Cours de Processus à sauts
Master 2 MASEF et MATH
Université Paris-Dauphine

Examen
Lundi 9 Décembre 2019
2h - documents non autorisés

Exercice I

1. Rappeler la définition d'un processus de Lévy.

2. Déterminer si les lois suivantes sont infiniment divisibles : la loi de Poisson, la loi exponentielle, la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

3. Déterminer la solution de l'équation différentielle stochastique $dX(t) = X(t-)dN(t)$, $X(0) = 1$, où N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

4. Pour $\alpha \in (0, 1)$, on pose

$$\nu(dx) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} x^{-1-\alpha} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx \ .$$

   Vérifier que ν est une mesure de Lévy.

5. On considère le processus de Lévy X de triplet caractéristique $(b, 0, \nu)$ avec ν défini précédemment. Comment choisir b pour que X soit un subordinateur ? Déterminer alors $\mathbb{E}[X_1]$.

Exercice II

Soit $b \geq 0$ et soit ν une mesure sur $(0, \infty)$ telle que $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$. On pose

$$\eta(u) = ibu + \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1)\nu(dx) \ , \quad u \geq 0 \ .$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un processus de Lévy X de dimension 1 tel que pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[e^{iuX(1)}] = e^{\eta(u)} \ . \tag{1}$$

On introduit $\nu_\epsilon(dx) := \mathbf{1}_{(\epsilon,\infty)}(x)\nu(dx)$, et l'on définit η_ϵ en utilisant b et ν_ϵ.

1. Construire un processus de Lévy X_ϵ dont l'exposant caractéristique est donné par η_ϵ. Identifier sa loi.

2. Pour tout $t \geq 0$, montrer que $X_\epsilon(t)$ converge en loi quand $\epsilon \downarrow 0$ vers une variable aléatoire, que l'on notera $X(t)$.

3. Généraliser le résultat précédent aux marginales de dimensions finies : on notera $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ ces marginales.

4. Montrer que pour tout $s < t$, on a presque sûrement $X(s) \leq X(t)$. En déduire l'existence d'un processus de Lévy X vérifiant (1).

Exercice III

Soit X un processus de Lévy de dimension 1 partant de 0 au temps 0. On introduit son supremum courant :

$$\bar{X}_t := \sup_{s\in[0,t]} X_s \ , \quad t \geq 0 \ .$$

On introduit la variable aléatoire $G_1 := \inf\{t > 0 : X_t > 0\}$.

1. Montrer que $\bar{X}_t$ et $\bar{X}_t - X_t$ sont des v.a. positives pour tout $t \geq 0$.

2. Donner un exemple de processus de Lévy pour lequel $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 0$. Donner un exemple de processus de Lévy pour lequel $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 1$.

Dans la suite, on supposera que $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 1$. On introduit récursivement $G_n := \inf\{t > G_{n-1} : X_t > \bar{X}_{G_{n-1}}\}$. On admettra que tous les G_n, $n \geq 0$ sont des temps d'arrêt.

3. Montrer que presque sûrement pour tout $n \geq 1$, $X_{G_n} > \bar{X}_{G_{n-1}}$.

4. En déduire que presque sûrement pour tout $t \geq 0$, $\bar{X}_t \in \{X_{G_n} : n \geq 0\}$.

On considère également une v.a. τ de loi exponentielle de paramètre $q > 0$ indépendante de X.

5. Montrer que pour tout $\beta, \gamma > 0$ on a :

$$\mathbb{E}[e^{\beta \bar{X}_\tau + \gamma(\bar{X}_\tau - X_\tau)}] = q \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[e^{-qG_n + \beta X_{G_n}}]\, \mathbb{E}\Big[\int_0^{G_1} e^{-qs-\gamma X_s} ds\Big] \ .$$

6. En déduire que $\bar{X}_\tau$ est indépendante de $\bar{X}_\tau - X_\tau$.

Cours de Processus à sauts
Master 2 MASEF et MATH
Université Paris-Dauphine

Exam
Monday 9th December 2019
2h - no lecture notes allowed

Exercise I

1. Recall the definition of a Lévy process.
2. Are the following laws infinitely divisible: the Poisson law, the exponential law, the uniform law on $[-1,1]$?
3. Give explicitly the solution of the stochastic differential equation $dX(t) = X(t-)dN(t)$, $X(0) = 1$, where N is a Poisson process of intensity $\lambda > 0$.
4. For $\alpha \in (0,1)$, we set
$$\nu(dx) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} x^{-1-\alpha} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx \ .$$
Check that ν is a Lévy measure.
5. We consider the Lévy process X of characteristic triplet $(b, 0, \nu)$ where ν was defined previously. How to choose b for X to be a subordinator ? Then, compute $\mathbb{E}[X_1]$.

Exercise II

Let $b \geq 0$ and ν be a measure on $(0,\infty)$ such that $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\nu(dx) < \infty$. We set
$$\eta(u) = ibu + \int_{(0,\infty)} (e^{iux} - 1)\nu(dx) \ , \quad u \geq 0 \ .$$
The goal of this exercise is to show that there exists a Lévy process X in dimension 1 such that for all $u \in \mathbb{R}$
$$\mathbb{E}[e^{iuX(1)}] = e^{\eta(u)} \ . \tag{2}$$
We set $\nu_\epsilon(dx) := \mathbf{1}_{(\epsilon,\infty)}(x)\nu(dx)$, and we define η_ϵ similarly as η but with b and ν_ϵ.

1. Construct a Lévy process X_ϵ with characteristic exponent given by η_ϵ. Identify its law.

2. For $t \geq 0$, show that $X_\epsilon(t)$ converges in law as $\epsilon \downarrow 0$ to a random variable that we will denote $X(t)$.

3. Generalise the previous result to the finite dimensional marginals, that we will denote $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ for $0 < t_1 < \ldots < t_n$.

4. Show that for all $s < t$, almost surely $X(s) \leq X(t)$. Deduce the existence of a Lévy process X satisfying (2).

Exercise III

Let X be a Lévy process in dimension 1. We introduce its running maximum:

$$\bar{X}_t := \sup_{s \in [0,t]} X_s \ , \quad t \geq 0 \ .$$

We also define the random variable $G_1 := \inf\{t > 0 : X_t > 0\}$.

1. Show that $\bar{X}_t$ and $\bar{X}_t - X_t$ are non-negative random variables for all $t \geq 0$.

2. Give an example of a Lévy process for which $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 0$. Give an example of a Lévy process for which $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 1$.

In the sequel, we will assume that $\mathbb{P}(G_1 > 0) = 1$. Recursively, we define $G_n := \inf\{t > G_{n-1} : X_t > \bar{X}_{G_{n-1}}\}$. We take as granted that all the G_n, $n \geq 1$ are stopping times.

3. Show that almost surely for all $n \geq 1$, $X_{G_n} > \bar{X}_{G_{n-1}}$.

4. Deduce that almost surely for all $t \geq 0$, $\bar{X}_t \in \{X_{G_n} : n \geq 0\}$.

We also consider a r.v. τ of exponential law with parameter $q > 0$ independent of X.

5. Show that for all $\beta, \gamma > 0$ we have:

$$\mathbb{E}[e^{\beta \bar{X}_\tau + \gamma(\bar{X}_\tau - X_\tau)}] = q \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[e^{-qG_n + \beta X_{G_n}}] \, \mathbb{E}\Big[\int_0^{G_1} e^{-qs - \gamma X_s} ds\Big] \ .$$

6. Deduce that $\bar{X}_\tau$ is independent from $\bar{X}_\tau - X_\tau$.