

GRANDES DÉVIATIONS. EXAMEN FINAL (3H).

(English version on the back of the sheet)

Documents et appareils électroniques non autorisés. Toute réponse doit être justifiée et lisible. La qualité de la rédaction pourra être prise en compte dans la notation. Vous pouvez répondre en français ou en anglais. La terminologie utilisée est celle du cours.

Exercice 1. (Principe de grandes déviations et produit). Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces métriques. Soient $\{X_n\}_{n \geq 1}$ et $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement. On suppose que ces deux suites sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, qu'elles sont indépendantes entre elles (en tant que suites), et qu'elles vérifient un principe de grandes déviations (PGD) de vitesse n et de fonction de taux $I_X: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ et $I_Y: \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$ respectivement.

- (1) Montrer que la suite de variables aléatoires $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$ définies sur l'espace métrique produit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (muni de la topologie produit) vérifie un PGD dont on notera la fonction de taux $I_{X,Y}$. Identifier $I_{X,Y}$ en pensant à vérifier qu'il s'agit bel et bien d'une fonction de taux. On rappelle que les intersections finies de *cylindres* (ensembles de la forme $A \times B$ où A est un ouvert de $\mathcal{X}$ et B un ouvert de $\mathcal{Y}$) forment une base d'ouverts pour la topologie produit (i.e. tout ouvert de la topologie produit s'écrit comme réunion d'ouverts de cette base).
- (2) Montrer que si I_X et I_Y sont des *bonnes* fonctions de taux, alors $I_{X,Y}$ est également une *bonne* fonction de taux.
- (3) On suppose dans cette question que $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ (muni de la distance euclidienne) et que I_X et I_Y sont des *bonnes* fonctions de taux. Montrer que la suite $\{X_n Y_n\}_{n \geq 1}$ vérifie un PGD sur $\mathbb{R}$ dont on déterminera la fonction de taux.

Exercice 2. (Modèle de Curie-Weiss avec champ extérieur). Soit $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que $\mathbb{P}(\sigma_1 = 1) = \mathbb{P}(\sigma_1 = -1) = 1/2$. La fonction de partition du modèle de Curie-Weiss pour un système de taille $n \geq 1$, de température inverse $\beta > 0$ et de champ extérieur $h \in \mathbb{R}$ est

$$Z_n^{\beta,h} = \mathbb{E}[\exp(H_n^{\beta,h})], \quad \text{où} \quad H_n^{\beta,h} := \frac{\beta}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_i \sigma_j + h \sum_{1 \leq i \leq n} \sigma_i.$$

- (1) Montrer que la magnétisation moyenne $M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i$ satisfait un principe de grandes déviations (PGD) sur $[-1, 1]$, de vitesse n et de fonction de taux:

$$I(m) := \frac{1}{2} \left[(1+m) \log(1+m) + (1-m) \log(1-m) \right].$$

- (2) Énoncer le lemme de Varadhan.
- (3) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\beta,h} = \sup_{m \in [-1,1]} \left\{ \frac{1}{2} \beta m^2 + h m - I(m) \right\},$$

- (4) Rechercher les maximiseurs (existence, nombre) dans la formule variationnelle ci-dessus. Que remarquez-vous ?

**LARGE DEVIATIONS.
FINAL EXAM (3H).**

(Version française au recto)

Documents and electronic devices are not allowed. Answers must be justified and readable. The quality of writing may be taken into account in the grading. You may answer in French or English. We use the same terminology as in class.

Exercise 1. (Large deviation principles and product). Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be two metric spaces. Let $\{X_n\}_{n \geq 1}$ and $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ be two sequences of random variables respectively valued in $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$. We assume these two sequences to be defined on a common probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, to be mutually independent (as sequences), and to satisfy a large deviation principle (LDP) with speed n and respective rate functions $I_X: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ and $I_Y: \mathcal{Y} \rightarrow [0, \infty]$.

- (1) Show that the sequence of random variables $\{(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$ defined on the product metric space $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ (equipped with the product topology) satisfies an LDP, the rate function of which shall be denoted $I_{X,Y}$. Identify $I_{X,Y}$ and check that this is indeed a rate function. We remind that finite intersections of *cylinder sets* (sets of the form $A \times B$ where A is an open set of $\mathcal{X}$ and B is an open set of $\mathcal{Y}$) constitute a topological basis for the product topology (i.e. every open set in the product topology writes as a union of open sets in that basis).
- (2) Show that if I_X and I_Y are *good* rate functions, then $I_{X,Y}$ is a *good* rate function as well.
- (3) We suppose in this question that $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathbb{R}$ (equipped with the Euclidian metric) and that I_X and I_Y are *good* rate functions. Show that the sequence $\{X_n Y_n\}_{n \geq 1}$ satisfies an LDP on $\mathbb{R}$ with a rate function to be determined.

Exercise 2. (Curie-Weiss model with external field). Let $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 1}$ be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables such that $P(\sigma_1 = 1) = P(\sigma_1 = -1) = 1/2$. The partition function of the Curie-Weiss model for a system of size $n \geq 1$, inverse temperature $\beta > 0$ and external field $h \in \mathbb{R}$ is

$$Z_n^{\beta,h} = E[\exp(H_n^{\beta,h})], \quad \text{where} \quad H_n^{\beta,h} := \frac{\beta}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sigma_i \sigma_j + h \sum_{1 \leq i \leq n} \sigma_i.$$

- (1) Show that the mean magnetization $M_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i$ satisfies a Large Deviation Principle on $[-1, 1]$ with speed n and rate function

$$I(m) := \frac{1}{2} \left[(1+m) \log(1+m) + (1-m) \log(1-m) \right].$$

- (2) State Varadhan's lemma.
- (3) Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Z_n^{\beta,h} = \sup_{m \in [-1,1]} \left\{ \frac{1}{2} \beta m^2 + h m - I(m) \right\},$$

- (4) Investigate the (existence and number of) maximizers in the variational formula above. What do you notice?