Remarque 1.2 (Topologie forte) La topologie associée à la norme est désignée par topologie forte de l'e.v.n E.

Proposition 1.23 (Distance associée à une norme) *Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un espace vectoriel normé. Alors l'application $d : \ (x, y) \in E \mapsto \|x - y_E$ est une distance sur E.*

Définition 1.39 (Normes métriquement équivalentes) *Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Elles sont dites équivalentes si et seulement si il existe $L > 0$ tel que*

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{L}||x|| \leq ||x||' \leq L||x||$$

Applications linéaires continues

Dans le cas des applications linéaires sur les espaces vectoriels, nous avons une importante caractérisation de la continuité.

Proposition 1.24 (Continuité des applications linéaires) *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$. Une application linéaire $f : \ E \to F$ est continue :*
- *si et seulement si elle est continue en 0_E,*
- *si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall x \in E, \ \ ||f(x)||_F \ \leq \ C||x||_E$.*

Corollaire 1.6 (Equivalence topologique des normes) *Deux normes sur un espace vectoriel sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont métriquement équivalentes.*

Définition 1.40 (Dual topologique d'un espace vectoriel) *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique de* E*, et on note* E' *l'ensemble des applications linéaires continues* $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (\mathbb{K}, |\cdot|)$*.*

Définition 1.41 (Dual topologique d'un espace vectoriel) *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *et* $(F, \cdot_F)$ *deux espaces vectoriels normés. On note* $\mathcal{L}(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires continues* $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (E, \|\cdot\|_E)$*. En particulier* $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$*.*

Proposition 1.25 (Une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$) *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$*. L'application :* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$||f||_{\mathcal{L}(E,F)} \quad := \quad \sup_{e \in E, e \neq 0} \frac{||f(e)||_F}{||e||_E}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$*.*

Compacité en dimension finie

Théorème 1.6 (Compacité de la la boule unité) *Soit* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base de* E*. On lui associe la norme* $||||_\infty$ *définie par*

$$||x||_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad si \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Alors la boule unité fermée $\overline{B(0_E, 1)}$ *est compacte.*

Théorème 1.7 *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* **de dimension finie**. *Alors :*
(i) *toutes les normes sont équivalentes,*
(ii) *pour toute norme les compacts sont les fermés bornés,*
(iii) *si* $(F, ||\cdot||_F)$ *est un autre espace vectoriel (de dimension quelconque) alors toute application linéaire de* E *dans* F *est continue.*
(iv) *tout sous-espace vectoriel de* E *est fermé pour la topologie de la norme.*

Cas de la dimension infinie

Soit $(E, ||\cdot||_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.
Tout d'abord intéressons-nous aux sous-espaces qui sont de dimension finie

Proposition 1.26 *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie fermé dans* $(E, ||\cdot||_E)$*.*

Contrairement au cas de la dimension finie, la boule unité fermée n'est jamais compacte en dimension infinie

Théorème 1.8 (Riesz) *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

(i) *La boule unité fermée de* $(E, ||\cdot||_E)$ *est fermée*

(ii) E *est de dimension finie.*

1.7 Exercices

Espaces métriques

Exercice 1.1 Soit X un ensemble non vide et d une distance sur X. Montrez que $\min(1, d)$, $d : (1 + d)$ et $\ln(1 + d)$ sont également des distances.

Exercice 1.2 Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 2. On considère la fonction $d : R_2[X] \times R_2[X] \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ alors

$$d(P,Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } P = Q \\ 1 & \text{si } a_2 = b_2,\ a_1 = b_1, a_0 \neq b_0 \\ 2 & \text{si } a_2 = b_2,\ a_1 \neq b_1 \\ 3 & \text{si } a_2 \neq b_2\ . \end{cases}$$

Montrez que d est une distance sur $\mathbb{R}^2[X]$ et que pour tout $P, Q, S \in \mathbb{R}^2[X]$:

$$d(P,S) \leq \max\{d(P,Q); d(Q,S)\}$$

Exercice 1.3 Soit d une distance sur $X = \mathbb{R}^2$. Représentez $\bar{B}(0,1)$:

$$\text{cas 1 } d : (x,y) \mapsto \max_i d(x_i, y_i),$$

$$\text{cas 2 } d : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|,$$

$$\text{cas 3 } d : (x,y) \mapsto (\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

Exercice 1.4 (Distance produit) On considère n espaces métriques $((X_i, d_i))_{1\leq i\leq n}$. On note $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Pour deux éléments $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in X$, on pose $d(x,y) := \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$.

1. Montrez que d est une distance sur X. Elle est appelée *distance produit* et (X, d) est dit espace métrique produit des espaces (X_i, d_i).

2. Montrez que V est un voisinage de $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dans X muni de la distance produit si et seulement s'il existe $(V_1, \cdots, V_n) \in \mathcal{P}(X_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(X_n)$ tels que pour tout i, V_i est un voisinage de x_i dans (X_i, d_i) et $\prod_{i=1}^{n} V_i \subset V$.

Topologie, ouvert, fermé, adhérence ,...

Exercice 1.5 (Extérieur d'une partie) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle *extérieur d'une partie* A l'ensemble $\overset{\circ}{A^c}$

1. Montrez que $\overset{\circ}{A^c} = (\bar{A})^c$.

2. Montrez que $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}$.

Exercice 1.6 Enumérer les topologies de l'ensemble $X = \{a, b\}$ et pour chacune de ces topologies déterminez les ouverts, les fermés, les voisinages, les intérieurs, les voisinages et les suites convergentes.

Exercice 1.7 Considérons les distances définies dans de l'Exercice (1.3). Montrez qu'elles sont équivalentes.

Exercice 1.8 On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances d et δ définies par

$$d(x,y) = \left(\sum_i |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \delta(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires,} \\ d(x,0) + d(y,0) & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrez que si A est un ouvert (respectivement. fermé) pour d alors il l'est pour δ.

2. Pour chacune des distances d et δ déterminez l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants.

$$\begin{aligned}
&A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 > 0, x_2 > 0\}, \quad B = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \\
&C = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \ x_2 > 0\}, \quad D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_2 \geq 0\} \\
&E = \{(0,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_2 > 0\}, \quad F = \{(0,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_2 \geq 0\} \\
&G = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x_1 = 0\}
\end{aligned}$$

Exercice 1.9 On considère $X =]0, +\infty[$. On note d la distance induite par la distance usuelle $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$. On note δ la distance définie par $\delta(x,y) = \min(1, d(x,y))$.

1. Pour chacune de ces distances précisez si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, bornés et déterminez leurs intérieurs et leurs adhérences :

$$A :=]0,1], \ B :=]1,+\infty[, \ C :=]0,1[, \ D := [1,+\infty[, \ E :=]\frac{1}{2}, 2[, \ X \ .$$

2. Est-ce que ces deux distances sont équivalentes.

Exercice 1.10 Soit $(x, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A, B \subset X$. Montrez les assertions :

(i) $\overset{\circ}{X} = X, \quad \bar{\emptyset} = \emptyset$.

(ii) $X \setminus \bar{A} = (\overset{\circ}{X \setminus A}), \quad X \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{X \setminus A}$.

(iii) $B \subset A \Rightarrow \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A}, \ \bar{B} \subset \bar{A}$.

(iv) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}, \overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

(v) $A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$

(vi) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(vii) Si (X, d) est métrique alors pour tout $x \in X \ \ \overline{\{x\}} = \{x\}$.

Exercice 1.11 (Topologie produit (produit fini)) Soient (Y_1, τ_1) et (Y_2, τ_2) deux espaces topologiques. On note $\hat{\tau}$ l'ensemble

$$\hat{\tau} \ := \ \{\hat{U} \in Y_1 \times Y_2, \ \forall x \in \hat{U}, \ \exists U_{1,x} \in \tau_1, U_{2,x} \in \tau_2, \ t.q \ \ x \in U_{1,x} \times U_{2,x} \subset \hat{U}\}$$

1. Vérifiez que $\hat{\tau}$ est une topologie sur l'ensemble produit $Y_1 \times Y_2$. Elle est appelée topologie produit de (Y_1, τ_1) et (Y_2, τ_2). **2.** On note p_1 et p_2 les applications définies sur $Y_1 \times Y_2$ par

$$p_1 : \ (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mapsto y_1 \in Y_1 \quad \text{et} \quad p_2 : \ (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2 \mapsto y_1 \in Y_2$$

Montrez que p_1 est continue de $(Y_1 \times Y_2, \hat{\tau})$ dans (Y_1, τ_1) et p_2 est continue de $(Y_1 \times Y_2, \hat{\tau})$ dans (Y_2, τ_2).

3. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $f : \ X \to (f_1(x), f_2(x)) \in Y_1 \times Y_2$. Montrez que f est continue de $(X, \mathcal{O})$ dans $(Y_1 \times Y_2, \hat{\tau})$ si et seulement si : f_1 est continue de $(X, \mathcal{O})$ dans (Y_1, τ_1) et f_2 est continue de $(X, \mathcal{O})$ dans (Y_2, τ_2).

Suites et limites

Exercice 1.12 On considère sur $\mathbb{R}^2$ la suite $u_n = (1, \frac{1}{n}), \ n \in \mathbb{N}$ et les distances d et δ :

$$d(x, y) \ = \ \left(\sum_i |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \delta(x, y) \ = \ \begin{cases} d(x, y) & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires,} \\ d(x, 0) + d(y, 0) & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$.

2. Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $(\mathbb{R}^2, d)$.

3. Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans $(\mathbb{R}^2, \delta)$.

Exercice 1.13 On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances d et Δ_0 définies par

$$d(x,y) \;=\; \left(\sum_i |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \Delta_0(x,y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon }. \end{cases}$$

Déterminez les valeurs d'adhérence des suites suivantes dans $(\mathbb{R}^2, d)$ et dans $(\mathbb{R}^2, \Delta_0)$.

$$\text{(i) } u_n = ((-1)^n, (-1)^{n+1}), \text{ (ii) } v_n = (\sin(\frac{n}{3}\pi), \frac{1}{n}), \text{ (iii) } w_n = (n, \sin(\frac{n}{2}\pi))$$

Exercice 1.14 En utilisant la caractérisation séquentielle, déterminez l'adhérence des ensembles suivants (Ici $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de la distance usuelle).

$$\begin{aligned} A &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \;\; x_1 \neq 0, x_2 = \sin(\frac{1}{x})\} \\ B &:= \{x \in \mathbb{R}, \;\; x = \frac{1}{n} \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}^\star\} \\ C &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \;\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_1 \neq 0\} \end{aligned}$$

Continuité

Exercice 1.15 Soit (X, d) un espace métrique.
1. Montrez que pour tout $a \in X$, la fonction $f_a : \; x \in X \mapsto d(x, a)$ est continue de (X, d) dans $(\mathbb{R}_+, |\cdot|)$.
2. Montrez que $d : \; X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue de $X \times X$ muni de la métrique produit, vers $(\mathbb{R}_+, |\cdot|)$.
3. Soit A une partie non vide de X. La distance d'un point x à la partie A est $d(x, A) = \inf\{d(x, y), \; y \in A\}$. Montrez que la fonction $x \mapsto d(x, A)$ 1-Lipschitzienne de (X, d) dans $(\mathbb{R}_+, |\cdot|)$.

Exercice 1.16 Soit $f : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x_2 = f(x_1)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.17 Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$. La fonction caractéristique de A (ou indicatrice de A), notée $\mathbf{1}_A$, est la fonction définie par

$$\mathbf{1}_A(x) = 1 \;\text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad 0 \text{ sinon }.$$

1. On munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrez que $\mathbf{1}_A$ est continue en x si et seulement si $x \notin \partial A$.
2. Donner une condition pour que $\mathbf{1}_A$ soit continue sur X et un exemple où $\mathbf{1}_A$ n'est continue en aucun point de X.

Exercice 1.18 Soient $(X, \mathcal{O})$ et (Y, τ) deux espaces topologiques et $f : \;\; X \to Y$ une fonction. Montrez que f est continue si et seulement pour tout $A \subset X$: $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Connexité

Exercice 1.19 (Passage de douane) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$. Soit $C \subset X$ une partie connexe. On suppose que C rencontre l'intérieur A, $\overset{\circ}{A}$, et l'extérieur de A, $(\bar{A})^c$. Montrez que C rencontre la frontière de A, $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Exercice 1.20 (Union et intersection) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.
1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes. On suppose qu'il existe i_0 tel que pour tout i $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Montrez que $\bigcup_i A_i$ est connexe.
2. Est-ce que l'intersection de parties connexes est connexe.

Exercice 1.21 (intérieur d'une partie connexe) Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset X$ une partie connexe (resp. connexe par arc). Est-ce que l'intérieur de A est toujours connexe (resp. connexe par arc).

Exercice 1.22 (Une application de la connexité : le théorème de Darboux) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $I \subset$ un intervalle ouvert non vide.
1. Montrez que $A := \{(x, y) \in I \times I : \; x < y\}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$
2. On note $g : \; (x, y) \in A \mapsto (f(y) - f(x))/(y - x)$. Montrez que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. En déduire que $f'(I)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

Exercice 1.23 Précisez les composantes connexes de chacun des ensembles suivants

$$
\begin{aligned}
A &:= \{0\} \cup [1, 2] \\
B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 + y^2 = 1\} \\
C &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x + y \neq 1\} \\
D &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x^2 \leq y^2\} \\
E &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; x \leq y^2\} \\
F &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x + y + z \neq 1\} \\
G &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \;\; 0 \leq x + y + z \leq 1\}
\end{aligned}
$$

Exercice 1.24 (Adhérence et connexité par arc) Soit A la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $A = \{(x, \sin(1/x)), \;\; x > 0\}$.
1. Montrez que A est connexe
2. Déterminez $\bar{A}$ et montrez que $\bar{A}$ est connexe.
3. Montrez que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arc.

Espaces vectoriels normés

Exercice 1.25 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels. Pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ on définit

$$||P|| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} |P(X)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k}$$

1. Montrez que N et $||||$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = X^n$. Déterminez les limites de (u_n) pour la norme $||||$ et la norme N
3. En vous inspirant de ces deux exemples, construire sur $\mathbb{R}[X]$ une norme telle que (u_n) converge vers le polynôme X.

Exercice 1.26 Soit $(E, ||\cdot||_E)$ et $(F, ||\cdot||_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est de dimension finie. Montrez que toute application linéaire $f: \ E \to F$ est continue.

Exercice 1.27 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément $f \in E$ on note

$$||f||_\infty = \sup_{[0,1]} |f| \quad \text{et} \quad ||f||_1 = \int_0^1 |f(u)| du$$

1. Montrez que $||\cdot||_\infty$ et $||\cdot||_1$ sont des normes sur E.
2. Montrez que pour tout $f \in E$, $||f||_1 \leq ||f||_\infty$.
3. Est-ce que ces normes sont équivalentes ?
4. Montrez que $(E, ||\cdot||_\infty)$ est complet.

Exercice 1.28 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur E la norme $||\cdot||_1$. On définit la fonction

$$\Phi: \ f \in E \mapsto \Phi(f) \in E \quad \text{par} \quad \Phi(f)(x) = \int_0^x f(u) du$$

1. Montrez que f est une application linéaire continue.
2. Pour $n \geq 1$ on note $f_n: \ x \in [0,1] \mapsto ne^{-nx}$. Calculez $||f_n||_1$ et $||\Phi(f_n)||_1$.
3. Déterminez $|\Phi|_{\mathcal{L}(E)} := \sup_{e\in E, e\neq 0_E} ||\Phi(e)||_1/||e||_1$

2

Probabilités

“On pourrait traiter des probabilités sans prononcer le mot Hasard. Comme on peut traiter de l’électricité sans prononcer le mot Grenouille.”
P. Valéry, Extrait des Cahiers II.

2.1 Modèle probabiliste : le cadre formel

Un *espace de probabilité* est défini par la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où

Ω est une ensemble non vide, appelé *univers de probabilité* ou encore *ensemble des états du monde possibles.*

$\mathcal{F}$ est une famille de sous-parties de Ω vérifiant la propriété d'être une *tribu*. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont désignés par *évènements*.

$\mathbb{P}$ est une fonction définie sur $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $[0, 1]$ vérifiant la propriété d'être une *mesure de probabilité*

Les définitions précises de *tribu* et *mesure de probabilité* sont données ci-après. Mais commençons d'abord par introduire des éléments du *langage des probabilité*

L'univers Ω et la tribu des évènements

Les modèles probabilistes font appel à la *théorie mathématique des ensembles* pour décrire l'univers Ω. Un language propre au probabilités est communément utilisé :
• Un élément ω de Ω est désigné par l'expression : *état du monde possible.*
• Une partie A appartenant à la tribu $\mathcal{F}$ est désignée par le terme : *évènement*
• L'ensemble vide $\emptyset$ est désigné par : *l'évènement impossible*
• L'ensemble Ω est désigné par : *l'évènement certain*
• Si A est un évènement, son complémentaire noté A^c est désigné par : *évènement complémentaire de A* on dit également *évènement contraire à A*
• Si deux évènements A et B vérifient $A \subset B$, on dit que : *l'évènement A implique/entraîne l'évènement B*
• La réunion $A \cup B$ évènement correspond à l'opération logique : *l'évènement A* **ou** *l'évènement B se réalise*
• L'intersection $A \cap B$ de deux évènements correspond à l'opération logique : *l'évènement A* **et** *l'évènement B se réalisent.*
• Si A et B sont deux évènements disjoints, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que : *A et B sont deux évènements incompatibles*

La probabilité comme une fonction d'ensembles

Une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est une fonction qui va attribuer à un évènement une valeur comprise entre 0 et 1 traduisant la "chance de réalisation de cet évènement". Pour définir correctement une telle fonction, la théorie moderne des probabilités fait appel à des notions qui appartiennent à la *Théorie de la Mesure* : à savoir la notion de *tribu* et la notion de *mesure*.

Définition 2.1 (Tribu) *Une famille $\mathcal{F}$ de parties de Ω est une tribu si et seulement si*

T1. *Ω est un élément de $\mathcal{F}$.*

T2. *Si $A \subset \mathcal{F}$, alors son évènement complémentaire est également contenu dans Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire.*

T3. *Si $(A_n)_n$ est une suite finie ou infinie d'évènements de $\mathcal{F}$, alors leur réunion appartient aussi à $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est stable par réunion dénombrable.*

Une conséquence immédiate de cette définition :

Proposition 2.1 *Si $\mathcal{F}$ est une tribu de Ω. Alors $\emptyset$ est également contenu dans $\mathcal{F}$. De plus $\mathcal{F}$ est stable par intersection dénombrable, c'est à dire, si $(B_n)_n$ est une suite finie ou infinie d'évènements de $\mathcal{F}$, alors leur intersection appartient à $\mathcal{F}$.*

Définition 2.2 (Mesure de probabilité) *Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω. Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est une fonction $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1. $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ *pour tout* $A \in \mathcal{F}$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^N$ d'évènements deux à deux incompatibles, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$:* $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ ..

Définition 2.3 (Evènement négligeable, Evènement presque surs) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.*

1. *Soit A une partie de Ω. Si $A \subset B$ où $B \in \mathcal{F}$ est un évènement de probabilité égale à zéro, $\mathbb{P}(B) = 0$, alors on dit que A est* négligeable.
2. *Soit $A \in \mathcal{F}$ un évènement de probabilité égale à 1 : $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est un évènement $\mathbb{P}$-presque sûr.*
3. *Une propriété Ξ est dite vraie $\mathbb{P}$-presque surement ou $\mathbb{P}$-presque-sûre si elle est vérifiée sur un évènement $\mathbb{P}$-presque sûr. On note alors " Ξ $\mathbb{P} - a.s.$".*

La Proposition suivante regroupe des propriétés élémentaires d'une mesure de probabilité. Ces propriété sont simples à démonter ; elles sont fort utiles et d'usage fréquent.

Proposition 2.2 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.*

1. *Si* $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ *est une suite finie d'évènements incompatibles alors*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$$

2. *Pour tout évènement* A*,* $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$*.*
3. *La probabilité de l'évènement impossible est égale à zéro :* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
4. *Si* A *et* B *sont deux évènements quelconques, alors*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

5. *Si* A *entraîne* B *alors* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$*.*

La notion de tribu engendrée

Pour comprendre la notion de tribu engendrée, commençons par remarquer que :

Proposition 2.3 (Intersection de tribus) *Soit* Ω *un ensemble et* $(\mathcal{F}_i)_i$ *une famille de tribus sur* Ω*. Alors* $\mathcal{F} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ *est une tribu.*

Grâce à cette propriété, on peut donner la définition suivante

Définition 2.4 *Soit* Ω *un ensemble et* $\mathcal{C}$ *un ensemble de parties de* Ω*. La tribu engendrée par* $\mathcal{C}$*, notée* $\sigma(\mathcal{C})$*, est la plus petite tribu de* Ω *qui continent* $\mathcal{C}$ *:* $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\,tribu \\ \mathcal{C}\subset\mathcal{F}}} \mathcal{F}$*.*

2.2 Des exemples fondamentaux d'espaces de probabilité

Remarquons d'abord que sur un ensemble non vide Ω on peut toujours considérer les tribus suivantes :

- la tribu $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Elle est appelée *la tribu grossière de* Ω.
- la tribu $\mathcal{F}_d := \mathbb{P}(\Omega)$. Elle est appelée *la tribu discrète de* Ω

Notons que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_d$. D'une manière générale, si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ sont deux tribus définies sur Ω et telles que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on dira que $\mathcal{G}$ *est plus petite que* $\mathcal{F}$ *au sens de l'inclusion*.

La masse de dirac

Considérons sur Ω la tribu discrète $\mathcal{F}_d$. Soit $x \in \Omega$ fixé. On peut définir sur $\mathcal{F}_d$ une mesure de probabilité, notée δ_x en posant

$$\forall A \in \mathcal{F}_d, \quad \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La mesure de probabilité δ_x est appelée *la masse de Dirac en* x.

Cas où Ω est fini

Lorsque l'univers Ω est un ensemble fini, on le munit habituellement de sa tribu discrète $\mathcal{F}_d = \mathcal{P}(\Omega)$. Une mesure de probabilité peut être entièrement définie sur $\mathcal{F}_d$ en précisant les probabilités des évènements élémentaires $\{\omega\}$. En effet, tout évènement A s'écrit comme une réunion finie d'évènements disjoints :$A = \cup_{\omega \in A}\{\omega\}$, alors

$$\mathbb{P}(A) \quad = \quad \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) \ \text{ pour tout } A \in \mathcal{F}_d \, .$$

Dans le cas particulier où $\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega')$ pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$, on dit que $\mathbb{P}$ est une probabilité uniforme sur Ω ; elle est donnée par

$$\mathbb{P}(A) \quad = \quad \frac{Card\{A\}}{Card(\Omega)} \ \text{ pour tout } A \in \mathcal{F} \, .$$

Cas où $\Omega = [0,1]$: la tribu Borélienne et la mesure de Lebesgue

Définition 2.5 *Tribu Borélienne sur* $[0,1]$
On appelle tribu Borélienne sur $[0,1]$ *et on note* $\mathcal{B}([0,1])$*, la tribu engendrée par tous les sous-intervalles de* $[0,1]$ *: c'est à dire la tribu obtenue en prenant l'intersection de toutes les tribus contenant les sous-intervalles de* $[0,1]$*.*

Remarque 2.1 On retiendra de cette définition que $\mathcal{B}([0,1])$ est une tribu.

1. Elle contient, par définition, tous les intervalles inclus dans $[0,1]$.
2. Elle contient aussi toute intersection dénombrable ou réunion dénombrables d'intervalles, c'est la propriété de tribu.
3. Elle contient également tout les singletons $\{x\}$, $x \in [0,1]$, puisque $[x,x]$ est un intervalle de $[0,1]$.

On admettra le résultat suivant

Théorème 2.1 *Mesure de Lebesgues Il existe une unique mesure de probabilité* $\mathcal{L}$ *sur la tribu* $\mathcal{B}([0,1])$ *vérifiant :*

$$\mathcal{L}([x,y]) \quad = \quad |x-y| \quad \textit{pour tout } x \leq y, \in [0,1] \; .$$

Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue.

Cas où $\Omega = \mathbb{R}$: tribu Borélienne et probabilités définies par une fonction de répartition

Définition 2.6 *Tribu borélienne sur* $\mathbb{R}$ *On appelle tribu Borélienne sur* $\mathbb{R}$ *et on note* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, la tribu engendrée par tous les sous-intervalles de* $\mathbb{R}$ *: c'est à dire la tribu obtenue en prenant l'intersection de toutes les tribus contenant les sous-intervalles de* $\mathbb{R}$*.*

On admettra le résultat suivant

Théorème 2.2 *Soit* F *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs sur* $\mathbb{R}$*. On suppose que* F *vérifie les propriétés suivantes*

1. F *est croissante*
2. F *est continue à droite*
3. $\lim_{-\infty} F = 0$ *et* $\lim_{+\infty} F = 1$

Alors il existe une et une seule mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*, notée* $\tilde{F}$*, telle que*

$$\tilde{F}(]a,b]) \quad = \quad F(b) - F(a) \; .$$

On dit que $\tilde{F}$ *est définie par la fonction de répartition* F*.*

Conditionnement et Indépendance

Prenons un exemple : un tireur lance une Flèche contre une cible. $\star$: Quelles chances a-t-il de toucher le centre de la cible ? Pour proposer un modèle probabiliste de cette expérience, nous avons besoins de plusieurs informations : objectif du tireur, son adresse au tir, la vitesse du vent, ...On peut reformuler la question $\star$ de la manière suivant : $\star - a$“ Quelle est la probabilité d'atteindre le centre de la cible sachant c'est un excellent tireur ?” où $\star - b$“ Quelle est la probabilité d'atteindre le centre de la cible, sachant que le tireur est très maladroit ?” . L'information *a priori* sur la qualité du tireur peut modifier sensiblement l'estimation de cette probabilité.

Cette idée d'*information a priori* est formalisée dans la Théorie des Probabilité par l'idée de **Conditionnement**. Lorsque l'information a priori sur un phénomène n'influe pas sur les résultats d'un autre phénomène, on dit qu'ils sont **indépendants**.

Définition 2.7 *Probabilité conditionnelle*
Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Soit* $A \in \mathcal{F}$ *un évènement fixé tel que* $\mathbb{P}(A) = 0$. *La fonction*

$$\mathbb{P}(\cdot|A): \ B \in \mathcal{F} \mapsto \mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, *appelée la probabilité conditionnelle sachant* A.

Proposition 2.4 *Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Soient* $A, B \in \mathcal{F}$ *deux évènements de probabilités non nulles. Alors les trois égalités suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

Définition 2.8 *Soit un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Soient* A *et* B *deux évènements de probabilité non nulle. On dit que* A *et* B *son indépendants si :* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2.3 Variables aléatoires réelles

Dans toute cette section on considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On rappelle que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 2.5 (Tribu engendrée par une fonction) *Soit X une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\sigma(X)$ la famille*

$$\sigma(X) \quad = \quad \left\{X^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$$

Cette famille est une tribu, elle est appelée la tribu engendrée par X.

Définition 2.9 (Variable aléatoire réelle) *Soit $X : \ \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que X est une variable aléatoire réelle, en abrégé v.a.r., sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si la tribu engendrée par X est plus petite que $\mathcal{F}$: $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$.*

Exemple 2.1 Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $A \in \mathcal{F}$ un évènement. Alors, l'indicatrice de A, notée $\mathbf{1}_A$ et définie par : $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon, est une variable aléatoire.

La Proposition suivante est fort utile, elle donne deux moyens pur vérifier si une fonction est une variable aléatoire.

Proposition 2.6 (Caractérisation des v.a.r)

1. *Une fonction $X : \ \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle si et seulement si : $\forall a \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.*
2. *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires et $f : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ est une variable aléatoire.*

Proposition 2.7 *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires. Alors chacune des fonctions suivantes est une variable aléatoire*

1. $M_N : \ \omega \mapsto \max_{1 \leq n \leq N} X_n(\omega)$ *on note aussi :* $M_N = \max_{1 \leq n \leq N} X_n$
3. $\mu_N : \ \omega \mapsto \min_{1 \leq n \leq N} X_n(\omega)$ *on note aussi :* $\mu_N = \min_{1 \leq n \leq N} X_n)$
2. $M : \ \omega \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)$ *on note aussi :* $M = \sup_n X_n$
4. $\mu : \ \omega \mapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)$ *on note aussi :* $\mu = \inf_n X_n$
5. $Z : \ \omega \mapsto \lim_{n \to n} X_n(\omega)$ *on note aussi :* $Z = \lim_n X_n$

Définition 2.10 *Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

1. *On dit que X et Y sont égales partout sur Ω si : $X(\omega) = Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
2. *On dit que X et Y sont égales presque sûrement et on écrit $X = Y \ \mathbb{P} - a.s.$ si : $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \neq Y(\omega)\}) = 0$.*

2.4 Loi d'une variable aléatoire

Définition 2.11 *Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On appelle loi de X la mesure de probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $\mathbb{P}_X : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{P}(X^{-1}(A))$.*

Notations : On utilise souvent les notions

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A) \ = \ \mathbb{P}(\{X \in A\}) \ &:= \ \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}_X(A) \\ \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \ &:= \ \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) \ = \ \mathbb{P}(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)) \end{aligned}$$

D'une manière générale, on utilise la notion $\mathbb{P}(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \cdots, X_n \in A_n)$ pour désigner $\mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \le i \le n} X_i^{-1}(A_i)\right)$.

Définition 2.12 (Egalité en Loi) *Soit X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Y une v.a.r sur l'espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$. On dit que X et Y sont égales en loi, et on note $X \overset{loi}{=} Y$, si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.*

Remarque 2.2 Selon cette définition, deux variables aléatoires peuvent être égales en Loi, sans nécessairement être définies sur le même espace de probabilité. Ainsi, nous pouvons parler de loi d'une variable aléatoire sans nécessairement préciser sur quel espace de probabilité elle est définie.

Définition 2.13 (Fonction de répartition) *Soit X une v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction*

$$F_X : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) \ = \ \mathbb{P}(\{X \le x\}) \ .$$

Théorème 2.3 *La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X est : à valeur dans $[0,1]$, croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et limitée à gauche en tout point. Elle tend vers 0 en $+\infty$. Elle caractérise la loi de X : $F_X = F_Y$ si et seulement si $X \overset{loi}{=} Y$.*

2.5 Exemples fondamentaux de lois de probabilité

Variables aléatoires discrètes

Définition 2.14 *Une v.a.r. X est dite discrète, si l'ensemble image de X est au plus dénombrable.*

Voici quelques lois usuelles de v.a.r. discrètes

Définition 2.15 (Loi de Bernouilli) *On dit que X suit la loi de Bernouilli de paramètre p, où $p \in [0,1]$, si elle ne prend que les valeurs 0 ou 1 et : $\mathbb{P}_X(1) = p$, $\mathbb{P}_X(0) = 1-p$. On note : $X \sim \mathcal{B}(p)$*

Définition 2.16 (Loi uniforme sur un ensemble fini) *On dit que X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_n\}$ si X est à valeurs dans $\{x_1, \cdots, x_n\}$*

$$\mathbb{P}_X(x_k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Définition 2.17 (loi Binomiale) *On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si X est à valeurs dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ et*

$$\mathbb{P}_X(k) = \mathrm{C}_k^n \, p^k (1-p)^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \, p^k (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

On note : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition 2.8 (loi de Bernouilli et loi Binomiale) *On considère n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ elles sont supposées indépendantes et suivre chacune la loi de Bernouilli de paramètre p. Soit S la variable aléatoire définie par $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On peut montrer que $S \sim \mathcal{B}(n, p)$.*

Définition 2.18 (Loi géométrique) *On dit que la variable aléatoire discrète X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$*

$$\mathbb{P}_X(k) = (1-p)^{k-1} p \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

On note : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Définition 2.19 (Loi de Poisson) *Soit une variable aléatoire discrète X de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que la variable aléatoire discrète X suit la loi de Poissons de paramètre $\lambda > 0$ si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et*

$$\mathbb{P}_X(k) \quad = \quad e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

On note : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Loi de probabilité à densité

Définition 2.20 (Densité de probabilité) *Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée densité de probabilité si elle est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ avec*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \ . \tag{2.1}$$

Dans tous les exemples que nous allons considérer dans ce cours, les *densité de probabilité* f seront des fonctions continues ou continues par morceaux. Dans ce cas, l'intégrale (2.1) est à prendre au sens de *intégrale de Reimann*.

Définition 2.21 (Loi à densité) *Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbb{P}_X$. On dit que X suit une loi de densité f s'il existe une densité de probabilité f telle que*

$$\mathbb{P}_X(]a,b[) \quad = \quad \int_a^b f(x)dx \quad \textit{pour tout } a \leq b \in \mathbb{R} \ .$$

Exemples de densités de probabilité

densité de la loi uniforme sur [a,b]	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{]a,b[}(x), \ a \leq b \in \mathbb{R}$
densité de la loi de Cauchy standard]	$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$
densité de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$	$f(x) = \theta \exp\{-\theta x\}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x), \ \theta > 0$
densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Densité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que X admet une densité de probabilité f. Sa fonction de réparation est alors donnée par

$$F_X(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ .$$

Proposition 2.9 *Soit X une variable aléatoire qui admet une densité f. Alors*

1. *sa fonction de répartition, F_X, est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}_X(\{x\}) = 0$ pour tout x,*
2. *la fonction F_X est dérivable en tout point x où f est continue, et $F'_X(x) = f(x)$.*

Réciproquement, si la fonction de répartition d'une variable aléatoire est continue partout et dérivable par pourceaux, alors X admet une densité f donnée par : $f(x) = F'_X(x)$.

Changement de variable

Théorème 2.4 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\phi : U \to V$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_{\Phi(U)} f(t)dt \quad = \quad \int_U f \circ \phi(x)|\phi'|(x)dx$$

pour toute fonction f telle que l'intégrale de gauche est bien définie.

Proposition 2.10 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ouvert U et $\phi : U \to V$ une fonction bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ dont la réciproque ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que X admet une densité f_X, alors la variable aléatoire $Y = \phi \circ X$ admet une densité f_ϕ donnée par*

$$f_\phi(x) \quad = \quad \mathbf{1}_{\phi(U)}(x) f \circ \phi^{-1}(x)|\frac{d}{dx}\phi^{-1}|(x)$$

2.6 Espérance et moments d'ordre supérieurs

> "La probabilité des évènements sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions : il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que probables. Cet avantage dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir" Pierre Simon Laplace"

Espérance des v.a.r. discrètes

Définition 2.22 (Espérance) *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_i, \in I\}$. Si X vérifie :*

$$\sum_{i \in I} |x_i| \mathbb{P}_X(x_i) \quad < \quad +\infty$$

alors on dit qu'elle admet une espérance. On appelle espérance mathématique *de X et on note, $\mathbb{E}[X]$, le réel défini par*

$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \sum_{i \in I} x_i \, \mathbb{P}_X(x_i) \; .$$

Proposition 2.11 (Linéarité de l'espérance) *Soient X et Y deux variables aléatoires qui admettent des espérances. Soient α et β deux réels donnés. Alors la variable aléatoire $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et on a*

$$\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right] \quad = \quad \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y] \; .$$

Proposition 2.12 (Monotonie de l'Espérance) *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance. Si $X \leq Y$ $\mathbb{P} - a.s.$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.*

Espérance d'une variable aléatoire réelle positive

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. On peut associer à X la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k2^{-n} & \text{si } \; X(\omega) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[, k \leq n2^n - 1 \\ n & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.2}$$

Pour tout n, X_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathcal{X}_n := \{k2^{-n},\ 0 \leq k \leq n2^{-n} - 1\}$. son espérance est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= \sum_{k=0}^{2^n-1} k2^{-n}\mathbb{P}_{X_n}(k2^{-n}) + n\mathbb{P}_{X_n}(n) \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} k2^{-n}\mathbb{P}_X([k2^{-n},(k+1)2^{-n}[) + n\mathbb{P}_X([n,+\infty[)
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $X_{n+1} \geq X_n$, ce qui entraine que $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels positifs. Elle est donc convergente

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[X_n\right] \ \in \ \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\ . \tag{2.3}$$

Définition 2.23 *Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Soit (X_n) la suite de variables aléatoires définies par (2.2). Si la suite $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réels $\ell \in \mathbb{R}_+$, alors on dit que X admet une espérance. L'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$ est :*

$$\mathbb{E}[X] \ := \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n]\ .$$

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$

Commençons par remarquer que toute variable aléatoire X on a

$$X = X^+ - X^-,\ |X| = X^+ + X^- \quad \text{où} \quad X^+ := \max\{0,X\},\ X^- := -\min\{0,X\}$$

Définition 2.24 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $|X|$ admet une espérance , alors on dit que X admet une espérance. L'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$ est :*

$$\mathbb{E}[X] \ := \ \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$$

Propriétés de l'Espérance

On note $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ou plus simplement L^1, l'ensemble des variables aléatoires qui admettent une espérance.

Proposition 2.13 *L'ensemble L^1 est un espace vectoriel. L'application $\mathbb{E}: \ L^1 \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes*

$$\textit{Linéarité}: \quad \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[Y], \ \forall X, Y \in L^1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

$$\textit{Monotonie}: \quad \textit{si } X \leq Y \ \mathbb{P} - a.s., \ \textit{alors } \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y] \tag{2.5}$$

Proposition 2.14 *Soit X une variable aléatoire à valeurs positives telle que $\mathbb{E}[X] = 0$, alors $X = 0$ $\mathbb{P} - a.s.$.*

Espérance d'une variable aléatoire à densité

Proposition 2.15 *Soit X une variable aléatoire qui a une densité de probabilité f. Alors X admet une espérance si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \quad < \quad \infty$$

Dans ce cas l'espérance de X est égale à

$$\mathbb{E}[X] \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \ .$$

Théorème 2.5 *Soit X une variable aléatoire qui a une densité f. Soit $h: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. La variable aléatoire $h(X)$ est dans L^1 si et seulement si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| f(x) dx \quad < \quad +\infty \ .$$

Dans ce cas

$$\mathbb{E}[h(X)] \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

Moment d'ordre 2 et variance d'une variable aléatoire

Définition 2.25 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si X^2 admet une espérance. Alors :*

$$\begin{array}{rl} \textit{Le moment d'ordre 2 de } X \textit{ est} & \mathbb{E}[X^2] \\ \textit{la variance de } X \textit{ est} & \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{array}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. Remarquons que

$$|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$$

ce qui implique que la variable aléatoire XY admet une espérance. Nous avons alors la définition suivante :

Définition 2.26 *Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. On définit alors la covariance de X et Y, notée $Cov(X,Y)$, par :*

$$Cov(X,Y) \quad := \quad \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \, .$$

Les moments d'ordre supérieur

D'une manière générale, nous pouvons définir les moments d'ordre k pour $k \geq 1$:

Définition 2.27 *Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{X} = \{x_i, \in I\}$. On dit que X admet un moment d'ordre k si la variable aléatoire X^k admet une espérance. Son moment d'ordre k est égal à $\mathbb{E}[X^k]$. On note $L^k(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ou plus simplement L^k , l'ensemble des variables aléatoires qui ont un moment d'ode k.*

Proposition 2.16 *Soit k un entier supérieur ou égal à 1. L'ensemble L^k est un espace vectoriel. De plus $L^{k+1} \subset L^k$.*

2.7 Vecteurs aléatoires

Dans cette section, nous allons introduire la notion de *vecteur aléatoire*, on dit également *variable aléatoire multidimensionnelle*. La notion de vecteur aléatoire apparait naturellement lorsque l'on cherche à modéliser un phénomène caractérisé par plusieurs *variables d'états*. Observer et modéliser leur évolution *conjointe* recèle, en général, plus d'informations que le fait d'observer et de modéliser chacune des composantes indépendamment des autres. Nous allons introduire les notions de *loi jointe* de *corrélation* qui décrivent la structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires entre elles.

Définition 2.28 *Vecteur aléatoire Un vecteur aléatoire d-dimensionnel sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est une fonction :* $X = (X^1, \cdots, X^d)' : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *telle que pour tout* $i = 1, \cdots, d$*, la composante* X^i *est une variable aléatoire.*

Vecteur Aléatoire à densité

Définition 2.29 *Vecteur aléatoire à densité Soit* $X = (X^1, \cdots, X^d)'$ *un vecteur aléatoire. On dit que* X *admet une densité de probabilité s'il existe une fonction* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*, appelée densité de* X*, telle que*

1. f *est à valeurs positives*
2. $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^1, \cdots, x^d)dx^1 \cdots dx^d = 1$
3. $\mathbb{P}(X^1 \leq x^1, \cdots, X^d \leq x^d) = \int_{-\infty}^{x^1} \cdots \int_{-\infty}^{x^d} f(u^1, \cdots, u^d)du^1 \cdots du^d$

Définition 2.30 *Densité marginale Soit* $X = (X^1, \cdots, X^d)$ *un vecteur aléatoire qui admet une densité de probabilité* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*. Alors chacune des composantes* X^i *admet une densité* $f^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$f^i : y \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^1, \cdots, x^{i-1}, y, x^i, \cdots, x^d)$$

Exemple 2.2 *Loi Gaussienne* Soit $X = (X^1, \cdots, X^d)'$ un vecteur aléatoire. On dit que X suite la loi Gaussienne de paramètres $m \in \mathbb{R}^d$ et $\Sigma \in \mathbb{M}(d, d)$ si et seulement si X admet la densité de probabilité

$$f(x) \quad = \quad (2\pi)^{-d/2} (|\det(\Sigma)|)^{-1/2} \exp\left\{-(x-m)'\Sigma^{-1}(x-m)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d .$$

Changement de Variables

Définition 2.31 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\phi : (x,y) \in U \to \phi(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$*. Ecrivons* $\phi = (\phi_1, \phi_2)$*. La différentielle de* ϕ *est la fonction matricielle*

$$D\phi = \begin{pmatrix} \partial_x \phi_1 & \partial_y \phi_1 \\ \partial_x \phi_2 & \partial_y \phi_2 \end{pmatrix}$$

On appelle Jacobien de ϕ*, et on note* J_ϕ*, le déterminant de cette matrice*

Théorème 2.6 *Soit* U *et* V *deux ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\phi : U \to V$ *une fonction bijective de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors*

$$\int_{\phi(U)} f(s,t)dsdt = \int_U f \circ \phi(x,y)|J_\phi|(x,y)dxdy$$

pour toute fonction f *telle que l'intégrale de gauche est bien définie.*

Proposition 2.17 *Soit* (X,Y) *un couple de variables aléatoires à valeurs dans un ouvert* U*. Soit* $\phi : U \to V$ *une application bijective de classe* $\mathcal{C}^1$ *dont l'application réciproque est de classe* $\mathcal{C}^1$*. On suppose que* (X,Y) *admet la densité* $f_{X,Y}$*. Alors le couple* $\phi(X,Y)$ *admet la densité*

$$f_\phi(x,y) = f_{X,Y} \circ \phi^{-1} |J_{\phi^{-1}}| \mathbf{1}_{\phi(U)}$$

Moments d'un vecteur aléatoire

Définition 2.32 *Espérance*
Soit $X = (X^1, \cdots, X^d)'$ *un vecteur aléatoire. Si chacune des composantes* X^i *admet un espérance, nous pouvons définir l'espérance de* X *comme étant le vecteur :* $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X^1], \cdots, \mathbb{E}[X^d])$*.*

Définition 2.33 *Matrice de covariance Soit* $X = (X^1, \cdots, X^d)'$ *un vecteur aléatoire. Si chacune des composantes* X^i *admet un moment d'ordre 2, nous pouvons définir la matrice de covariance de* X*, notée* C_X*, comme la matrice de taille* $d \times d$ *définie par*

$$C_X = (c_{i,j})_{1 \le i,j \le d} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = cov(X^i, X^j)$$

Proposition 2.18 *La matrice de covariance,* C_X*, d'un vecteur aléatoire* X *est symétrique et positive, c'est à dire :* $x'C_X x \ge 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*.*

2.8 Indépendance des variables aléatoires

Définition 2.34 *Deux variables aléatoires réelles, X_1 et X_2, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dites indépendantes si*

$$\mathbb{P}(\{X_1 \in A_1\} \cap \{X_2 \in A_2\}) = \mathbb{P}_{X_1}(A_1)\mathbb{P}_{X_2}(A_2) \quad \textit{pour tout } A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Définition 2.35 *Une suite $X_1, \cdots, X_n$ de variables aléatoires sont dites mutuellement indépendantes si*

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in An) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}(A_i) \textit{ pour tout } A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Proposition 2.19 *Soit $X_1, \cdots, X_n$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chacune des variables aléatoires X_i admet un moment d'ordre 2. Alors*

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

Proposition 2.20 *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire admettent une densité $f(x, y)$. On note f_X et f_Y les densités marginales par rapport à la première et à la deuxième variable. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.*

2.9 Loi conditionnelle et Espérance conditionnelle

Définition 2.36 *Cas des variables aléatoires discrètes Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs discrètes $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}_Y(y) > 0$.* **1.** La loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ *est la mesure de probabilité, notée $\mathbb{P}_{X|Y=y}$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par*

$$\mathbb{P}_{X|Y=y}(A) = \mathbb{P}(X \in A | Y = y) \; .$$

2. *L'espérance conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est définie par*

$$\mathbb{E}[X|Y = y] \quad = \quad \sum_{y_i} x \mathbb{P}_{X|Y=y}$$

qui est bien définie dès que X est à valeurs positives ou $\sum_{y_i} |x| \mathbb{P}_{X|Y=y} < +\infty$. **3.** *Si la fonction $y \mapsto \mathbb{E}[X|Y = y]$ est définie pour tout y tel que $\mathbb{P}_Y(y) > 0$, alors on peut définir la variable aléatoire $\mathbb{E}[X|Y]$ par*

$$\mathbb{E}[X|Y] \quad = \quad \mathbb{E}[X|Y = y_i] \;\; sur \;\; \{Y = y_i\}, \; i = 1, \cdots, n \; .$$

Définition 2.37 *Cas des variables aléatoires discrètes Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que le couple (X, Y) admet la densité de probabilité $f_{X,Y}$.*

1. *On appelle densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ la fonction*

$$f_{X|Y=y}(x) \quad = \quad \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $f_Y(y) > 0$.

2. *On appelle espérance conditionnelle de X sachant $Y = y$ la quantité*

$$\mathbb{E}[X|Y = y] \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} x \, f_{X|Y=y}(x) dx$$

qui est bien définie pour tout y tel que $f_Y(y) > 0$.

3. *On appelle espérance conditionnelle de X sachant Y la variable aléatoire, notée $\mathbb{E}[X|Y]$ et définie par*

$$\mathbb{E}[X|Y] = u(Y) \quad où \quad u: \; y \mapsto \mathbb{E}[X|Y = y] \;\; si \; f_Y(y) > 0 \; et \; 0 \; sinon.$$

2.10 Convergence de variables aléatoires

Dans cette section nous considérons une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de cette suite lorsque $n \to \infty$. Il se trouve que dans le cas de suite de variables aléatoires plusieurs notions de *convergence* peuvent êtres introduites.

Définition 2.38 *Convergence presque sure*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge $\mathbb{P}$-presque surement vers X si

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : \quad \lim_n X_n(\omega) = X(\omega)\}\Big) \quad = \quad 1$$

On écrit alors : $X_n \to X \ \mathbb{P} - p.s.$

Définition 2.39 *Convergence en Probabilité*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X si

$$\lim_n \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\}\right) \quad = \quad 0 \quad \forall \varepsilon > 0\ .$$

On écrit alors : $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$.

Définition 2.40 *Convergence en moyenne*
On suppose que chacune des variables aléatoires X_n est dans L^1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $X \in L^1$. On dit que la suite (X_n) converge en moyenne vers X si

$$\lim_n \mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \quad = \quad 0\ .$$

On écrit alors : $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Définition 2.41 *Convergence dans L^p*
Soit $p \geq 1$. On suppose que chacune des variables aléatoires X_n est dans L^p. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $X \in L^p$. On dit que la suite (X_n) converge dans L^p vers X si

$$\lim_n \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \quad = \quad 0\ .$$

On écrit alors : $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Définition 2.42 *Convergence en Loi*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\phi(X_n)\right] \quad = \quad \mathbb{E}[\phi(X)] \quad \textit{pour tout fonction bornée } \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ .$$

On écrit alors : $X_n \xrightarrow{loi} X$.

Remarque 2.3 Ces quatre modes de convergence ne sont pas équivalents. Dans la proposition suivante nos explorons quelques liens entre eux.
Il est à noter que dans le cas de la convergence en loi, seule les lois de probabilité comptes, les variables aléatoires ne doivent pas nécessairement être définies sur le même espace de probabilité (seul les mesures de probabilités sur l'espace des réalisations compte)

Proposition 2.21 *Les implications suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned} X_n \to X \ \mathbb{P}-p.s. \quad &\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{loi} X \\ X_n \xrightarrow{L^1} X \quad &\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{loi} X \end{aligned}$$

Lois des grands nombres

Théorème 2.7 (La loi faible des grands nombres) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi de probabilité. On suppose de plus qu'elles admettent un moment d'ordre 2 : $\mathbb{E}[(X_1)^2] < \infty$. Alors la suite (M_n) définie par : $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge en probabilité vers (la variable aléatoire constante) $\mathbb{E}[X_1]$:*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}} \quad \mathbb{E}[X_1] \ .$$

Théorème 2.8 (Loi forte des grands nombres) *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi de probabilité. On suppose de plus qu'elles admettent un moment d'ordre 1 : $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Alors la suite (M_n) définie par : $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ converge presque surement vers (la variable aléatoire constante) $\mathbb{E}[X_1]$:*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \to \quad \mathbb{E}[X_1] \ \mathbb{P}-p.s. \ .$$

2.11 Théorème Limite Centrale

Théorème 2.9 *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant la même loi de probabilité. On suppose de plus qu'elles admettent un moment d'ordre 2 :* $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$*. On note* $\mu := \mathbb{E}[X_1]$*,* $\sigma := \sqrt{Var(X_1)}$*. Alors la suite* (S_n) *définie par :* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *vérifie*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1) \; .$$

2.12 Exercices

Modélisation

Exercice 2.1 *Jeux de dès*
Proposez dans chacun des cas suivants un modèle probabiliste du jeu :

1. On considère le jeu qui consiste à lancer six fois de suite un dès équilibré à six faces et à compter le nombre d'apparition de 1.
2. On considère le jeu qui consiste à lancer un dès équilibré à six faces jusqu'à l'apparition du premier 6.

Exercice 2.2 *Un exemple financier*
Un investisseur s'intéresse à l'évolution du prix d'une action. Son prix aujourd'hui vaut 100 euros. En se basant sur l'étude des historiques du prix de cette action et sur des analyses financières du marché, notre investisseur prévoit que tous les mois, le prix de cette action a autant de chances de diminuer ou d'augmenter de 10euros.
Proposez un modèle probabiliste pour décrire l'évolution du prix de cette action sur les 3 prochains mois.

Exercice 2.3 *L'univers de la Bibliothèque de Babel*
La Bibliothèque est une sphère dont le centre véritable est un hexagone. Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères, chaque étagère comprend trente deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre cent dix pages, chaque page quarante lignes et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. Tous les livres, comportent des éléments égaux : l'espace le point, la virgule, les 22 lettres de l'alphabet. Il n'y a pas dans cette vaste bibliothèque deux livres identiques. La bibliothèque est *totale*. Elle contient tous les livres.

1. Combien de livres contient la bibliothèque de Babel ?
2. Quelle est la probabilité de tirer au hasard 'Hamlet' ?

Le langage des probabilités

Exercice 2.4 *Le langage des probabilités*
Soient A, B et C trois évènements. Exprimez, en utilisant le langage de la théorie des ensembles, chacun des évènements suivants :

- A et C se produisent, mais non B
- Les trois évènements A, B et C se produisent
- Au moins un de ces trois évènements se produit
- Aucun de ces trois évènements ne se produit
- Un évènement au plus se produit

Notion de tribu

Exercice 2.5 *La tribu grossière et la tribu discrète*
Soit Ω un ensemble non vide quelconque.
1. Vérifiez que $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu. Elle est appelée *la tribu grossière de* Ω.
2. Vérifiez que l'ensemble de toutes les parties de Ω, notée $\mathcal{P}(\Omega)$, est une tribu. Elle est appelée *la tribu discrète de* Ω.

Exercice 2.6 *Intersection de tribus*
Vérifiez que l'intersection de deux tribus est encore une tribu.

Mesure de probabilité

Exercice 2.7 Soit $\Omega = \{0,1\}^4 = \{(x_1, \cdots, x_4),\ x_i \in \{0,1\}\}$. On définit l'application

$$p:\ (x_1, \cdots, x_4) \in \Omega \mapsto \prod_{i=1}^{4} \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i}$$

où π est un réel donné tel que $\pi \in]0,1[$.
Vérifiez que l'application p permet de définir une mesure de probabilité sur Ω.

Exercice 2.8 Soit $\Omega = \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$G:\ x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1-x^{-2}}{1-(1/4)} & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Montrez que G est une fonction de répartition.
Quelle est la mesure de probabilité associée à G ?

Exercice 2.9 On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements : $A_n \in \mathcal{F}$.

1. On suppose que la suite (A_n) est croissante, c'est à dire : $A_n \subset A_{n+1}$ montrez que

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. On suppose que (A_n) est décroissante, c'est à dire : $A_{n+1} \subset A_n$ montrez que

$$\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Exercice 2.10 On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $(A_n)_n$ une suite d'évènements tels que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ pour tout n. Montrez que : $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1$.

Evènements indépendants

Exercice 2.11 soient A et B deux évènements indépendants. Montrez que A^c et B sont indépendants. Montrez que A^c et B^c sont indépendants.

Exercice 2.12 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
1. Déterminer la probabilité p_n qu'aucun des n premiers évènements ne se réalise.
2. Montrez que p_n tend vers 0 (on pourra utiliser l'inégalité $1-t \leq e^{-t}$).
3. En déduire que presque surement au moins un des évènements A_n se produit.

Probabilités conditionnelle

Exercice 2.13 *Formule du double conditionnement* Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A\cap B) > 0$. Montrez que pour tout évènement C

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) \quad = \quad \mathbb{P}(C|A\cap B)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)\ .$$

Exercice 2.14 *Formule de Bayes* Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{1\leq n\leq N}$ une suite d'évènements deux à deux disjoints et tels que : $\bigcup_n A_n = \Omega$. On suppose de plus que pour tout n : $\mathbb{P}(A_n) > 0$. Vérifiez que

$$\mathbb{P}(B) \quad = \quad \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) \quad \forall B \in \mathcal{F}\ .$$

Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Vérifiez que

$$\mathbb{P}(A_n|B) \quad = \quad \frac{\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}{\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)}$$

Exercice 2.15 Une maladie grave est présente dans la population dans la proportion de 1/10000. Un grand laboratoire pharmaceutique a élaboré un test de dépistage pour cette maladie : si la personne est malade, le test est positif à 99%, si la personne n'est pas malade le test est positif à 1%.
Déterminez : la probabilité qu'une personne soit malade quand le test est positif. Que pouvez-vous en conclure quant à la performance de ce test.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 2.16 On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. Soit X_n le nombre de piles obtenu au cours des n premiers lancers.
1. Trouvez la loi de X_n.
2. Soit $Y : \ \omega \mapsto \inf\{n \geq 1 : \ X_n > 0\}$. Que rerésente Y ? Quelle est sa loi ?

Exercice 2.17 Pour un examen, chaque candidat doit remplir un questionnaire de 40 questions. Pour chaque question : 4 réponses possibles sont proposées, une seule étant juste.
Un candidat totalement ignorant du sujet, décide de répondre au hasard. On note S le nombre de bonnes réponses de ce candidat.
1. Proposez une modèle probabiliste pour décrire cette situation.
2. Déterminez la loi de S et calculez $\mathbb{P}(S \geq 36)$.

Exercice 2.18 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X admet une espérance. Montrez que

$$\mathbb{E}[X] \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \ .$$

Exercice 2.19 Calculez l'espérance et la variance pour chacune des lois suivantes : (i) loi de Bernouilli de paramètre p ; (ii) loi binomiale de paramètres n et p ; (iii) loi géométrique de paramètre p ; (iv) loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 2.20 Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p. Justifiez que $Y = 1/(1+X)$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et calculez $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 2.21 Soit Y une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On lui associe la variable aléatoire

$$Z \ = \ \begin{cases} Y/2 & \text{si } Y \text{ est pair} \\ (1-Y)/2 & \text{si } Y \text{ est impair} \end{cases}$$

Quelles sont les valeurs possibles de Z ? Déterminez la loi de Z.

Exercice 2.22 Le nombre de voitures, X, qui passent par une rue xxx durant une tranche horaire donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ.
1. Calculez la probabilité qu'aucune voiture ne passe en une heure
2. Calculez la probabilité qu'au moins 5 voitures passent en 1 heure
3. Le nombre de voitures, Y, qui passent par la rue yyy durant la même tranche horaire suit une loi de Poisson de paramètre μ. Les deux rues xxx et yyy se raccordent pour

aboutir à la voie $xyxy$. On note $S = X + Y$ le nombre de voitures sur la voie $xyxy$ après le raccordement. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de S ?

Variables aléatoires réelles

Exercice 2.23 On considère la loi exponentielle de paramètre λ, définie par la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0$.

1. Vérifiez qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. Calculez son espérance et sa variance.

3. Montrez que la loi exponentielle *est sans mémoire*, c'est à dire

$$\mathbb{P}(X \geq a + b | X \geq b) = \mathbb{P}(X \geq a) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

4. Réciproquement, montrez que toute loi à densité sans mémoire est exponentielle.

Exercice 2.24 Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X admet une densité f_X. Soit $\Phi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que Φ' ne s'annule qu'en un ensemble fini Δ de points de $\mathbb{R}$. Montrez que $Y = \phi \circ X$ est une variable aléatoire qui admet pour densité f_Y donnée par

$$f_Y(y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{f_X(\phi^{-1}(y))}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} & \text{si } y \in \phi(\mathbb{R} \setminus \Delta) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.25 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ où $m_1 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_1 > 0$.

1. Calculer l'espérance et la variance X.

2. On suppose que Y suit la loi normale $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ où $m_2 \in \mathbb{R}$ et $\sigma_2 > 0$. On suppose de plus que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Quelle est alors la loi de $X + Y$?

Exercice 2.26 Soient a et α deux paramètres strictement positifs. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Pareto de paramètres (a, α) si X a une densité de probabilité donnée par

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{\alpha}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

1. Montrez que f est bien une densité de probabilité.

2. Déterminez la fonction de répartition de X.

3. Soit $y > 0$ fixé. Calculez $\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X > x + y | X > x)$?

4. Montrez que X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas, calculez $\mathbb{E}[X]$.
4. Montrez que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$. Dans ce cas, calculez $Var[X]$.

Exercice 2.27 *Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité*

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}|x| \exp\left\{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}\right\}$$

1. *Vérifiez que f est bien une densité de probabilité.*
2. *Calculez la loi de X et la loi de Y. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?*
3. *Est-ce que X et XY sont indépendantes ? Calculez la loi de XY.*
4. *Déterminez la loi de $X(1+Y)$*

Exercice 2.28 *Calcul de lois*
1. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = X^2$. Justifiez que Y est une variable aléatoire, déterminez sa loi et calculez son espérance.
2. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = |X|$. Justifiez que Y est une variable aléatoire, déterminez sa loi et calculez son espérance et sa variance.
3. Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \lambda X$ ou $\lambda > 0$. Justifiez que Y est une variable aléatoire, déterminez sa loi et calculez son espérance.

Exercice 2.29 La distance R entre le point d'impact de la flèche et le centre de la cible suit une loi de Rayleigh de densité

$$f_R(x) \quad = \quad A \exp\left\{-h^2x^2\right\} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

Ici h est un paramètre strictement positif fixé.
1. Exprimez A en fonction de h.
2. Déterminez l'abscisse x de densité maximale.
3. On pose $T = \exp(-R^2)$. Déterminez la loi de T.

Exercice 2.30 Soient λ et α deux réels strictement positifs, on appelle loi gamma de paramètres (λ, α) la loi dont la densité de probabilité est

$$\gamma(x; \lambda, \alpha) \quad = \quad \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x) \;\; \text{où} \;\; \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \, .$$

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi gamma de paramètres respectifs (λ, α_1) et (λ, α_2). Montrez que la loi de la variable aléatoire $X_1 + X_2$ est une loi gamma de paramètres $(\lambda, \alpha_1 + \alpha_2)$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donnez la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n$ définie par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Exercice 2.31 Soit Y une variable aléatoire de loi gamma $\Gamma(1, 1/2)$. On suppose que la loi conditionnelle de X sachant Y est une loi Gaussienne $\mathcal{N}(0, 1/2Y)$.
1. Calculez la loi du couple (X, Y).
2. Déterminez la loi conditionnelle de Y sachant X
3. Calculez $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 2.32 Soit (X, Y) un couple de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}\mathbf{1}_{0<x<y} .$$

1. Déterminez les lois de X et de Y.
2. Déterminez les lois conditionnelles de X sachant Y et de Y sachant X.
3. Calculez les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 2.33 Soit (X, Y) des variables i.i.d. de loi exponentielle. Déterminez la loi conditionnelle de X sachant $X + Y$

Convergence de variables aléatoires

Exercice 2.34 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$. Déterminez pour chacune des convergences suivantes à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ elle a lieu :
1. La suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. La suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 vers 0.
3. La suite $(\mathbf{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque surement vers 0.

Exercice 2.35 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire X. On suppose de plus qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_n| \leq M) = 1$ pour tout n. Montrez alors que (X_n) converge vers X en moyenne d'ordre q pour tout entier q.

Exercice 2.36 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernouilli de paramètre $x \in]0, 1[$.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrez que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right] = f(x)$$

2. en déduire qu'il existe une suite de polynôme qui converge simplement vers f.

Exercice 2.37 On jette n fois un dé et on note X_i le résultat du i-ème lancer. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculez la moyenne et la variance de X_1.

2. Quelle est la limite de S_n/n lorsque n tend vers l'infini.

3. Quelle est la loi limite de $\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{7}{2}\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2.38 Quotidiennement, 150 personnes retirent de l'argent à un guichet automatique donné. La somme moyenne demandée par chaque personne est de 30 euros avec un écart-type de 10 euros. Les sommes demandées sont supposées indépendantes et de même loi. Combien d'argent doit contenir l'automate en début de journée pour que, avec une probabilité supérieure à 0.95, les 150 personnes puissent retirer la somme qu'elles souhaitent ?

Exercice 2.39 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ_n. Etudiez les convergence en loi dans les trois cas suivants :

1. $\lim_n \lambda_n = \lambda > 0$

2. $\lim_n \lambda_n = +\infty$

3. $\lim_n \lambda_n = 0$

Bibliographie

[1] D. Foata and A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod, 2012.

[2] S. Méléard, *Introduction á la théorie et au calcul des probabilités*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Paris, 2010.

[3] G. Skandalis, *Topologie et analyse 3e année*.