

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1  
INSTITUT CAMILLE JORDAN - UMR 5208  
ÉCOLE DOCTORALE INFOMATHS

## THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : MATHÉMATIQUES

Sous la direction de **Nadine GUILLOTIN-PLANTARD**

# MODÈLE D'ACCROCHAGE DE POLYMÈRES EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE FAIBLEMENT CORRÉLÉ.

---

**Julien POISAT**

Soutenue publiquement le 16 mai 2012.

Composition du jury :

Rapporteurs :

**M. Frank DEN HOLLANDER**

Université de Leiden

**M. Yueyun HU**

Université Paris 13

Examineurs :

**M. Francis COMETS**

Université Paris 7

**Mme Nadine GUILLOTIN-PLANTARD**

Université Lyon 1

**M. Dimitri PÉTRITIS**

Université Rennes 1

**M. Christophe SABOT**

Université Lyon 1



# RÉSUMÉ DE LA THÈSE

## Modèle d'accrochage de polymères en environnement aléatoire faiblement corrélé.

Cette thèse est consacrée à l'étude du modèle d'accrochage en environnement faiblement corrélé. Le modèle d'accrochage s'applique à de multiples situations telles que la localisation d'un polymère au voisinage d'une interface unidimensionnelle, la transition de mouillage ou encore la dénaturation de l'ADN, le point commun étant la présence d'une transition entre une phase localisée et une phase délocalisée.

Nous commençons par donner un aperçu des résultats disponibles sur les courbes et exposants critiques pour le modèle homogène puis pour le modèle désordonné lorsque le désordre est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Dans ce dernier cas, nous donnons également une borne sur la courbe critique quenched à haute température, dans un régime où le désordre est dit pertinent.

Nous étudions ensuite le modèle d'accrochage désordonné dans le cas où le désordre est gaussien et les corrélations ont une portée finie, à l'aide de la théorie des processus de renouvellement markoviens. Nous donnons dans ce cas une expression de la courbe annealed à l'aide de la plus grande valeur propre d'une matrice de transfert ainsi que l'exposant critique annealed. Nous généralisons ensuite les critères de pertinence et de non pertinence du désordre prouvés dans le cas i.i.d.

Nous nous intéressons ensuite à des désordres dont les corrélations ont une portée de corrélation infinie. Dans un premier temps, nous généralisons la démarche utilisée dans le cas d'une portée de corrélations finie et obtenons le comportement critique annealed dans le cas d'un désordre gaussien sous des hypothèses de décroissance forte des corrélations. Nous utilisons pour cela les propriétés spectrales des opérateurs de transfert pour des décalages sur des suites d'entiers et des potentiels à variations sommables. Dans un deuxième temps, nous donnons quelques résultats dans le cas où le désordre est donné par une chaîne de Markov.

**Mots-clés :** modèle d'accrochage, polymères, localisation, transition de phase, critère de Harris, corrélations, renouvellement, courbe critique, exposant critique, annealed, quenched, répliques, moments fractionnaires, Ruelle-Perron-Frobenius, opérateurs de transfert, décalage de type infini, processus avec mémoire.

## Pinning model with weakly correlated disorder.

In this dissertation we study the pinning model with weakly correlated disorder. The pinning model applies to various situations such as localization of a polymer near a one-dimensional interface, wetting transition and DNA denaturation, which all display a transition between a localized phase and a delocalized phase.

We start by giving a survey of the available results concerning critical points and exponents, first for the homogeneous setup and then for the inhomogeneous one, in the case when disorder is given by a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables. In the latter case, we also provide a high-temperature bound on the quenched critical curve in a case of relevant disorder.

We then study the random pinning model when disorder is gaussian and has correlations with finite range, using the theory of Markov renewal processes. We express the annealed critical curve in terms of the largest eigenvalue of a transfer matrix and we give the annealed critical exponent. We then generalize the criteria for disorder relevance/irrelevance that were proved for the i.i.d. case.

Next we are interested in disorder sequences with infinite range correlations. At first we generalize the method used to deal with finite range correlations and obtain the annealed critical behaviour in the case of gaussian disorder assuming fast decay of correlations. We use to this end the spectral properties of transfer operators for shifts on integer sequences and potentials with summable variations. Secondly we provide some results when disorder is a Markov chain.

**Keywords :** pinning model, polymer, localization, phase transition, Harris criterion, correlations, renewal, critical curve, critical exponent, annealed, quenched, replicas, fractional moments, Ruelle-Perron-Frobenius, transfer operator, infinite-type shift, process with memory.

---

Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du  
11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex France

# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de thèse Nadine Guillotin pour avoir supervisé mes travaux. Son soutien, ses conseils et son expérience ont grandement contribué à mes progrès et à mon ouverture sur le plan mathématique.

Je remercie Frank den Hollander et Yueyun Hu d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et Francis Comets, Dimitri Pétritis et Christophe Sabot d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je souhaite ensuite exprimer ma gratitude aux personnes qui au cours des échanges et discussions m'ont aidé à avancer ; je pense en particulier à Quentin Berger, Francesco Caravenna, Clément Dombry, Giambattista Giacomini, Frank den Hollander, Hubert Lacoïn, Jean-Christophe Mourrat, Nicolas Pétrélis, Omri Sarig et Fabio Toninelli. Je suis également très reconnaissant envers l'équipe de probabilités du *Mathematisch Instituut* de Leiden pour leur accueil et leur hospitalité durant ma visite. La bonne ambiance au sein de l'équipe à l'ICJ et parmi les membres de l'ANR MEMEMO ont de même contribué au bon déroulement de cette thèse. Je salue aussi les occupants passés et présents du bureau 105 : Corentin, Ricardo, Saïd, Hugo, Blanche et Fernando.

Enfin je remercie mes amis et ma famille pour leur soutien constant et leurs encouragements.



*À Jacques et à Robert,*





# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction et motivations . . . . .	7
1.2 Le modèle homogène . . . . .	10
1.2.1 Définitions et hypothèses . . . . .	10
1.2.2 Résolution . . . . .	13
1.3 Le modèle désordonné . . . . .	15
1.3.1 Définitions . . . . .	15
1.3.2 Premiers résultats . . . . .	15
1.3.3 Influence du désordre et critère de Harris . . . . .	17
1.3.4 Désordre ergodique . . . . .	25
<b>2 Corrélations à portée finie : le modèle <i>annealed</i>.</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Matrices de transfert . . . . .	29
2.3 Résultats . . . . .	33
2.4 Un renouvellement « avec mémoire » . . . . .	34
2.5 Preuve du théorème 2.3.1 . . . . .	34
2.6 Preuve de la proposition 2.3.1 . . . . .	40
2.7 Preuve de la proposition 2.3.2 . . . . .	40
<b>3 Corrélations à portée finie : régime non pertinent.</b>	<b>43</b>
3.1 Résultat . . . . .	43
3.2 Intersection de renouvellements markoviens . . . . .	44
3.3 Contrôle du moment d'ordre deux . . . . .	53
3.4 Partie lim sup et fin de la preuve . . . . .	54
<b>4 Corrélations à portée finie : régime pertinent.</b>	<b>59</b>
4.1 Résultats . . . . .	59

4.2	Le cas $0 < \alpha < 1/2$ et $\beta$ grand . . . . .	60
4.3	Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$ . . . . .	65
4.3.1	Moments fractionnaires . . . . .	65
4.3.2	Cas $\alpha > 1$ . . . . .	71
4.3.3	Cas $1/2 < \alpha < 1$ . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Corrélations à décroissance rapide.</b>	<b>79</b>
5.1	Hypothèses . . . . .	79
5.2	Résultats . . . . .	82
5.3	Décalages de type infini . . . . .	85
5.3.1	Définitions . . . . .	85
5.3.2	Théorèmes . . . . .	88
5.4	Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3 . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Quelques résultats dans le cas d'un désordre markovien.</b>	<b>101</b>
6.1	Résultats . . . . .	102
6.2	Preuves . . . . .	102
6.3	Exemples . . . . .	106
6.3.1	Moyennes mobiles . . . . .	106
6.3.2	Chaîne à deux états . . . . .	107
	<b>Conclusion et perspectives.</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Appendices.</b>	<b>113</b>
A.1	Sur-additivité . . . . .	113
A.2	Fonctions à variations lentes et théorèmes taubériens . . . . .	114
A.3	Renouvellements . . . . .	115
A.3.1	Renouvellements standards . . . . .	116
A.3.2	Renouvellements markoviens . . . . .	117
A.4	Théorème de Perron-Frobenius . . . . .	119

---

# Introduction.

L'objet de cette thèse est l'étude des modèles d'accrochage de polymères dans des environnements aléatoires faiblement corrélés. Introduits à partir des années quatre-vingt, les modèles d'accrochage (*pinning* en anglais) portent sur la transition de localisation/délocalisation subie par une chaîne polymère en interaction avec une interface, une membrane impénétrable ou une autre chaîne polymère par exemple.

Situés à l'interface de la Théorie des Probabilités et de la Mécanique Statistique, les modèles de polymères aléatoires, dont le modèle d'accrochage fait partie, suscitent beaucoup d'intérêt. Ceux-ci possèdent un formalisme commun que nous désirons expliquer dans ce chapitre introductif.

**Introduction aux modèles de polymères probabilistes.** Tout d'abord, qu'est ce qu'un polymère ? Le mot « polymère » désigne une macromolécule formée par la concaténation d'atomes ou de groupes d'atomes. Les unités fondamentales qui, en s'assemblant, forment la chaîne polymère, sont appelées monomères. En pratique, le nombre de monomères au sein d'un polymère varie de  $10^3$  à  $10^{10}$  unités tandis que leur taille varie de  $10^{-10}$  à  $10^{-9}$  m. Les polymères peuvent être d'origine naturelle (ADN et protéines par exemple) ou synthétique (polyester, pâte FIMO) et avoir plusieurs sortes de géométries : linéaire (le polymère a « deux bouts ») ou branchée (les liaisons entre monomères forment un réseau ramifié). Dans le cas où plusieurs types de monomères coexistent au sein du polymère – on parle alors de chaînes inhomogènes – l'agencement des monomères peut être de plusieurs natures : périodique (un même motif de monomères qui se répète) ou « désordonné » (l'agencement ne suit pas d'ordre précis). Au cours du vingtième siècle, l'intérêt pour les polymères n'a cessé de croître, du fait de leur omniprésence dans la nature et des propriétés physiques remarquables des matériaux qui en sont issus. Parallèlement à leur étude expérimentale (rhéologie par exemple), les physiciens – puis les mathématiciens – se sont posés la question de leur étude théorique.

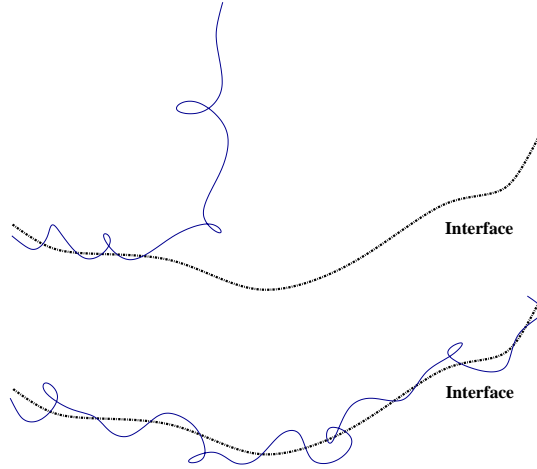


FIGURE 1 – Une représentation schématique de la phase délocalisée (en haut) et de la phase localisée (en bas). En bleu : la chaîne polymère.

Une manière désormais classique (initiée dans les années cinquante) de représenter les conformations – c’est à dire les différentes positions que la molécule prend dans l’espace – d’un polymère linéaire est de considérer les chemins de longueur  $n \geq 1$  ( $n$  étant le nombre de monomères) sur un réseau discret  $\mathbb{Z}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$ ) allant aux plus proches voisins, soit

$$\mathcal{W}_n^{(1)} = \{(w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^d : w_0 = 0, |w_{i+1} - w_i| = 1\},$$

où  $|\cdot|$  est la distance euclidienne et chaque point  $w_i$  représente un monomère. Munir chaque  $\mathcal{W}_n$  ( $n \geq 1$ ) de la probabilité uniforme  $P_n$  revient à considérer la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$ . Celle-ci est définie par la suite des sommes partielles  $W_0 = 0$  et  $W_n = W_{n-1} + X_n$ , pour tout  $n \geq 1$ , où les incréments  $(X_n)_{n \geq 1}$  sont identiquement distribués, indépendants entre eux, et de loi :

$$\forall e \in \mathbb{Z}^d / |e| = 1, \quad P(X_1 = e) = 1/(2d).$$

On parle alors de chaîne idéale. L’avantage est que la marche aléatoire est un objet aux propriétés bien connues, mais cette modélisation n’est pas assez réaliste. En particulier, l’effet d’auto-exclusion – la présence d’un monomère à un site empêche la présence d’autres monomères – n’est pas pris en compte. Une solution à ce problème est de considérer les chemins qui n’ont aucune auto-intersection, appelés aussi marches auto-évitantes :

$$\mathcal{W}_n^{(2)} = \{(w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}^d : w_0 = 0, |w_{i+1} - w_i| = 1, w_i \neq w_j \forall i \neq j\},$$

où  $\mathcal{W}_n^{(2)}$  est muni de la probabilité uniforme  $P_n$ . Ce modèle est déjà très difficile à analyser et son étude conduit à des questions qui restent ouvertes encore

---

aujourd'hui (voir [41]). Une troisième manière de représenter les polymères est de considérer les marches dirigées. Une marche dirigée de dimension  $1 + d$  et de taille  $n \geq 1$  est un élément de l'ensemble

$$\mathcal{W}_n^{(3)} = \{(k, w_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d : w_0 = 0, |w_{i+1} - w_i| = 1\},$$

que l'on munit également de la probabilité uniforme  $P_n$ . Ainsi, ces marches ne s'auto-intersectent jamais et restent simples à étudier car leur deuxième composante est une marche aléatoire simple.

En fonction du phénomène étudié, une fonction hamiltonienne (ou énergie)  $H_n : \mathcal{W}_n^{(i)} \mapsto \mathbb{R}$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) est introduite. C'est la quantité d'intérêt pour le système. Contrairement à la Mécanique Classique où l'équilibre du système est décrit par les minima de la fonction d'énergie, l'équilibre en Mécanique Statistique est donné par une famille de mesures, dites mesures de Gibbs, de la forme

$$\forall w \in \mathcal{W}_n^{(i)}, \quad \frac{dP_{n,\beta}}{dP_n}(w) = \frac{1}{Z_{n,\beta}} \exp(-\beta H_n(w))$$

où  $\beta$  est appelée température inverse (l'analogie avec la théorie cinétique des gaz est expliquée dans [25, Chapitre III]), le facteur  $\exp(-\beta H_n)$  est appelé poids de Boltzmann, et  $Z_{n,\beta} = E_n(\exp(-\beta H_n))$ , où  $E_n$  désigne l'espérance sous la probabilité  $P_n$ , est la fonction de partition. Plus  $\beta$  est grand, plus la mesure de Gibbs est concentrée sur les minima de la fonction hamiltonienne.

Lorsque les paramètres du milieu dans lequel ils se trouvent sont modifiés (la température par exemple), les polymères peuvent subir une transition de phase, qui correspond à un changement drastique, macroscopique de leurs caractéristiques. Nous verrons plus tard l'exemple de la dénaturation de l'ADN. De manière générale, la signature d'une transition de phase se trouve dans le changement de régularité de la fonction d'énergie libre, définie par :

$$F(\beta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta}.$$

Un diagramme de phase est une représentation de l'énergie libre dans l'espace des paramètres. Une valeur de  $\beta$  où la fonction d'énergie libre n'est pas analytique sera dite critique. L'ordre de la transition de phase correspond alors au manque de régularité au point critique. Ainsi, pour tout entier  $k$ , si  $F$  est  $C^k$  au point critique  $\beta_c$ , mais pas  $C^{k+1}$ , on dit alors que la transition est d'ordre  $k$ . Si

$$F(\beta_c + \delta) - F(\beta_c) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} \delta^\theta,$$

aux corrections logarithmiques près, ou encore si

$$\lim_{\delta \searrow 0} \log(F(\beta_c + \delta) - F(\beta_c)) / \log \delta = \theta,$$

---

ce que l'on notera aussi

$$F(\beta_c + \delta) - F(\beta_c) \underset{\delta \searrow 0}{\asymp} \delta^\theta,$$

alors  $\theta$  est appelé exposant critique. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux points et aux exposants critiques de certains modèles d'accrochage. Nous concluons cette courte introduction aux modèles de polymères en donnant quelques références : les notes de Flory [28], l'article de Fisher sur le lien entre les marches aléatoires et les phénomènes de mouillage et dénaturation [27], et plus récemment les ouvrages [30] et [20].

**Plan et résultats de la thèse.** Cette thèse est organisée de la manière suivante :

**Chapitre 1.** Nous introduisons le modèle d'accrochage, d'abord en tant que modèle portant sur les marches aléatoires dirigées, en faisant le lien avec le problème de dénaturation de l'ADN, puis dans sa version plus générale, comme modèle de mécanique statistique basé sur les processus de renouvellement. Nous rappelons les éléments essentiels de la résolution du modèle dans sa version homogène, pour ensuite donner un aperçu des résultats obtenus ces dernières années dans le cas d'un modèle d'accrochage désordonné (lorsque le désordre est donné par une suite de variables aléatoires i.i.d.). Nous introduirons les notions de modèles *quenched* et *annealed*, ainsi que le problème de pertinence du désordre. Dans le cas d'un désordre i.i.d. nous prouvons une nouvelle borne sur la courbe critique *quenched* à haute température (théorème 1.3.1).

**Chapitre 2.** Dans ce chapitre, nous étudions le modèle d'accrochage désordonné lorsque le désordre est gaussien et possède des corrélations à portée finie, et résolvons le modèle *annealed* (i.e. moyenné sous le désordre) qui en résulte. Le théorème 2.3.1 donne une expression de la courbe critique *annealed* en fonction de la plus grande valeur propre d'une certaine matrice de transfert, et la proposition 2.3.1 en donne un équivalent asymptotique à haute température. La proposition 2.3.2 affirme que dans ce cas, l'exposant critique *annealed* est le même que dans le cas homogène.

**Chapitre 3.** Toujours dans le cas de corrélations à portée finie, nous montrons que le critère de non-pertinence du désordre obtenu dans le cas d'un désordre i.i.d. s'applique toujours (théorème 3.1.1). Les chapitres 2 et 3 sont tirés de l'article [45].

---

**Chapitre 4.** Nous étendons les critères de pertinence du cas i.i.d. au cas des corrélations à portée finie (théorèmes 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3). Ce chapitre est extrait de [46].

**Chapitre 5.** L'objectif de ce chapitre est d'étendre les méthodes mises en place dans le chapitre 2 au cas des corrélations à portée non finie, mais décroissant assez rapidement. Nous faisons le lien avec l'étude des décalages sur les alphabets infinis dénombrables et donnons le comportement critique *annealed* précis dans le cas des corrélations décroissant exponentiellement vite (théorème 5.2.2). Nous traitons aussi le cas (*annealed*) des corrélations sommables lorsque le processus de renouvellement a des temps d'attente intégrables (théorème 5.2.3). Le théorème 5.2.1 donne l'équivalent à haute température de la courbe critique *annealed*.

**Chapitre 6.** Ce chapitre est dédié à quelques résultats que nous obtenons dans le cas d'un désordre donné par une chaîne de Markov dans un espace d'état fini : une caractérisation de la courbe critique *annealed* (théorème 6.1.1) et un critère de pertinence du désordre analogue à celui obtenu dans le cas i.i.d (théorème 6.1.2).

#### Quelques remarques sur les abréviations et notations utilisées.

- L'abréviation « i.i.d. » signifie « indépendant(e)s identiquement distribué(e)s ».
- La fonction indicatrice d'un ensemble  $E$  est notée  $\mathbf{1}_E$ , i.e.  $\mathbf{1}_E(x)$  vaut 1 si  $x$  appartient à  $E$ , et 0 sinon.
- L'ensemble des entiers naturels est noté  $\mathbb{N}$  tandis que l'ensemble des entiers naturels non nuls est noté  $\mathbb{N}^*$ .
- L'union de  $\mathbb{N}$  (resp.  $\mathbb{N}^*$ ) et  $\{+\infty\}$  sera notée  $\overline{\mathbb{N}}$  (resp.  $\overline{\mathbb{N}^*}$ ).
- La partie entière d'un réel  $x$  sera notée  $[x]$ .
- Si  $M$  est une matrice, alors  $\text{Com}(M)$  désigne la comatrice de  $M$  (matrice des cofacteurs, c.f. appendice A.4) et  ${}^tM$  sa transposée.
- Si  $u$  et  $v$  sont deux suites réelles ou complexes indexées par  $\mathbb{N}$ , la convolée de  $u$  et  $v$  est notée  $u*v$ , et définie par  $(u*v)(n) = \sum_{k=0}^n u(k)v(n-k)$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Lorsque qu'une quantité est définie, on utilisera parfois le signe « := ».

---



---

# Chapitre 1

## Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.

En prenant comme point de départ le mécanisme de dénaturation de l'ADN, nous introduisons le modèle d'accrochage « général » – c'est-à-dire à l'aide des processus de renouvellement – d'abord dans sa version homogène et résoluble, puis dans la version inhomogène (ou désordonnée), en donnant un aperçu des résultats obtenus jusqu'à présent. Nous nous concentrons principalement sur les points essentiels à la compréhension du reste de la thèse, c'est-à-dire ceux qui concernent l'étude des points et exposants critiques. De nombreuses références sont disponibles sur le sujet : des monographies ([30], [20, chapitres 7 et 11]), des articles de survol ou de synthèse [31, 60], des mémoires de thèses [44, 39, 54] ainsi que les articles cités tout au long de cette thèse. Le lecteur pourra s'y référer pour des résultats complémentaires ou concernant d'autres aspects du modèle (propriétés trajectorielles, longueurs de corrélation, limites d'échelle, etc). Malgré son titre, ce chapitre contient une nouvelle borne sur la courbe critique du modèle désordonné (théorème 1.3.1).

### 1.1 Introduction et motivations

Supposons que l'on s'intéresse à l'interaction entre deux marches dirigées en dimension  $1 + 1$ , évoluant dans le même plan et notées  $\{(n, S_n^{(1)})\}_{n \geq 0}$  et  $\{(n, S_n^{(2)})\}_{n \geq 0}$ , où  $S^{(1)}$  et  $S^{(2)}$  sont deux marches aléatoires simples sur  $\mathbb{Z}$  partant de  $S_0^{(1)} = S_0^{(2)} = 0$  (cf. définition donnée dans l'introduction). Pour

## Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.

étudier cette interaction, on choisit comme hamiltonien :

$$H_n = h \times \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_k^{(1)}=S_k^{(2)}\}}, \quad (1.1)$$

où  $h$  est un réel et  $n$  un entier non nul. Lorsque  $h$  est assez grand, alors le potentiel favorise les contacts entre les deux marches, qui vont rester « accrochées » l'une à l'autre, et on parle dans ce cas de phase localisée. Au contraire, si  $h$  est assez petit, les contacts sont défavorisés et les deux marches tendent donc à s'éloigner l'une de l'autre : on parle de phase délocalisée. A un certain point  $h$  critique, une transition de phase a lieu. Remarquons aussi que  $(S_n)_{n \geq 0} = (S_n^{(1)} - S_n^{(2)})_{n \geq 0}$  est toujours une marche aléatoire. Ainsi, étudier l'interaction de deux marches revient à considérer l'interaction entre une seule marche et le demi-axe  $\mathbb{N} \times \{0\}$ . On pourra donc poser comme hamiltonien :

$$H_n = h \times \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{S_n=0\}}.$$

Par la propriété de Markov, les excursions entre chaque passage de  $S$  en 0 sont indépendantes et identiquement distribuées. Les passages de  $S$  en 0 forment donc un processus de renouvellement (cf. appendice A.3), et les quantités pertinentes pour l'étude du modèle sont les probabilités

$$K(n) = P(S_0 = 0, S_n = 0, S_i \neq 0, 1 \leq i \leq n),$$

où  $n \geq 1$ . Notons que dans notre cas (cf. [26, Chapitre III]),

$$K(2n) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \text{cste} \times n^{-3/2},$$

mais rien n'empêche de considérer le cas plus général

$$K(n) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \text{cste} \times n^{-(1+\alpha)},$$

à des corrections logarithmiques près. Ce modèle est appelé modèle d'accrochage homogène.

Revenons un instant à notre formulation initiale (interaction entre deux marches dirigées). Si nous considérons que chacune des deux marches dirigées modélise un brin d'ADN, alors la transition de phase dont nous parlons correspond au phénomène de dénaturation de l'ADN. En effet, l'ADN est un biopolymère constitué de deux brins dont les monomères sont appelés nucléotides. Chaque nucléotide est composée d'un groupe phosphate, d'un sucre (désoxyribose) et d'une base azotée, qui peut être de quatre types

## 1.1 Introduction et motivations

---

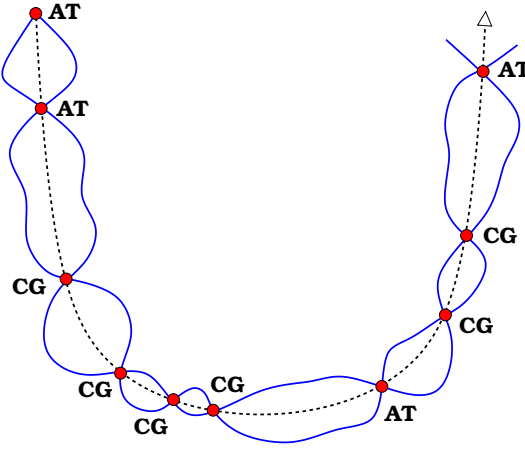


FIGURE 1.1 – Dénaturation d’une molécule d’ADN. Les courbes bleues représentent les deux brins de la molécule d’ADN, dont les points de contact sont en rouge. Il s’agit des liaisons AT ou CG. Lorsque la température augmente, les brins se détachent en formant des « bulles » de dénaturation (boucle entre deux points rouges). Dans le modèle d’accrochage, la ligne en pointillés devient la droite réelle et les points rouges sont les points d’un processus de renouvellement.

différents : adénine (A), thymine (T), cytosine (C) et guanine (G). Les deux brins sont liés entre eux par des liaisons hydrogènes qui ont lieu entre chaque paire de nucléotides, mais lorsque la température dépasse un certain seuil, ces liaisons sont rompues, entraînant la séparation des deux brins. C’est ce mécanisme qui est appelé dénaturation de l’ADN (cf. figure 1.1). Celui-ci est également décrit par un autre modèle physique nommé modèle de Poland-Scheraga. Pour plus de précisions sur le lien entre ce modèle et le modèle d’accrochage, nous invitons le lecteur à se référer à [30, section 1.4]. De plus, il n’existe en fait que deux types de paires de nucléotides possibles : A-T et C-G. Or, ces deux appariements différents donnent lieu à des liaisons hydrogènes d’intensités inégales. Pour prendre en compte cette inhomogénéité, il faudrait donc poser comme hamiltonien, à la place de (1.1) :

$$H_n = h \times \sum_{k=1}^n \omega_k \mathbf{1}_{\{S_k^{(1)}=S_k^{(2)}\}},$$

où  $\omega_k$  est l’intensité de la liaison hydrogène située à la  $k^e$  paire de nucléotides. Cela nous conduit à introduire la version inhomogène (ou désordonnée) du modèle d’accrochage.

## 1.2 Le modèle homogène

Dans une première partie, nous posons le cadre mathématique précis pour l'étude du modèle d'accrochage homogène. Les points d'accrochage (points de contact entre deux polymères, ou entre un polymère et une interface) sont modélisés par un processus de renouvellement  $\tau = (\tau_n)_{n \geq 0}$  sous une certaine mesure de Gibbs. Les hypothèses faites sur  $\tau$  dans ce chapitre seront gardées durant le reste de cette thèse, sauf mention contraire. Nous verrons dans une deuxième partie que ce modèle homogène est entièrement résoluble, au sens où nous connaissons (au moins) le point critique ainsi que l'exposant critique.

### 1.2.1 Définitions et hypothèses

Soit  $(T_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Les variables  $T_k$  seront appelées sauts, temps d'attente, ou interarrivées (en référence à la théorie des files d'attente). On note pour tout entier  $n \geq 1$

$$K(n) = P(T_1 = n)$$

et on définit le processus de renouvellement  $\tau = (\tau_n)_{n \geq 0}$  par  $\tau_0 = 0$  et

$$\forall n \geq 1, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + T_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

Comme les  $T_k$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , les  $\tau_k$  sont finis presque sûrement et le renouvellement est dit récurrent. Si de plus,

$$\sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty,$$

on parle de renouvellement positivement récurrent. Dans le cas contraire,  $\tau$  est dit récurrent nul. Si l'on s'autorisait à prendre des temps d'attente à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , avec  $K(\infty) := 1 - \sum_{n \geq 1} K(n) > 0$ , alors on parlerait de renouvellement transient et presque sûrement il existerait  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\tau_n = +\infty$ .

Nous supposons également que la loi du temps d'attente est de la forme :

$$K(n) = L(n)n^{-(1+\alpha)} \tag{1.2}$$

où  $\alpha \geq 0$  et  $L : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  est une fonction à variation lente (cf. appendice A.2). Notons qu'avec cette définition,  $K(n) > 0$  pour tout entier  $n \geq 1$ .

## 1.2 Le modèle homogène

---

Nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall n \geq 0, \quad \delta_n = \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}} = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{\tau_k = n\}},$$

et

$$\forall n \geq 1, \quad \iota_n = \sum_{k=1}^n \delta_k = \sup\{k \geq 0 : \tau_k \leq n\}.$$

On introduit alors la famille de mesures de Gibbs (ou mesures de polymère)  $(P_{n,h})_{n \geq 1, h \in \mathbb{R}}$  sur  $\tau$ , définies par leurs densités par rapport à la loi initiale  $P$  :

$$\frac{dP_{n,h}}{dP}(\tau) = \frac{1}{Z_{n,h}} \exp(h\iota_n).$$

La constante de renormalisation  $Z_{n,h} = E(\exp(h\iota_n))$  est appelée fonction de partition. Lorsque cela sera utile de le préciser, nous qualifierons ces objets (mesures et fonctions de partition associées) de libres, par opposition aux quantités *pinned* définies par

$$\frac{dP_{n,h}^c}{dP}(\tau) = \frac{1}{Z_{n,h}^c} \exp(h\iota_n) \delta_n$$

et

$$Z_{n,h}^c = E(\exp(h\iota_n) \delta_n).$$

Nous avons alors :

**Théorème 1.2.1.** *Les suites  $((1/n) \log Z_{n,h})_{n \geq 1}$  et  $((1/n) \log Z_{n,h}^c)_{n \geq 1}$  convergent, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , vers la même limite positive, notée  $F(h)$ , et appelée énergie libre (homogène). De plus,*

$$F(h) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \log Z_{n,h}^c.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \forall m \geq 1, n \geq 1, \quad Z_{n+m,h}^c &= E \left( \exp \left( \sum_{k=1}^{n+m} \delta_k \right) \delta_{n+m} \right) \\ &\geq E \left( \exp \left( \sum_{k=1}^n \delta_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \delta_k \right) \delta_n \delta_{n+m} \right) \\ &= Z_{n,h}^c Z_{m,h}^c \text{ par la propriété de Markov,} \end{aligned}$$

## Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.

et donc la suite  $(F_n(h))_{n \geq 1} = ((1/n) \log Z_{n,h}^c)_{n \geq 1}$  est sur-additive (cf. appendice A.1), c'est-à-dire

$$F_{n+m}(h) \geq F_n(h) + F_m(h).$$

On en déduit donc la convergence de la suite  $(F_n(h))_{n \geq 1}$  vers son supremum  $F(h)$ . Comme

$$Z_{n,h}^c \geq E(\exp(h\lambda_n) \mathbf{1}_{\{\tau_1=n\}}) \geq e^h K(n),$$

on en déduit  $F(h) \geq 0$ . Montrons maintenant que considérer la fonction de partition libre plutôt que *pinned* ne change pas la valeur de l'énergie libre. Nous détaillons la preuve ici, mais ce fait est général et pourra être utilisé pour tous les modèles rencontrés par la suite. D'une part, nous avons

$$Z_{n,h} = E(\exp(h\lambda_n)) \geq E(\exp(h\lambda_n)\delta_n) = Z_{n,h}^c. \quad (1.3)$$

D'autre part, décomposons la fonction de partition libre suivant le dernier point de renouvellement situé avant  $n$ . On obtient alors en utilisant la propriété de Markov

$$Z_{n,h} = Z_{n,h}^c + \sum_{k=1}^{n-1} Z_{n-k,h}^c P(\tau_1 > k)$$

avec la convention  $Z_{0,h}^c = 1$ . Or,  $P(\tau_1 > k) = \sum_{i>k} K(i)$  et donc d'après (1.2) et la proposition A.2.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(\tau_1 > k) \leq CkK(k)$$

et donc

$$Z_{n,h} \leq Z_{n,h}^c + Ce^{-h}n \sum_{k=1}^{n-1} Z_{n-k,h}^c K(k).$$

Comme  $Z_{n,h}^c = \sum_{k=1}^n Z_{n-k,h}^c K(k)$ , on en déduit que pour tout  $h$  il existe une constante  $C' > 0$  telle que

$$Z_{n,h} \leq C'nZ_{n,h}^c. \quad (1.4)$$

D'après (1.3) et (1.4), on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,h} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,h}^c = F(h).$$

□

## 1.2 Le modèle homogène

---

### 1.2.2 Résolution

Nous donnons ici les points essentiels de la résolution du modèle homogène. Afin d'éviter les répétitions, nous ne donnons pas les preuves de ces résultats car le modèle que nous allons étudier dans le chapitre 2 est une généralisation du modèle homogène. Les preuves se trouvent par exemple dans [30, section 2].

Le premier résultat est :

**Théorème 1.2.2.** *Si  $h \leq 0$  alors  $F(h) = 0$ . Si  $h > 0$ ,  $F(h)$  est l'unique solution strictement positive de l'équation*

$$\sum_{n \geq 1} e^{-Fn} K(n) = e^{-h}. \quad (1.5)$$

On en déduit alors que le point critique se trouve en  $h = 0$ , au sens où la fonction  $F$  n'est pas analytique en ce point (cf. introduction).

**Remarque 1.2.1.** *Dans le cas général, si  $K(\infty) > 0$ , alors le point critique vaut  $-\log(1 - K(\infty)) > 0$  (cf. [30, Partie 2.1]).*

Quant à l'ordre de la transition de phase, il est donné par :

**Théorème 1.2.3.** *On a :*

- Si  $\alpha = 0$ ,  $F(h) = o(h^\nu)$ , pour tout  $\nu > 0$ , lorsque  $h \searrow 0$ .
- Si  $0 < \alpha < 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\sum_{n \geq 1} nK(n) = +\infty$ , alors pour  $h > 0$ ,

$$F(h) = h^{1/\alpha} \hat{L}(1/h),$$

où  $\hat{L}$  est une fonction à variation lente.

- Si  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$  alors

$$F(h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} h/m. \quad (1.6)$$

Pour résumer, l'énergie libre est exprimée implicitement en fonction de la transformée de Laplace de  $\tau_1$ , et les théorèmes taubériens (cf. proposition A.2.2) permettent alors de déduire l'exposant critique de l'énergie libre en fonction de  $\alpha$ . Notons que dans le cas  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , la transition de phase est d'ordre un et la pente de l'énergie libre est égale à la densité de contact limite du renouvellement. En effet, d'après le théorème du renouvellement (théorème A.3.1),

$$\frac{1}{m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n \in \tau),$$

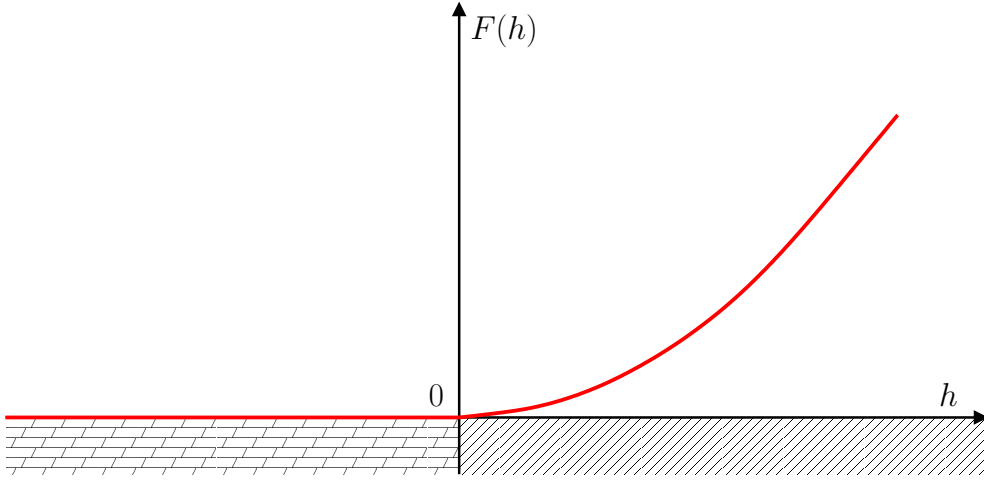


FIGURE 1.2 – Diagramme de phase du modèle homogène. La courbe de l'énergie est positive, croissante et convexe. L'énergie libre vaut 0 pour  $h < 0$  (régime délocalisé) et est strictement positive pour  $h > 0$  (régime localisé). Le comportement en  $h = 0$  (point critique) dépend du noyau  $K$  (et en particulier de la valeur de  $\alpha$ , cf. théorème 1.2.3). Par des arguments de convexité, on peut montrer que  $F'(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{n,h}(\nu_n/n)$  (vrai pour  $h \neq 0$  dans tous les cas), ce qui permet de relier la pente de l'énergie libre à la densité de contact limite de  $\tau$  sous la mesure de Gibbs  $(P_{n,h})$ . Celle-ci est nulle dans la phase délocalisée et strictement positive dans la phase localisée.

ainsi que

$$\frac{1}{m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu_n}{n},$$

dans  $L^1(P)$  et presque-sûrement.

Pour finir, nous introduisons une nouvelle loi qui interviendra dans la preuve du théorème 1.3.1. Pour  $h > 0$ , définissons le noyau de probabilité suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_h(n) = \exp(h - F(h)n)K(n),$$

Notons  $P_h$  la loi de  $\tau$  lorsque les interarrivées ont pour loi  $K_h$ . Alors (cf. [30, (2.11) et (2.18)]) :

$$Z_{n,h}^c = e^{F(h)n} P_h(n \in \tau). \quad (1.7)$$



## 1.3 Le modèle désordonné

### 1.3.1 Définitions

Soit  $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées (et indépendante de  $\tau$ ) – le désordre – dont la loi est notée  $\mathbb{P}$  et l'espérance associée  $\mathbb{E}$ . Définissons les mesures de Gibbs suivantes :

$$\forall n \geq 1, h \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, \quad \frac{dP_{n,\beta,h,\omega}^{(c)}}{dP}(\tau) = \frac{1}{Z_{n,\beta,h,\omega}} \exp(H_{n,\beta,h,\omega}(\tau))(\delta_n)$$

où  $H_{n,\beta,h,\omega}(\tau) = \sum_{k=1}^n (\beta\omega_k + h)\delta_k$  et

$$Z_{n,\beta,h,\omega}^{(c)} = \mathbb{E}(\exp(H_{n,\beta,h,\omega}(\tau))(\delta_n)).$$

Les mesures de probabilité et fonctions de partition ainsi définies sont dites *quenched*, ce qui signifie que  $\omega$  est une réalisation typique, mais fixée, d'une suite de variables aléatoires de loi  $\mathbb{P}$ . Sans perdre de généralité, nous supposons toujours que les variables aléatoires  $\omega_n$  sont centrées. L'énergie libre *quenched* à volume fini est :

$$F_n^{(c)}(\beta, h) = \mathbb{E} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h,\omega}^{(c)}$$

Si de plus il existe  $\beta_0$  tel que  $\mathbb{E}(\exp(\beta|\omega_0|)) < +\infty$ , alors nous pouvons définir les mêmes objets dans leurs versions *annealed* : pour tout  $\beta$  dans  $[0, \beta_0)$ ,

$$\frac{d(P^{(c)} \otimes \mathbb{P})_{n,\beta,h}}{d(P \otimes \mathbb{P})} = \frac{1}{Z_{n,\beta,h}^{a,(c)}} \exp\left(\sum_{k=1}^n (\beta\omega_k + h)\delta_k\right)(\delta_n) \quad (1.8)$$

où

$$Z_{n,\beta,h}^{a,(c)} = \mathbb{E} Z_{n,\beta,h,\omega}^{(c)}.$$

Lorsque la suite  $((1/n) \log Z_{n,h}^{a,(c)})_{n \geq 1}$  converge, sa limite est appelée énergie libre *annealed* et notée  $F^a(\beta, h)$ .

### 1.3.2 Premiers résultats

Supposons pour l'instant que  $\mathbb{E}(|\omega_0|) < +\infty$ . Nous avons alors :

**Proposition 1.3.1.** *Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta \geq 0$ , il existe une constante positive  $F(\beta, h)$  telle que*

$$F(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h,\omega}^{(c)}$$

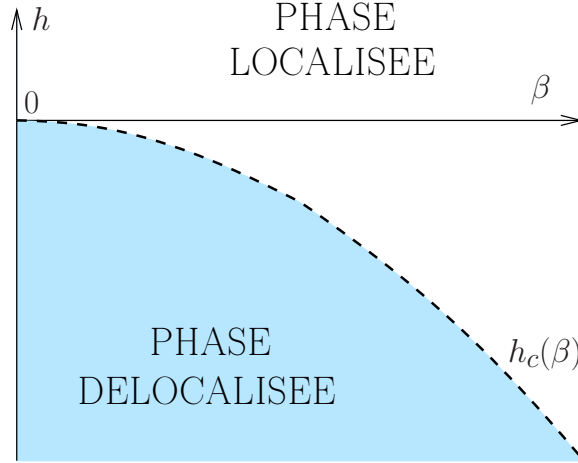


FIGURE 1.3 – Diagramme de phase du modèle désordonné.

$\mathbb{P}$ -p.s et dans  $L^1(\mathbb{P})$ . De plus,

$$F(\beta, h) = \sup_{n \geq 1} F_n^c(\beta, h). \quad (1.9)$$

Le diagramme de phase dans  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  est alors partitionné en une phase localisée

$$\mathcal{L} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) > 0\},$$

et une phase délocalisée

$$\mathcal{D} = \{(\beta, h) : F(\beta, h) = 0\}.$$

Pour tout  $\beta$ , il existe alors un point critique

$$h_c(\beta) := \sup\{h \in \mathbb{R} : F(\beta, h) = 0\}.$$

Par convexité de  $F$  (comme limite de fonctions convexes),  $\mathcal{D}$  est convexe et donc la courbe critique  $\beta \mapsto h_c(\beta)$  est concave. De plus, elle est décroissante, et  $h_c(0) = 0$  (cf. figure 1.3). Le lecteur peut se référer [30, sections 4 et 5] ou à la partie 1.3.4 pour les preuves de ces résultats.

## 1.3 Le modèle désordonné

---

### 1.3.3 Influence du désordre et critère de Harris

Le cas d'un désordre gaussien standard i.i.d. est sans doute l'un des cas les plus étudiés dans les modèles d'accrochage désordonnés. Pour simplifier, nous nous plaçons dans ce cadre jusqu'à la fin de cette partie, même si la plupart des résultats peuvent se généraliser à n'importe quel désordre i.i.d. possédant un moment exponentiel.

Dans le cas d'un désordre i.i.d., le modèle *annealed* se réduit au modèle homogène. En effet, un calcul direct montre que

$$Z_{n,\beta,h}^a = Z_{n,0,h+\frac{\beta^2}{2}}$$

et donc

$$F^a(\beta, h) := F(0, h + \beta^2/2),$$

dont on déduit d'après la partie 1.2 les deux points suivants :

- le point critique *annealed* est

$$h_c^a(\beta) := -\frac{\beta^2}{2},$$

- le comportement critique de l'énergie libre *annealed* au voisinage de son point critique est le même que dans le cas homogène.

On en déduit aussi la borne suivante – dite borne *annealed* – sur le point critique *quenched* :

$$h_c(\beta) \geq -\frac{\beta^2}{2}. \quad (1.10)$$

En effet, d'après l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h,\omega} \leq \frac{1}{n} \log \mathbb{E} Z_{n,\beta,h,\omega} = \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h}^a,$$

ce qui donne en passant à la limite

$$F(\beta, h) \leq F^a(\beta, h) := \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \log Z_{n,\beta,h}^a, \quad (1.11)$$

dont on déduit directement la borne (1.10). Deux questions se posent alors :

- Les points critiques *quenched* et *annealed* coïncident-ils ?
- L'exposant critique *quenched* est-il le même que l'exposant critique *annealed* (i.e. homogène) ?

Grâce à une série de travaux récents, nous savons désormais que

- si  $\alpha < 1/2$  (ou si  $\alpha = 1/2$  avec certaines conditions sur la fonction  $L$ ), alors pour  $\beta$  assez petit, les points et les exposants critiques *annealed* et *quenched* coïncident,

## Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.

- si  $\alpha > 1/2$ , alors pour tout  $\beta > 0$ ,  $h_c(\beta) > h_c^a(\beta)$  et la transition de phase est au moins d'ordre deux.

Dans le premier (resp. deuxième) cas, on parle de désordre non pertinent (resp. pertinent). Ainsi, la valeur charnière pour la pertinence est  $\alpha = 1/2$ , ce qui est en accord avec ce que les physiciens conjecturaient d'après un critère connu sous le nom de « critère de Harris » (cf. [36] et [30, section 5.5]). Nous ne détaillons pas le cas  $\alpha = 1/2$ , plus délicat, pour lequel le lecteur pourra se référer à [32].

### Régime non pertinent.

Les travaux dans le cas du régime non pertinent se trouvent dans [5, 3, 40, 58, 34, 17]. Une idée importante dans l'étude du régime non pertinent est le contrôle du moment d'ordre deux (relativement au désordre) de la fonction de partition au point critique *annealed*. En effet, si le moment d'ordre deux est borné, cela signifie que la fonction de partition *quenched* ne diffère « pas trop » de sa moyenne sous le désordre. Pour calculer le moment d'ordre deux, on utilise la méthode des répliques, qui consiste à remplacer le carré de l'espérance d'une variable aléatoire par l'espérance du produit de deux copies indépendantes (répliques) de cette même variable aléatoire. Dans notre cas, cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( Z_{n,\beta,-\beta^2/2}^2 \right) &= \mathbb{E} E^{\otimes 2} \left[ Z_{n,\beta,-\beta^2/2}^{(1)} Z_{n,\beta,-\beta^2/2}^{(2)} \right] \\ &= E^{\otimes 2} \left[ \exp \left( \beta^2 \sum_{k=1}^n \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} \right) \right], \end{aligned}$$

où  $\tau^{(1)}$  et  $\tau^{(2)}$  sont deux copies indépendantes de  $\tau$ . Nous ne détaillons pas plus les calculs car ils vont être faits dans un cas plus général au cours du chapitre 3. Remarquons maintenant que

$$\delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} = 1 \iff k \in \tau^\cap := \tau^{(1)} \cap \tau^{(2)},$$

et que  $\tau^\cap$  est également un renouvellement (cf. appendice A.3). De plus, si  $\alpha < 1/2$ , alors d'après le théorème A.3.2, la série  $\sum_{n \geq 0} P(n \in \tau)^2$  converge et d'après (A.3),

$$P(\tau_1^\cap < +\infty) = 1 - \left( \sum_{n \geq 0} P(n \in \tau^\cap) \right)^{-1} = 1 - \left( \sum_{n \geq 0} P(n \in \tau)^2 \right)^{-1} < 1$$

et donc pour  $\beta^2 \leq -\log P(\tau_1^\cap < +\infty)$ ,

$$\sup_{n \geq 1} E^{\otimes 2} \left( \exp \left( \beta^2 \sum_{k=1}^n \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} \right) \right) < \infty$$

### 1.3 Le modèle désordonné

---

(cf. [30, Proposition 1.6 et Théorème 2.2] ainsi que la remarque 1.2.1).

Nous en profitons pour énoncer un résultat qui concerne le modèle d'accrochage associé à l'intersection de deux répliques, dont nous aurons besoin dans la partie 1.3.3.

**Proposition 1.3.2.** *Soit, pour tout réel  $h$ ,*

$$F^\cap(h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log E^{\otimes 2} \left( \exp \left( \beta^2 \sum_{k=1}^n \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} \right) (\delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)}) \right).$$

Alors,

1. si  $1/2 < \alpha < 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\sum_{n \geq 1} n^{-1} L(n)$  alors il existe une fonction à variation lente  $\hat{L}$  telle que

$$F^\cap(h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} \hat{L}(1/h) h^{1/(2\alpha-1)}$$

2. si  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$  alors

$$F^\cap(h) \stackrel{h \searrow 0}{\sim} \frac{h}{m^2}.$$

*Démonstration.* Remarquons déjà que la fonction  $F^\cap$  est la fonction d'énergie libre du modèle d'accrochage homogène pour le renouvellement  $\tau^\cap$ . Dans le premier cas, on utilise (1.5) en combinaison avec la proposition A.2.2. Comme, d'une part

$$\begin{aligned} \left( 1 - \sum_{n \geq 1} e^{-F^\cap(h)n} P(\tau_1^\cap = n) \right)^{-1} &= \sum_{n \geq 0} e^{-F^\cap(h)n} P(n \in \tau^\cap) \\ &= \sum_{n \geq 0} e^{-F^\cap(h)n} P(n \in \tau)^2 \\ &\stackrel{h \searrow 0}{\sim} c \times F(h)^{1-2\alpha} L(1/F(h))^{-2} \end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=1}^n P(k \in \tau)^2 \sim c \times \sum_{k=1}^n (L(k)k^{1-\alpha})^{-2} \sim c \times n^{2\alpha-1} L(n)^{-2}.$$

(cf. théorème A.3.2), et d'autre part,

$$1 - e^{-h} \stackrel{h \searrow 0}{\sim} h,$$

on obtient

$$c \times F(h)^{1-2\alpha} L(1/F(h))^{-2} \stackrel{h \searrow 0}{\sim} h,$$

ce qui prouve le premier point. Dans le deuxième cas, il suffit de remarquer que  $\tau^\cap$  est positivement récurrent, car d'après le théorème du renouvellement

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n P(\tau_1^\cap = n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(n \in \tau^\cap)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(n \in \tau)^{-2} \\ &= m^2 < +\infty. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le théorème 1.2.3. □

### Régime pertinent.

Pour les résultats concernant le régime pertinent, le lecteur pourra se référer à [4, 21, 59, 32]. Les techniques développées dans [21, 59] pour montrer que le point critique *quenched* est strictement supérieur au point critique *annealed* reposent sur le contrôle des moments fractionnaires de la fonction de partition. Cette technique part de l'observation suivante : pour tout  $\gamma$  dans  $(0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} F_n(\beta, h) &= \mathbb{E} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h,\omega} \\ &= \mathbb{E} \frac{1}{\gamma n} \log Z_{n,\beta,h,\omega}^\gamma \\ &\stackrel{\text{(Jensen)}}{\leq} \frac{1}{\gamma n} \log \mathbb{E} Z_{n,\beta,h,\omega}^\gamma. \end{aligned}$$

Ainsi, si pour certains paramètres on parvient à contrôler  $\mathbb{E} Z_{n,\beta,h,\omega}^\gamma$  alors on montre que pour ces mêmes paramètres l'énergie libre *quenched* est nulle, ce qui nous donne une borne inférieure sur la courbe critique *quenched*. Nous n'allons pour l'instant pas plus loin dans l'explication de cette technique car celle-ci sera mise en place dans le chapitre 4.

Dans les travaux que nous avons cités, il a également été prouvé :

$$h_c^a(\beta) - h_c(\beta) \stackrel{\beta \searrow 0}{\asymp} \begin{cases} \beta^2 & \text{si } \alpha > 1 \\ \beta^2 \tilde{L}(1/\beta) & \text{si } \alpha = 1 \\ \beta^{2\alpha/(2\alpha-1)} & \text{si } 1/2 < \alpha < 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

### Courbe critique *quenched* à haute température.

On sait que pour  $0 \leq \alpha < 1/2$ , alors pour  $\beta$  assez petit,  $h_c(\beta) = h_c^a(\beta) = -\beta^2/2$ , et si  $1/2 \leq \alpha < 1$ , alors d'après (1.12),  $h_c(\beta) \sim -\beta^2/2$  lorsque  $\beta \searrow 0$ . Pour  $\alpha > 1$ , nous savons que  $h_c(\beta)$  est toujours d'ordre  $\beta^2$  lorsque  $\beta \searrow 0$ ,

### 1.3 Le modèle désordonné

---

mais le coefficient exact est inconnu (voir à ce sujet [13, section 1.5]). Nous pouvons toutefois prouver le résultat suivant :

**Théorème 1.3.1.** *Si  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , alors*

$$\limsup_{\beta \searrow 0} \frac{h_c(\beta)}{\beta^2} \leq -\frac{1}{2} \max \left( 1 - \frac{2(1+\alpha)}{m}, 0 \right)$$

Cependant, cette borne ne peut pas être optimale car il se peut très bien que  $m \leq 2(1+\alpha)$ . Notre preuve repose sur une technique de *coarse-graining*, qui a été utilisée dans le contexte des modèles d'accrochage pour mettre en évidence le « lissage » de la transition de phase par la présence d'un désordre *quenched* (cf. [30, section 1.4] et [33]). Nous aurons besoin pendant la preuve du résultat suivant :

**Lemme 1.3.1** (Inégalité de Paley-Zygmund). *Si  $Z$  est une variable aléatoire positive de variance finie, non identiquement nulle, et si  $0 < u < 1$ , alors*

$$\mathbb{P}(Z \geq u\mathbb{E}Z) \geq (1-u)^2 \frac{(\mathbb{E}Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}.$$

*Preuve du théorème 1.3.1.* Nous savons déjà que  $h_c(\beta) \leq 0$ . Ce que nous allons en fait prouver est

$$\limsup_{\beta \searrow 0} \frac{h_c(\beta)}{\beta^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{1+\alpha}{m}.$$

Soit  $\Delta$  un réel positif dont nous préciserons la valeur plus tard, et  $u$  dans  $(0, 1)$ . Nous considérons le modèle d'accrochage à la température inverse  $\beta$ , en  $h = -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2$ . On partitionne les entiers naturels en blocs de longueur  $l \geq 1$ , notés, pour tout  $i \geq 1$ ,

$$B_i = \{(i-1)l + 1, \dots, il\}$$

et on dit que le bloc  $B_i$  est un bon bloc si l'événement

$$E_i = \left\{ Z_\beta^{(i)} \geq u\mathbb{E}[Z_\beta^{(i)}] \right\}$$

est réalisé, où

$$Z_\beta^{(i)} := E \left[ \exp \left( \sum_{k=(i-1)l+1}^{il} (\beta\omega_k + (\Delta - 1/2)\beta^2)\delta_k \right) \delta_{(i-1)l} \delta_{il} \right]$$

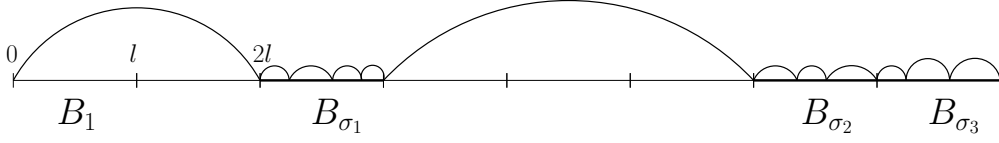


FIGURE 1.4 – Stratégie de localisation utilisée pour la preuve du théorème 1.3.1. Les bons blocs sont les segments en gras.

est une variable aléatoire relativement au désordre. Comme  $\omega$  est une suite de variables aléatoires i.i.d., il en va de même pour la suite de variables aléatoires  $(Z_\beta^{(i)})_{i \geq 1}$ . Notons

$$p(l) = \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P} \left( Z_{l,\beta,-\frac{\beta^2}{2}+\Delta\beta^2}^c \geq u Z_{l,\beta,-\frac{\beta^2}{2}+\Delta\beta^2}^{a,c} \right),$$

et introduisons la suite de temps suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 0, \\ \sigma_n &= \inf \{ i > \sigma_{n-1} : Z_\beta^{(i)} \text{ est un bon bloc} \}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma$  est la suite des indices des bons blocs, et les temps  $\hat{T}_i := \sigma_i - \sigma_{i-1}$  sont mutuellement indépendants et suivent la loi géométrique de paramètre  $p(l)$ . La stratégie à adopter consiste à ne visiter que les bons blocs, en faisant un unique saut entre chaque paire de bons blocs consécutifs (cf. figure 1.4). Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{\sigma_n l} \log Z_{\sigma_n, \beta, -\beta^2/2 + \Delta\beta^2}^c \geq \frac{n}{\sigma_n l} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log E \left[ K((\hat{T}_i - 1)l) Z_\beta^{(\sigma_i)} \right]$$

avec ici la convention  $K(0) = 1$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, on en déduit d'après la loi forte des grands nombres,

$$F(\beta, -(1/2)\beta^2 + \Delta\beta^2) \geq \frac{p(l)}{l} \mathbb{E} \left[ \log \hat{Z} \right].$$

où

$$\hat{Z} := E \left[ K((\hat{T}_1 - 1)l) Z_\beta^{(\sigma_1)} \right].$$

Pour être localisé, il suffit donc d'avoir

$$\frac{1}{l} \mathbb{E} \left[ \log \hat{Z} \right] > 0.$$



### 1.3 Le modèle désordonné

---

Or, pour  $l$  assez grand  $K((\hat{T}_1 - 1)l) \geq (\hat{T}_1 l)^{-(1+\alpha)/u}$ , et comme, par inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E} \log \hat{T}_1 \leq \log \mathbb{E} \hat{T}_1 = -\log p(l),$$

on obtient finalement :

$$\mathbb{E} \left[ \log \hat{Z} \right] \geq \log u + \log Z_{l, \beta, -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2}^{a,c} - \frac{1 + \alpha \log l}{u} + \frac{1 + \alpha \log p(l)}{u}$$

Reste à estimer  $p(l)$ . D'après l'inégalité de Paley-Zygmund,

$$p(l) \geq (1 - u)^2 \frac{\left[ Z_{l, \beta, -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2}^{a,c} \right]^2}{\mathbb{E} \left[ \left( Z_{l, \beta, -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2}^c \right)^2 \right]}.$$

Or, on a d'une part

$$Z_{l, \beta, -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2}^{a,c} = E(e^{\Delta\beta^2 \sum_{k=1}^n \delta_k \delta_n}) \stackrel{(1.7)}{=} e^{lF(\Delta\beta^2)} P_{\Delta\beta^2}(l \in \tau)$$

(cf. partie 1.2.2), et d'autre part, par la méthode des répliques (cf. partie 1.3.3),

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( Z_{l, \beta, -\frac{\beta^2}{2} + \Delta\beta^2}^c \right)^2 \right] &= E^{\otimes 2} \left( \exp \left( \sum_{k=1}^n \beta^2 \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} + \Delta\beta^2 (\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)}) \right) \delta_l^{(1)} \delta_l^{(2)} \right) \\ &\leq \left( E^{\otimes 2} \left[ \exp \left( p\beta^2 \sum_{k=1}^n \delta_k^{(1)} \delta_k^{(2)} \right) \delta_l^{(1)} \delta_l^{(2)} \right] \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left( E^{\otimes 2} \left[ \exp \left( q\Delta\beta^2 \sum_{k=1}^n (\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)}) \right) \delta_l^{(1)} \delta_l^{(2)} \right] \right)^{1/q} \\ &\leq \exp \left( l \frac{F^\cap(p\beta^2)}{p} + 2l \frac{F(q\Delta\beta^2)}{q} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\frac{1}{l} \mathbb{E} \left[ \log \hat{Z} \right] \geq S_1 + S_2$ , avec

$$S_1 = F(\Delta\beta^2) + \frac{1 + \alpha}{u} \left( 2F(\Delta\beta^2) - 2 \frac{F(q\Delta\beta^2)}{q} - \frac{F^\cap(p\beta^2)}{p} \right)$$

et

$$S_2 = \frac{1}{l} \left( \log u + \frac{1 + \alpha}{u} \log(1 - u) + \left( 1 + \frac{1 + \alpha}{u} \right) \log P_{\Delta\beta^2}(l \in \tau) - (1 + \alpha) \log l \right).$$

## Modèles d'accrochage de polymères : généralités et état de l'art.

Notons tout de suite que le terme  $S_2$  tend vers 0 quand la taille des blocs  $l$ , tend vers l'infini, pour toutes valeurs des autres paramètres. Examinons alors le premier terme. Soit  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit. En utilisant le fait que

$$F^\cap(x) \stackrel{x \searrow 0}{\sim} x/m^2$$

(cf. proposition 1.3.2) et

$$F(x) \stackrel{x \searrow 0}{\sim} x/m,$$

on a l'existence d'un réel  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta \leq \beta_0$ ,

$$2F(\Delta\beta^2) - 2\frac{F(q\Delta\beta^2)}{q} - \frac{F^\cap(p\beta^2)}{p} \leq -\frac{\beta^2}{m^2} - \epsilon\beta^2 \left( \frac{4\Delta}{m} + \frac{1}{m^2} \right).$$

Choisissons  $\Delta = \Delta(u, \epsilon) = \frac{(1+\alpha)(1+\sqrt{\epsilon})}{um}$ , de telle sorte que pour  $\beta$  assez petit,  $S_1 > 0$ , et donc en prenant  $l$  assez grand,  $F(\beta, -(1/2)\beta^2 + \Delta(u, \epsilon)\beta^2) > 0$  c'est à dire

$$h_c(\beta) \leq -\frac{\beta^2}{2} + \Delta(u, \epsilon)\beta^2.$$

Ainsi, nous venons de prouver que pour tout  $\epsilon$  assez petit et  $u$  dans  $(0, 1)$ ,

$$\limsup_{\beta \searrow 0} \frac{h_c(\beta)}{\beta^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{(1+\alpha)(1+\sqrt{\epsilon})}{um}.$$

Il suffit maintenant de faire tendre  $\epsilon$  vers 0 et  $u$  vers 1. □

Avec la même méthode, nous pouvons retrouver en partie le résultat (1.12) dans le cas  $1/2 < \alpha < 1$  :

**Théorème 1.3.2.** *Si  $1/2 < \alpha < 1$ , alors pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\beta_0(\delta)$  tel que*

$$\forall \beta \leq \beta_0(\delta), \quad h_c(\beta) - h_c^a(\beta) \leq \beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}-\delta}$$

*Démonstration.* La technique de *coarse-graining* est la même que dans la preuve précédente mais on pose maintenant  $h = -\beta^2/2 + \Delta(\beta)$  avec  $\Delta(\beta) \searrow 0$  lorsque  $\beta \searrow 0$ . D'après le théorème 1.2.3 et la proposition 1.3.2, on a (aux fonctions à variations lentes près)

$$F^\cap(\beta^2) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \beta^{2/(2\alpha-1)}$$

et

$$F(\Delta(\beta)) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} \Delta(\beta)^{1/\alpha}.$$

Ainsi, poser  $\Delta(\beta) = \beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}-\delta}$  ( $\delta > 0$ ) permet de conclure comme dans le cas précédent. □

### 1.3 Le modèle désordonné

---

#### 1.3.4 Désordre ergodique

Il s'avère que la séquence de nucléotides présente dans certaines portions d'ADN ne ressemblent pas à une séquence de variables aléatoires i.i.d., du fait de la présence de corrélations à longue portée dans la séquence (cf. [43, 18]). Quel est l'effet de ces corrélations sur le mécanisme de dénaturation de l'ADN (cf. [6, 37]) ?

Cette question nous amène à considérer un modèle d'accrochage désordonné où les  $(\omega_n)_{n \geq 0}$  ne sont plus nécessairement indépendants (on supposera par contre que la suite  $\omega$  reste stationnaire). Considérons  $(E, \mathcal{F}, \mu, T)$  un système ergodique (cf. (A.1)) et supposons que le désordre soit de la forme

$$\forall n \geq 0, \quad \omega_n(x) = f(T^n x)$$

où  $x$  appartient à  $E$  et  $f : E \mapsto \mathbb{R}$  appartient à  $L^1(\mu)$  et vérifie  $\int f d\mu = 0$  (cela inclut le cas i.i.d.). Alors :

- D'une part, la proposition 1.3.1 reste vraie. En effet, pour tous  $m, n \geq 1$ , on montre en considérant les renouvellements qui passent par le point  $n$  et en utilisant la propriété de Markov que :

$$Z_{n+m, \beta, h, x}^c \geq Z_{n, \beta, h, x}^c Z_{m, \beta, h, T^n x}^c$$

et donc

$$\log Z_{n+m, \beta, h, x}^c \geq \log Z_{n, \beta, h, x}^c + \log Z_{m, \beta, h, T^n x}^c.$$

On obtient d'une part, d'après le théorème ergodique sous-additif de Kingman (cf. théorème A.1.1), la convergence dans  $L^1(\mu)$  et  $\mu$ -ps vers l'énergie libre *quenched* (finie car  $f \in L^1(\mu)$ ) et d'autre part, par stationnarité de  $T$  sous  $\mu$ , que la suite (déterministe)  $((1/n)\mathbb{E} \log Z_{n, \beta, h}^c)_{n \geq 1}$  est sur-additive, et donc l'égalité (1.9) a lieu.

- D'autre part, nous allons prouver que les propriétés mentionnées à la fin de la partie 1.3.2 restent vraies sous réserve que la courbe critique *quenched*  $h_c(\beta)$  soit finie. Montrons tout d'abord que  $F$  est convexe. En effet, on a

$$\partial_\beta F_{n, \beta, h}^c = \mathbb{E} E \left( \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k \exp(H_{n, \beta, h})}{n} \frac{\delta_n}{Z_{n, \beta, h}} \right) \quad (1.13)$$

et donc

$$\begin{aligned} \partial_\beta^2 F_{n,\beta,h}^c &= \mathbb{E} E \left( \frac{(\sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k)^2 \exp(H_{n,\beta,h})}{n Z_{n,\beta,h}} \delta_n \right) \\ &\quad - \mathbb{E} \frac{1}{n} \left[ E \left( \left( \sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k \right) \frac{\exp(H_{n,\beta,h})}{Z_{n,\beta,h}} \delta_n \right) \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \text{Var}_{n,\beta,h}^c \left( \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

On obtient de même

$$\begin{aligned} \partial_h^2 F_{n,\beta,h}^c &= \mathbb{E} \text{Var}_{n,\beta,h}^c \left( \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{\sqrt{n}} \right), \\ \partial_\beta \partial_h F_{n,\beta,h}^c &= \mathbb{E} \text{Cov}_{n,\beta,h}^c \left( \frac{\sum_{k=1}^n \omega_k \delta_k}{\sqrt{n}}, \frac{\sum_{k=1}^n \delta_k}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

et on en déduit la convexité des  $(F_n)_{n \geq 1}$ , et donc de  $F$ . Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{D}$ , qui contient au moins  $\{0\} \times \mathbb{R}^-$ , est convexe. De plus les  $(F_n)_{n \geq 1}$ , et *a fortiori*  $F$ , sont croissantes en  $\beta$  (pour tout  $h$ ). En effet, d'après l'équation (1.13) et le fait que les  $\omega_k$  sont centrés, on a  $\partial_\beta^2 F_{n,\beta,h}^c|_{\beta=0} = 0$  et la croissance s'obtient alors par convexité. De cela on déduit, à condition que  $h_c(\beta)$  soit finie (au sens où  $h_c(\beta) \neq -\infty$ , car on sait déjà que  $h_c(\beta) \leq 0$  puisque  $F(\beta, h) \geq F(0, h) > 0$  lorsque  $h > 0$ ), que la courbe critique *quenched* est concave, continue et décroissante en  $\beta$ .

Voici deux conditions suffisantes pour que la courbe critique *quenched* soit finie.

- S'il existe  $M > 0$  tel que  $\omega_0 \leq M$  presque-sûrement, alors il est facile de voir que  $h_c(\beta) \geq -\beta M$ .
- Si l'énergie libre *annealed*  $F^a(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \log Z_{n,\beta,h}^a$  est bien définie, et si on montre que  $h_c^a(\beta) (:= \sup\{h : F^a(\beta, h) = 0\}) > -\infty$ , alors  $h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) > -\infty$  d'après (1.11).

**D** ans cette thèse nous nous intéressons aux cas suivants :

- désordre gaussien corrélé lorsque les corrélations ont une portée finie (chapitres 2,3 et 4),
- désordre gaussien corrélé lorsque les corrélations décroissent suffisamment rapidement (chapitre 5)
- désordre donné par une chaîne de Markov finie (chapitre 6).

Les autres travaux s'intéressant au modèle d'accrochage dans des environnements corrélés sont à notre connaissance [8, 9].

---

## Chapitre 2

# Corrélations à portée finie : le modèle *annealed*.

### 2.1 Introduction

**Hypothèses.** Dans les chapitres suivants – exception faite du dernier – nous supposons que le désordre  $\omega = (\omega_n)_{n \geq 0}$  est un processus gaussien stationnaire, les  $\omega_n$  n'étant pas nécessairement indépendants. Sans perdre de généralité, on peut supposer

$$\mathbb{E}(\omega_0) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(\omega_0^2) = 1. \quad (2.1)$$

On note les covariances :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_n = \text{Cov}(\omega_0, \omega_n). \quad (2.2)$$

**Remarque 2.1.1.** *Un tel désordre est ergodique dès que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$  (cf. [19, chp 14, §.2, thm 2]), et alors l'énergie libre quenched est bien définie (cf. partie 1.3.4).*

Dans les chapitres 2, 3 et 4 nous mettrons une hypothèse de portée finie sur les corrélations, c'est-à-dire que nous supposerons l'existence d'un entier  $q \geq 1$  tel que

$$n > q \Rightarrow \rho_n = 0. \quad (2.3)$$

De tels processus peuvent être construits simplement. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une famille de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes, et  $(a_0, \dots, a_q)$  dans  $\mathbb{R}^{q+1}$  tel que  $a_0^2 + \dots + a_q^2 = 1$ . Si pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\omega_n = a_0 \varepsilon_n + \dots + a_q \varepsilon_{n-q}, \quad (2.4)$$

alors  $\omega$  vérifie (2.1), (2.2) et (2.3). Les processus  $\omega$  admettant une représentation de la forme (2.4) sont appelés moyennes mobiles d'ordre  $q$ . Réciproquement, tout processus gaussien stationnaire vérifiant (2.3) est une moyenne mobile, cf. [24, X.8] à ce sujet.

Pour simplifier les preuves, nous supposons également :

$$\forall n \geq 1, \quad K(n) > 0, \quad (2.5)$$

bien que les résultats énoncés restent vrais sous l'hypothèse plus faible d'apériodicité (A.2).

Dans ce chapitre nous étudions le modèle *annealed* en utilisant la théorie des renouvellements markoviens (cf. appendice A.3). Celle-ci a aussi été utilisée dans le cas d'un modèle d'accrochage avec désordre périodique [14, 15], d'un modèle de mouillage [55, 54] ainsi qu'un modèle d'interface [11, 12].

**Energie libre *annealed*.** Nous commençons par :

**Théorème 2.1.1.** *Pour tout  $h$  dans  $\mathbb{R}$  et tout  $\beta \geq 0$ , il existe un réel positif  $F^a(\beta, h)$  tel que,*

$$F^a(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\beta,h}^a.$$

*De plus, si  $h_c^a(\beta) := \sup\{h \in \mathbb{R} : F^a(\beta, h) = 0\}$  alors  $h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta)$ .*

Nous donnerons par la suite une expression implicite de l'énergie libre *annealed*, analogue à celle de l'énergie libre homogène. La preuve du théorème 2.1.1 permet de voir la différence entre la fonction de partition *annealed* dans ce cas et la fonction de partition du modèle homogène.

*Démonstration.* On commence par calculer la variance (relativement au désordre) du terme  $\sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n$ . Pour toute réalisation de  $\tau$ ,

$$\text{Var} \left( \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n \right) = \sum_{i,j=1}^N \text{Cov}(\omega_i, \omega_j) \delta_i \delta_j = \sum_{n=1}^N \delta_n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j. \quad (2.6)$$

Alors,

$$Z_{N,\beta,h}^a = E \left\{ \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{n=1}^N \delta_n + \beta^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \rho_k \delta_i \delta_{i+k} \right) \delta_N \right\}. \quad (2.7)$$

## 2.2 Matrices de transfert

---

Nous allons montrer une relation de type sur-additivité pour la fonction de partition *annealed*. Pour un système de taille  $N + M$ , observons que

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq N+M} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j + \sum_{N+1 \leq i < j \leq N+M} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq N < j \leq N+M} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j. \end{aligned}$$

Conditionnellement à  $\{N \in \tau\}$ , le deuxième terme a même loi que la variable aléatoire  $\sum_{1 \leq i < j \leq M} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j$ . Quant au troisième terme, il est plus grand qu'une constante  $C$  qui ne dépend que de  $\rho$  et  $q$ . Il vient :

$$\begin{aligned} &Z_{N+M, \beta, h}^a \\ &\geq E \left\{ \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{n=1}^{N+M} \delta_n + \beta^2 \sum_{1 \leq i < j \leq N+M} \rho_{j-i} \delta_i \delta_j \right) \delta_N \delta_{N+M} \right\} \\ &\geq e^{C\beta^2} Z_{N, \beta, h}^a Z_{M, \beta, h}^a. \end{aligned}$$

En multipliant par  $e^{C\beta^2}$  des deux côtés, en prenant le logarithme, puis en utilisant un argument de sous-additivité classique, on obtient la convergence de la suite  $\left( \frac{1}{N} \log Z_{N, \beta, h}^a \right)_{N \geq 1}$ .  $\square$

Nous voyons dans la preuve que résoudre le modèle *annealed* revient à résoudre un modèle non désordonné dont l'hamiltonien est :

$$\left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{n=1}^N \delta_n + \beta^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \rho_k \delta_i \delta_{i+k} \quad (2.8)$$

Ainsi, l'énergie d'une configuration ne dépend plus seulement du nombre de points de contact, mais également d'un terme additionnel qui prend en compte leurs distances mutuelles. Dans la suite nous supposons  $q \geq 2$  (voir [45, section 4.1] pour le cas  $q = 1$ ).

Avant d'énoncer les résultats de ce chapitre, nous devons introduire les matrices qui vont intervenir dans la résolution du modèle *annealed*.

## 2.2 Matrices de transfert

En mécanique statistique, les fonctions de partition peuvent parfois s'écrire comme le produit itéré d'une matrice à coefficients positifs. Celle-ci est alors appelée matrice de transfert du modèle, et les quantités thermodynamiques s'expriment en fonction de la plus grande valeur propre de celle-ci (valeur

propre de Perron-Frobenius, cf. appendice A.4). Cette technique a été utilisée par exemple pour résoudre le modèle d'Ising unidimensionnel (cf. [25, exemple IV.5.4]). Une situation similaire se présente dans notre cas. Nous définissons maintenant les matrices qui vont intervenir dans la résolution du modèle.

Par la suite on notera  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_q)$  un  $q$ -uplet dans  $(\mathbb{N}^*)^q$ , et si  $(t_n)_{n \geq 1}$  est une suite d'entiers, on notera  $\bar{t}_n := (t_n, \dots, t_{n+q-1})$ . La projection sur la première coordonnée  $\bar{t} \mapsto t_1$  sera notée  $\pi_1$ . Soit  $G$  la fonction sur les  $q$ -uplets définie par

$$G(\bar{t}) = \sum_{k=1}^q \rho_{t_1 + \dots + t_k},$$

que l'on interprète de la manière suivante : si  $\bar{t}$  est le  $q$ -uplet des distances séparant  $q+1$  points de contact consécutifs, alors  $G(\bar{t})$  est la contribution de ces points de contact au deuxième terme de (2.8).

Toute interarrivée strictement supérieure à  $q$  a une contribution nulle dans le calcul de  $G$ . Autrement dit, on peut considérer un nouvel état (un état « cimetière ») noté  $\star$ , et définir pour tout  $t \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\bar{t} \in (\mathbb{N}^*)^q$ ,

$$t^* := t\mathbf{1}_{\{t \leq q\}} + \star\mathbf{1}_{\{t > q\}}$$

et  $\bar{t}^* = (t_1^*, \dots, t_q^*)$ . La fonction  $G$  peut alors être vue comme une fonction de  $\bar{t}^*$  à la place de  $\bar{t}$ , en convenant que  $\rho_\star = 0$  et pour tout  $t \in \{1, \dots, q, \star\}$ ,  $\star + t = t + \star = \star$ . On notera dorénavant  $E = \{1, \dots, q, \star\}$  et  $K(\star) = \sum_{n > q} K(n)$ .

Dans la suite on écrira  $\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}$  (resp.  $\bar{s}^* \rightsquigarrow \bar{t}^*$ ) si pour tout  $i \in \{2, \dots, q\}$ ,  $s_i = t_{i-1}$  (resp.  $s_i^* = t_{i-1}^*$ ). Remarquons maintenant que la suite de  $q$ -uplets  $(\bar{T}_n)_{n \geq 1}$  est une chaîne de Markov sur  $(\mathbb{N}^*)^q$ , et la probabilité d'aller à l'état  $\bar{t} = (t_1, \dots, t_q)$  partant de l'état  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q)$  s'écrit

$$Q(\bar{s}, \bar{t}) := K(t_q)\mathbf{1}_{\{\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}\}}.$$

La matrice  $Q$  est irréductible d'après l'hypothèse de positivité (2.5) sur les  $(K(n))_{n \geq 1}$ . On définit maintenant les matrices positives  $Q_\beta$  et  $Q_\beta^*$ , qui joueront le rôle de matrices de transfert :

$$Q_\beta(\bar{s}, \bar{t}) = e^{\beta^2 G(\bar{t})} K(t_q)\mathbf{1}_{\{\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}\}} = e^{\beta^2 G(\bar{t})} Q(\bar{s}, \bar{t})$$

et

$$Q_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) = e^{\beta^2 G(\bar{t}^*)} K(t_q^*)\mathbf{1}_{\{\bar{s}^* \rightsquigarrow \bar{t}^*\}}.$$

On écrira  $Q^*$  au lieu de  $Q_0^*$ . Comme  $Q_\beta^*$  est une matrice positive irréductible sur l'espace d'état fini  $E^q$ , nous savons par le théorème de Perron-Frobenius



## 2.2 Matrices de transfert

---

(cf. appendice A.4) qu'il existe une valeur propre de plus grand module (valeur propre de Perron-Frobenius) notée  $\lambda(\beta)$ , à laquelle on associe un vecteur propre à droite strictement positif  $\nu_\beta^* = (\nu_\beta^*(x))_{x \in E^q}$ . Pour tout  $q$ -uplet  $\bar{t}$ , on définit  $\nu_\beta(\bar{t}) = \nu_\beta^*(\bar{t}^*)$ .

**Lemme 2.2.1.** *Les matrices  $\tilde{Q}_\beta$  et  $\tilde{Q}_\beta^*$ , définies par  $\tilde{Q}_\beta(\bar{s}, \bar{t}) := \frac{Q_\beta(\bar{s}, \bar{t})\nu_\beta(\bar{t})}{\lambda(\beta)\nu_\beta(\bar{s})}$  et  $\tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) := \frac{Q_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*)\nu_\beta^*(\bar{t}^*)}{\lambda(\beta)\nu_\beta^*(\bar{s}^*)}$  pour tout  $\bar{s}, \bar{t}$  dans  $\mathbb{N}^{*q}$ , sont des matrices de transition.*

*Démonstration.* Pour  $\tilde{Q}_\beta^*$ , cela découle directement de la relation  $Q_\beta^*\nu_\beta^* = \lambda(\beta)\nu_\beta^*$  et du fait que  $\lambda(\beta)$  et les coefficients de  $\nu_\beta$  sont strictement positifs. En ce qui concerne  $\tilde{Q}_\beta$ , on a pour tout  $\bar{s} = (s_1, \dots, s_q)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{t}} Q_\beta(\bar{s}, \bar{t})\nu_\beta(\bar{t}) &= \sum_{t \geq 1} e^{\beta^2 G(s_2, \dots, s_q, t)} K(t)\nu_\beta(s_2, \dots, s_q, t) \\ &= \sum_{t \geq 1} e^{\beta^2 G(s_2^*, \dots, s_q^*, t^*)} K(t)\nu_\beta^*(s_2^*, \dots, s_q^*, t^*) \\ &= \sum_{t^* \in E} e^{\beta^2 G(s_2^*, \dots, s_q^*, t^*)} K(t^*)\nu_\beta^*(s_2^*, \dots, s_q^*, t^*) \\ &= \lambda(\beta)\nu_\beta^*(\bar{s}^*) \\ &= \lambda(\beta)\nu_\beta(\bar{s}), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Comme  $\tilde{Q}_\beta^*$  est une matrice de transition finie et irréductible (elle a la même matrice d'incidence que  $Q_\beta^*$ , qui est irréductible), elle possède une unique probabilité invariante notée  $\mu_\beta^*$ . Définissons  $\mu_\beta$  une mesure sur  $(\mathbb{N}^*)^q$  par

$$\mu_\beta(\bar{t}) = \frac{K(t_1)}{K(t_1^*)} \cdots \frac{K(t_q)}{K(t_q^*)} \mu_\beta^*(\bar{t}^*).$$

Alors :

**Lemme 2.2.2.** *La mesure  $\mu_\beta$  est la probabilité invariante de  $\tilde{Q}_\beta$ .*

*Démonstration.* Par un calcul direct,  $\mu_\beta$  est une probabilité. Prouvons qu'elle

est invariante par  $\tilde{Q}_\beta$ . Pour tout  $\bar{t} \in (\mathbb{N}^*)^q$ , on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\bar{s}} \mu_\beta(\bar{s}) \tilde{Q}_\beta(\bar{s}, \bar{t}) \\
 &= \lambda(\beta)^{-1} e^{\beta^2 G(\bar{t})} \nu_\beta(\bar{t}) K(t_q) \sum_{s \geq 1} \frac{\mu_\beta(s, t_1, \dots, t_{q-1})}{\nu_\beta(s, t_1, \dots, t_{q-1})} \\
 &= \lambda(\beta)^{-1} e^{\beta^2 G(\bar{t}^*)} \nu_\beta^*(\bar{t}^*) K(t_q) \\
 &\times \sum_{s \geq 1} \frac{K(s) K(t_1) \dots K(t_{q-1})}{K(s^*) K(t_1^*) \dots K(t_{q-1}^*)} \frac{\mu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)}{\nu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)} \\
 &= \lambda(\beta)^{-1} e^{\beta^2 G(\bar{t}^*)} \nu_\beta^*(\bar{t}^*) K(t_q^*) \frac{\mu_\beta(\bar{t})}{\mu_\beta^*(\bar{t}^*)} \sum_{s \geq 1} \frac{K(s)}{K(s^*)} \frac{\mu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)}{\nu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)} \\
 &= \lambda(\beta)^{-1} e^{\beta^2 G(\bar{t}^*)} \nu_\beta^*(\bar{t}^*) K(t_q^*) \frac{\mu_\beta(\bar{t})}{\mu_\beta^*(\bar{t}^*)} \sum_{s^* \in E^q} \frac{\mu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)}{\nu_\beta^*(s^*, t_1^*, \dots, t_{q-1}^*)} \\
 &= \mu_\beta(\bar{t}),
 \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière ligne le fait que  $\mu_\beta^*$  est la probabilité invariante de  $\tilde{Q}_\beta^*$ .  $\square$

Enfin, on introduit les matrices

$$\tilde{Q}_{\beta, F}(\bar{s}, \bar{t}) = e^{-F t_q} \tilde{Q}_\beta(\bar{s}, \bar{t})$$

et

$$\tilde{Q}_{\beta, F}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) = e^{-F \phi_F(t_q^*)} \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*)$$

où  $\phi_F(s^*) = s^*$  si  $s^* \in \{1, \dots, q\}$  et

$$\phi_F(\star) = -\frac{1}{F} \log \frac{\sum_{t > q} e^{-F t} K(t)}{K(\star)},$$

i.e.  $\phi_F(\star)$  vérifie

$$e^{-F \phi_F(\star)} K(\star) = \sum_{t > q} e^{-F t} K(t). \quad (2.9)$$

On note  $\Lambda(\beta, F)$  la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice irréductible  $\tilde{Q}_{\beta, F}^*$ .

## 2.3 Résultats

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat principal de cette partie sur le modèle *annealed*. Celui-ci donne une expression de la courbe critique *annealed* faisant intervenir la valeur propre  $\lambda(\beta)$  définie précédemment, ainsi qu'une expression implicite de l'énergie libre qui est analogue à celle de l'énergie libre pour le modèle homogène (cf. (1.5)). La transformée de Laplace de  $\tau$  y est remplacée par la valeur propre d'une matrice constituée d'autres transformées de Laplace (les coefficients de  $\tilde{Q}_{\beta,F}^*$ ).

**Théorème 2.3.1.** *Pour tout  $\alpha \geq 0$  et tout  $\beta \geq 0$ ,*

$$h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta).$$

*De plus, si  $h > h_c^a(\beta)$ ,  $F^a(\beta, h)$  est l'unique solution de l'équation*

$$\Lambda(\beta, F) = \exp(h_c^a(\beta) - h).$$

Les deux résultats suivants sont des corollaires de ce théorème au sens où ils s'obtiennent en effectuant un développement limité des valeurs propres apparaissant dans le théorème 2.3.1. Le premier donne un équivalent de la courbe critique *annealed* à « haute température », c'est-à-dire pour  $\beta$  proche de 0. Le coefficient obtenu fait apparaître la somme des corrélations pondérées par les fonctions de Green  $(P(n \in \tau))_{1 \leq n \leq q}$ . Cela est cohérent avec le fait que si  $P(k \in \tau) = 0$  pour un certain entier  $k$  alors  $\tau$  ne peut contenir deux sites distants de  $k$  et donc les corrélations entre  $\omega_m$  et  $\omega_{m+k}$  ( $m \geq 1$ ) n'ont aucun effet.

**Proposition 2.3.1.** *La courbe critique *annealed* admet le développement suivant au voisinage de 0 :*

$$h_c^a(\beta) \stackrel{\beta \rightarrow 0}{\sim} - \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^q \rho_n P(n \in \tau) \right) \frac{\beta^2}{2}.$$

Quant au deuxième résultat, il affirme que l'ordre de la transition de phase est le même que dans le cas homogène :

**Proposition 2.3.2.** *Il existe une fonction à variation lente  $L'_\beta$  telle que*

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta) \stackrel{\Delta \searrow 0}{\sim} L'_\beta(1/\Delta) \Delta^{\max(1, 1/\alpha)}.$$

## 2.4 Un renouvellement « avec mémoire »

Dans cette partie nous faisons le lien entre le modèle *annealed* et des processus de renouvellement qui possèdent une mémoire dont la portée est directement liée à celle des corrélations. Plus précisément, la loi d'une interarrivée dépendra des  $q - 1$  interarrivées précédentes (cf. figure 2.1). Pour définir de tels processus, nous partons des matrices de transfert définies dans la section 2.2.

Pour tout  $\beta \geq 0$ , soit  $P_\beta$  la loi sur les suites de temps  $(T_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$P_\beta(T_1 = t_1, \dots, T_q = t_q) = \prod_{k=1}^q K(t_k),$$

et pour tout  $k \geq 0$ ,

$$P_\beta(T_{k+q+1} = t_{q+1} | T_{k+1} = t_1, \dots, T_{k+q} = t_q) = \tilde{Q}_\beta((t_1, \dots, t_q), (t_2, \dots, t_{q+1}))$$

(à ne pas confondre avec les lois introduites à la fin de la partie 1.2.2). Notons que pour  $\beta = 0$  cette loi n'est rien d'autre que la loi  $K^{\otimes \mathbb{N}^*}$ . Pour déterminer la loi de  $T_{k+q+1}$  conditionnellement au passé, seule la valeur de  $\overline{T}_{k+1}^*$  importe (et non  $\overline{T}_{k+1}$ ). Cela se vérifie en écrivant

$$\begin{aligned} P_\beta(T_{k+q+1} = t_{q+1} | T_{k+1} = t_1, \dots, T_{k+q} = t_q) \\ &= \tilde{Q}_\beta^*((t_1^*, \dots, t_q^*), (t_2^*, \dots, t_{q+1}^*)) \times \frac{K(t_{q+1})}{K(t_{q+1}^*)} \\ &= P_\beta(T_{k+q+1} = t_{q+1} | T_{k+1}^* = t_1^*, \dots, T_{k+q}^* = t_q^*). \end{aligned}$$

Sous  $P_\beta$ ,  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  est donc un processus de renouvellement markovien (retardé) de chaîne modulante  $(\overline{T}_{k-q}^*)_{k \geq q+1}$ , et dont le noyau s'écrit : pour tout  $n \geq 1$ ,  $x, y \in E^q$ ,

$$P_\beta(T_{k+q+1} = n, \overline{T}_{k+2}^* = y | \overline{T}_{k+1}^* = x) = \tilde{Q}_\beta^*(x, y) \frac{K(n)}{K(y_q)} \mathbf{1}_{\{n^* = y_q\}}.$$

Les définitions de ces notions sont données dans l'appendice A.3.

## 2.5 Preuve du théorème 2.3.1

La première étape est de faire apparaître la loi  $P_\beta$  définie précédemment dans la fonction de partition *annealed*. C'est l'objet des deux lemmes suivants. On rappelle que  $\nu_N = \sum_{n=1}^N \delta_n$ .

## 2.5 Preuve du théorème 2.3.1

---

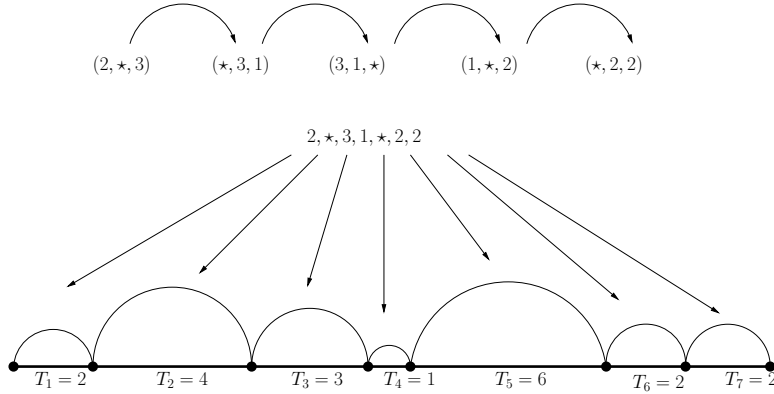


FIGURE 2.1 – Exemple de construction des premiers pas du renouvellement markovien de loi  $P_\beta$  (cf. partie 2.4), dans le cas  $q = 3$ . En haut : partant d'un triplet initial dans  $\{1, 2, 3, *\}$  (ici le triplet  $(2, *, 3)$ ), une suite de triplets est générée par la chaîne de Markov  $\tilde{Q}_\beta^*$ . En bas : en mettant bout à bout le premier triplet et les dernières composantes des triplets suivants, on obtient la suite des interarrivées du processus, à condition de remplacer chaque  $*$  par un temps aléatoire  $T$  choisi suivant le noyau  $K(\cdot)$  conditionnellement à  $T > 3$ .

**Lemme 2.5.1.** Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta \geq 0$ ,

$$F^a(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log E \left( e^{(h + \frac{\beta^2}{2})\iota_N + \beta^2 \sum_{n=1}^{\iota_N} G(\bar{T}_n)} \delta_N \right).$$

*Démonstration.* Rappelons que la fonction de partition *annealed* est donnée dans l'égalité (2.7). Notons aussi que

$$\sum_{n=1}^{\iota_N} G(\bar{T}_n) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q \rho_k \delta_i \delta_{i+k}.$$

De plus, il existe une constante  $C(\rho, q)$  telle que

$$\left| \sum_{n=1}^{\iota_N} G(\bar{T}_n) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \rho_k \delta_i \delta_{i+k} \right| \leq C(\rho, q).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^q \rho_k \delta_i \delta_{i+k} &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^q \rho_k \delta_i \delta_{i+k} + \sum_{k=1}^q \rho_k \delta_N \delta_{N+k} \\
 &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-i} \rho_k \delta_i \delta_{i+k} + \sum_{k=1}^q \rho_k \delta_N \delta_{N+k} \\
 &\quad + \sum_{i=N-q+1}^{N-1} \sum_{k=N-i+1}^q \rho_k \delta_i \delta_{i+k}
 \end{aligned}$$

où le second terme est majoré en valeur absolue par  $q \times \max_{1 \leq i \leq q} |\rho_i|$  et le troisième terme par  $\frac{q(q+1)}{2} \times \max_{1 \leq i \leq q} |\rho_i|$ . Cela suffit pour conclure.  $\square$

**Lemme 2.5.2.** *Pour tout  $h \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta \geq 0$ ,*

$$F^a(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log E_\beta \left( e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta)\right) \iota_N} \delta_N \right).$$

*Démonstration.* Premièrement, on décompose suivant les valeurs de  $\iota_N$  :

$$\begin{aligned}
 &E \left( e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2}\right) \iota_N + \beta^2 \sum_{n=1}^{\iota_N} G(\bar{T}_n)} \delta_N \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2}\right) n} \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \\ t_1 + \dots + t_n = N}} e^{\beta^2 \sum_{k=1}^n G(\bar{t}_k)} Q(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots Q(\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_n) K^{\otimes q}(\bar{t}_1) \\
 &= \sum_{n=1}^N \frac{e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta)\right) n}}{\lambda(\beta)^n} \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \\ t_1 + \dots + t_n = N}} Q_\beta(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots Q_\beta(\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_n) K^{\otimes q}(\bar{t}_1) \\
 &= \sum_{n=1}^N e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta)\right) n} \\
 &\quad \times \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \\ t_1 + \dots + t_n = N}} \frac{\nu_\beta(\bar{t}_1)}{\nu_\beta(\bar{t}_n)} \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_n) K^{\otimes q}(\bar{t}_1).
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 &E_\beta \left( e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta)\right) \iota_N} \delta_N \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta)\right) n} \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \\ t_1 + \dots + t_n = N}} \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_{n-1}, \bar{t}_n) K^{\otimes q}(\bar{t}_1)
 \end{aligned}$$

## 2.5 Preuve du théorème 2.3.1

---

Comme  $\nu_\beta(\bar{t}) = \nu_\beta^*(\bar{t}^*)$  et  $\nu^*$  est un vecteur à coefficients strictement positifs, il existe deux constantes  $c$  et  $C$  telles que pour tout  $\bar{t}_1, \bar{t}_n$ ,

$$c \leq \frac{\nu_\beta(\bar{t}_1)}{\nu_\beta(\bar{t}_n)} \leq C.$$

On conclut en utilisant cette remarque et le lemme 2.5.1.  $\square$

Dans le cas où  $\sum_{n \geq 1} nK(n) < \infty$ , il est possible d'obtenir le premier point du théorème 2.3.1 assez rapidement, comme cela est fait dans [45]. Ici, nous donnons la preuve directement dans le cas général.

Le point de départ est le lemme 2.5.2. Nous allons en fait déterminer l'énergie libre du modèle d'accrochage lorsque  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  a pour loi  $P_\beta$ . Soit  $\epsilon > 0$  fixé.

**Lemme 2.5.3.** *Il existe un unique réel strictement positif, que nous noterons  $F_\beta(\epsilon)$ , solution de l'équation*

$$\Lambda(\beta, F_\beta(\epsilon)) = \exp(-\epsilon).$$

*Démonstration.* Les composantes de  $\tilde{Q}_{\beta, F}^*$  sont strictement décroissantes et  $C^\infty$  relativement à  $F$ . On se réfère à l'appendice A.4 pour les affirmations suivantes. Comme  $\Lambda(\beta, F)$  est une solution de multiplicité un du polynôme caractéristique de  $\tilde{Q}_{\beta, F}^*$ ,  $\Lambda(\beta, F)$  est aussi une fonction  $C^\infty$  de  $F$  d'après le théorème des fonctions implicites. D'après la relation

$$\Lambda(\beta, F) = \max_{\substack{v \geq 0 \\ \sum_{E^q} v_i = 1}} \min_{j: v_j > 0} \frac{(\tilde{Q}_{\beta, F}^* v)_j}{v_j},$$

$\Lambda(\beta, F)$  est strictement décroissant en  $F$  et tend vers 0 quand  $F$  tend vers  $+\infty$ . Comme  $\Lambda(\beta, 0) = 1 > \exp(-\epsilon)$ , le lemme est prouvé.  $\square$

Soit  $\tilde{\nu}^*$  un vecteur propre (à droite) de Perron-Frobenius pour  $\tilde{Q}_{\beta, F_\beta(\epsilon)}^*$ , et  $\tilde{\nu}$  défini par

$$\tilde{\nu}(\bar{t}) = \tilde{\nu}^*(\bar{t}^*). \quad (2.10)$$

**Lemme 2.5.4.** *Les matrices*

$$P_F(\bar{s}, \bar{t}) := \tilde{Q}_{\beta, F_\beta(\epsilon)}^*(\bar{s}, \bar{t}) \frac{\tilde{\nu}(\bar{t})}{\tilde{\nu}(\bar{s})} \quad (2.11)$$

et

$$P_F^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) := \tilde{Q}_{\beta, F_\beta(\epsilon)}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \frac{\tilde{\nu}^*(\bar{t}^*)}{\tilde{\nu}^*(\bar{s}^*)} \quad (2.12)$$

sont des matrices de transition irréductibles. De plus, si l'on note  $l^*$  l'unique probabilité invariante de  $P_F^*$ , et que l'on définit pour tout  $\bar{s}$  dans  $\mathbb{N}^{*q}$

$$l(\bar{s}) := l^*(\bar{s}^*) \prod_{j=1}^q \frac{K(s_j) e^{-F_\beta(\epsilon) s_j}}{K(s_j^*) e^{-F_\beta(\epsilon) \phi_{F_\beta(\epsilon)}(s_j^*)}}, \quad (2.13)$$

alors  $l$  est la probabilité invariante de  $P_F$ .

*Démonstration.* La preuve est laissée au lecteur car elle consiste en des calculs directs semblables à ceux des lemmes 2.2.1 et 2.2.2.  $\square$

Notons que tout comme  $Q_\beta$  et  $\tilde{Q}_\beta$ ,  $P_F$  satisfait la condition

$$P_F(\bar{s}, \bar{t}) \neq 0 \Leftrightarrow \bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}.$$

Cela nous permet de définir d'une manière semblable à la section 2.4 une nouvelle loi  $P^{(F)}$  sur  $\tau$ , pour laquelle  $(\bar{T}_n)_{n \geq 1}$  est une chaîne de Markov de noyau de transition  $P_F$  et de probabilité initiale  $l$ . Nous poursuivons avec le lemme suivant :

**Lemme 2.5.5.** *Il existe deux constantes  $C \geq c > 0$  telles que*

$$ce^{F_\beta(\epsilon)N} P^{(F)}(N \in \tau) \leq E_\beta(\exp(\epsilon t_N) \delta_N) \leq Ce^{F_\beta(\epsilon)N} P^{(F)}(N \in \tau).$$

*Démonstration.* En décomposant la fonction de partition et en utilisant (2.11) on obtient

$$\begin{aligned} & E_\beta(\exp(\epsilon t_N) \delta_N) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n-q+1} \\ t_1 + \dots + t_n = N}} e^{\epsilon n} \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots \tilde{Q}_\beta(\bar{t}_{n-q}, \bar{t}_{n-q+1}) K^{\otimes q}(\bar{t}_1) \\ &= e^{F_\beta(\epsilon)N} \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{n-q+1} \\ t_1 + \dots + t_n = N}} P_F(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \dots P_F(\bar{t}_{n-q}, \bar{t}_{n-q+1}) l(\bar{t}_1) \\ &\quad \times \left( \frac{\tilde{\nu}(\bar{t}_1)}{\tilde{\nu}(\bar{t}_{n-q+1})} \frac{K^{\otimes q}(\bar{t}_1) e^{-\tilde{F}(\epsilon)(t_1 + \dots + t_q)}}{l(\bar{t}_1)} e^{\epsilon q} \right). \end{aligned}$$

D'après (2.10), (2.13) et la finitude de  $E^q$ , le terme entre parenthèses est borné inférieurement et supérieurement par deux constantes  $c$  et  $C$ .  $\square$

On en déduit enfin :



## 2.5 Preuve du théorème 2.3.1

---

**Lemme 2.5.6.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log E_\beta (\exp(\epsilon \nu_N) \delta_N) = F_\beta(\epsilon) > 0.$$

*Démonstration.* Comme  $P^{(F)}(N \in \tau) \leq 1$ , il suffit de prouver que

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} P^{(F)}(N \in \tau) > 0.$$

On va utiliser un argument qui apparaît dans l'étude du modèle d'accrochage avec un potentiel périodique (cf. [7, Chp VII.4], [14], [30, Chp 3], et appendice A.3, paragraphe sur les renouvellements induits). Prenons l'état  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in (\mathbb{N}^*)^q$  et considérons  $(\theta_n)_{n \geq 0}$  la suite de temps d'arrêts suivante :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \inf\{n \geq 1 : \bar{T}_n = \mathbf{1}\}, \\ \theta_{k+1} &= \inf\{n > \theta_k : \bar{T}_n = \mathbf{1}\}. \end{aligned}$$

Comme  $(\bar{T}_n)_{n \geq 0}$  est récurrente positive sous  $P^{(F)}$ , ces temps d'arrêts sont presque-sûrement finis. Si on définit le processus  $\tau^\theta$  par  $\tau_n^\theta := \tau_{\theta_n}$  alors il est clair que

$$P^{(F)}(N \in \tau) \geq P^{(F)}(N \in \tau^\theta).$$

Par la propriété forte de Markov,  $\tau^\theta$  est un processus de renouvellement (retardé) dont les interarrivées ont pour espérance :

$$\begin{aligned} m &:= E_{\mathbb{1}}^{(F)}(T_1 + \dots + T_{\theta_0-1}) = E_{\mathbb{1}}^{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_1(\bar{T}_n) \mathbf{1}_{\{\theta_0 > n\}} \\ &= \sum_{\bar{t}} \pi_1(\bar{t}) E_{\mathbb{1}}^{(F)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\bar{T}_n = \bar{t}, \theta_0 > n\}} \\ &= \sum_{\bar{t}} \pi_1(\bar{t}) \frac{l(\bar{t})}{l(\mathbb{1})} \\ &= \frac{\sum_{k \geq 1} k (l \circ \pi_1^{-1})(k)}{l(\mathbb{1})} < \infty. \end{aligned}$$

Par le théorème du renouvellement il vient :

$$P^{(F)}(N \in \tau^\theta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1/m > 0,$$

ce qui achève la preuve. □

Combiné au lemme 2.5.2, le lemme précédent affirme que

$$F^a \left( \beta, -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta) + \epsilon \right) = F_\beta(\epsilon).$$

Ce dernier point et le lemme 2.5.3 permettent de terminer la preuve du théorème 2.3.1.

---

## 2.6 Preuve de la proposition 2.3.1

Pour prouver la proposition 2.3.1, il suffit d'après le théorème 2.3.1 d'effectuer un développement de  $\lambda(\beta)$  au premier ordre en  $\beta^2$ . D'une part,  $\lambda(0) = 1$  et le vecteur  $\mathbf{1}$  est vecteur propre (à droite) de  $Q^*$  pour la valeur propre 1. D'autre part, la probabilité invariante de  $Q^*$  est donnée simplement par  $\mu_0^*(x) = K(x_1) \dots K(x_q)$  pour tout  $x$  dans  $E^q$ . Nous avons de plus pour tous  $x, y$  dans  $E^q$ ,

$$\frac{\partial Q_\beta^*(x, y)}{\partial \beta^2}(\beta = 0) = G(y)Q^*(x, y)$$

et donc d'après (A.6) (conséquence de la proposition A.4.1), on a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta^2}(\beta = 0) = E_{\mu_0^*}(G(\bar{T}_1)) = \sum_{n=1}^q \rho_n P(n \in \tau)$$

ce qui suffit pour conclure.

## 2.7 Preuve de la proposition 2.3.2

Nous rappelons (cf. lemme 2.5.3) que l'énergie libre *annealed* est définie implicitement par

$$\Lambda(\beta, F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta)) = e^{-\Delta}$$

où  $\Delta > 0$  et  $\Lambda(\beta, F)$  est la valeur propre de Perron-Frobenius de  $\tilde{Q}_{\beta, F}^*$ . Nous pouvons le réécrire de la façon suivante :

$$1 - \Lambda(\beta, F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \Delta)) = 1 - e^{-\Delta},$$

et comme le terme de droite est de l'ordre de  $\Delta$  lorsque  $\Delta$  tend vers 0, il suffit de trouver un équivalent de  $1 - \Lambda(\beta, F)$  lorsque  $F$  tend vers 0. Nous utilisons pour cela la relation (cf. proposition A.4.1)

$$1 - \Lambda(\beta, F) \stackrel{F \searrow 0}{\sim} \mu_\beta^*(\tilde{Q}_\beta^* - \tilde{Q}_{\beta, F}^*)\mathbf{1}. \quad (2.14)$$

Si  $t_q^*$  appartient à  $\{1, \dots, q\}$ , alors

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) - \tilde{Q}_{\beta, F}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) &= \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*)(1 - e^{-F t_q^*}) \\ &\stackrel{F \searrow 0}{\sim} \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) t_q^* F. \end{aligned}$$

Si  $t_q^* = \star$ ,

$$\tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) - \tilde{Q}_{\beta, F}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) = \frac{\tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*)}{K(\star)} \left( K(\star) - \sum_{t>q} K(t) e^{-Ft} \right).$$

## 2.7 Preuve de la proposition 2.3.2

---

Nous distinguons alors deux cas. Si  $\tau_1$  est intégrable, nous avons (cf. proposition A.2.2)

$$\tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) - \tilde{Q}_{\beta, F}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \stackrel{F \searrow 0}{\sim} \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) E(\tau_1 | \tau_1 > q) F.$$

et donc

$$1 - \Lambda(\beta, F) \stackrel{F \searrow 0}{\sim} c_\beta F,$$

où

$$c_\beta = E_{\mu_\beta^*}(T_q^* \mathbf{1}_{\{T_q \leq q\}}) + P_{\mu_\beta^*}(T_q^* = \star) E(\tau_1 | \tau_1 > q) = E_{\mu_\beta}(T_q).$$

Dans le cas contraire,

$$\tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) - \tilde{Q}_{\beta, F}^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) \stackrel{F \searrow 0}{\sim} \tilde{Q}_\beta^*(\bar{s}^*, \bar{t}^*) L_\star(1/F) F^\alpha$$

où  $L_\star$  est une fonction à variation lente, et donc

$$1 - \Lambda(\beta, F) \stackrel{F \searrow 0}{\sim} c_\beta L_\star(1/F) F^\alpha$$

où

$$c_\beta = P_{\mu_\beta}(T_q > q).$$

Ceci conclut la preuve.

Dans le cas où  $E(\tau_1)$  est fini, nous avons de plus que la pente de l'énergie libre *annealed* au voisinage de son point critique est  $1/E_{\mu_\beta}(T_q)$ . De manière tout à fait analogue au cas homogène (cf. (1.6)), il s'agit de la densité de contact limite lorsque  $\tau$  suit le processus de renouvellement markovien  $P_\beta$ .



---

## Chapitre 3

# Corrélations à portée finie : régime non pertinent.

Les hypothèses faites sur le désordre sont les mêmes que celles du chapitre précédent. Nous nous intéressons ici au régime non-pertinent, c'est à dire lorsque les points et exposants critiques *quenched* sont les mêmes que dans le cas *annealed*, et obtenons un critère identique au cas du désordre i.i.d. La preuve, basée sur la méthode des répliques (voir section 1.3.3), fait intervenir l'intersection de deux renouvellements markoviens indépendants suivant la loi décrite dans la partie précédente.

### 3.1 Résultat

Sous certaines hypothèses sur  $K$  et  $\beta$ , les exposants ainsi que les courbes critiques *quenched* et *annealed* coïncident. Dans ce cas, on dit que le désordre est non-pertinent.

**Théorème 3.1.1.** *Si  $\alpha \in (0, 1/2)$  ou si  $\alpha = 1/2$  et  $L$  est tel que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nL(n)^2} < \infty$$

*alors il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour  $\beta \leq \beta_0$ ,  $h_c(\beta) = h_c^a(\beta)$  et*

$$\lim_{h \rightarrow h_c^a(\beta)^+} \frac{\log(F(\beta, h))}{\log(h - h_c^a(\beta))} = \frac{1}{\alpha} \quad (3.1)$$

Il s'agit des mêmes hypothèses que pour le cas i.i.d., la différence étant qu'ici nous n'avons pas de borne explicite pour  $\beta_0$ . Notons qu'il suffit détablir

la partie lim sup de (3.1), la partie lim inf découlant de l'inégalité  $F(\beta, h) \leq F^a(\beta, h)$  et de la proposition 2.3.2. Nous utilisons la méthode qui consiste à contrôler le second moment de la fonction de partition au point critique *annealed*. De manière analogue au cas i.i.d., cela fait intervenir des intersections de répliques de nos renouvellements sous la loi  $P_\beta$ , mais des difficultés surgissent du fait de la dépendance en  $\beta$  de loi de ces renouvellements markoviens (cf. fin de la partie 3.2). Une fois le moment d'ordre deux contrôlé, nous nous inspirons de [40] pour conclure, bien que nous n'ayons pas besoin de martingale dans notre problème.

Nous supposons jusqu'à la fin de la partie 3 que  $\alpha$  satisfait les hypothèses du théorème 3.1.1, et nous adoptons les notations suivantes :

$$K_{\beta,x,y}(n) = P_\beta(T_k = n, \bar{T}_{k-q+1}^* = y | \bar{T}_{k-q}^* = x)$$

et

$$P_{\beta,x,y}(n \in \tau) = \sum_{k \geq 0} P_\beta(\tau_k = n, \bar{T}_{k-q+1}^* = y | \bar{T}_{1-q}^* = x).$$

Nous procédons de la manière suivante : dans un premier temps nous étudions l'intersection de deux répliques de  $\tau$  sous la loi du renouvellement markovien  $P_\beta$  ; dans une deuxième partie nous contrôlons le moment d'ordre deux de la fonction de partition ; enfin, nous exploitons ce résultat pour établir la partie lim sup et conclure la preuve du théorème 3.1.1.

## 3.2 Intersection de renouvellements markoviens

Le résultat principal de cette partie est :

**Proposition 3.2.1.** *Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta \leq \beta_0$  et pour tout  $l \in \{0, \dots, q\}$ ,*

$$E_\beta^{\otimes 2} \left( \exp \left( \beta^2 \sum_{n \geq 1} \delta_n^{(1)} \delta_{n+l}^{(2)} \right) \right) < \infty.$$

Comme cela sera expliqué plus tard, il suffit de considérer le cas  $l = 0$ , lorsque le terme à l'intérieur de l'exponentielle est égal au nombre d'intersection entre deux copies indépendantes d'un processus de renouvellement markovien de loi  $P_\beta$ . Commençons par observer la chose suivante :

**Proposition 3.2.2.** *Si  $\tau^{(1)}$  et  $\tau^{(2)}$  sont deux copies indépendantes d'un processus de renouvellement markovien de loi  $P_\beta$ , alors  $\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}$  est un processus de renouvellement markovien (retardé).*

### 3.2 Intersection de renouvellements markoviens

---

Pour la preuve, voir l'appendice, proposition A.3.1. Nous notons  $P_\beta^\cap$  la loi de ce processus de renouvellement markovien « intersection », dont la chaîne modulante est à valeurs dans  $(E^q)^2$ , et  $(K_{\beta,x,y}^\cap(n))_{n \geq 1, x,y \in (E^q)^2}$  son (sous-)noyau. Nous allons donc montrer que

$$E_\beta^\cap \left( \exp(\beta^2 \sum_{n \geq 1} \delta_n) \right) < \infty$$

si  $\beta$  est assez petit.

Définissons les matrices  $\varphi_\beta(\lambda)$  et  $\phi_\beta(\lambda)$  (pour  $\lambda \geq 0$ ) dont les coefficients sont les transformées de Laplace suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta,x,y}(\lambda) &:= \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau), \\ \phi_{\beta,x,y}(\lambda) &:= \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} K_{\beta,x,y}^\cap(n). \end{aligned}$$

Notons alors que  $\phi_\beta(0)$  est la matrice des  $P_{\beta,x,y}^\cap(\tau_1 < \infty)$  pour  $x, y \in (E^q)^2$ .

**Proposition 3.2.3.** *La matrice positive  $\phi_\beta(0)$  est irréductible. Si l'on note  $\theta(\beta)$  sa valeur propre de Perron-Frobenius alors*

1.  $\theta(0) = P^{\otimes 2}((\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)})_1 < \infty) = 1 - (\sum_{n \geq 0} P(n \in \tau)^2)^{-1} < 1$ .
2. Pour tout  $\beta$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$P_\beta^\cap \left( \sum_{n \geq 1} \delta_n \geq N \right) \leq c \times \theta(\beta)^N.$$

*Démonstration.* Commençons par l'irréductibilité. Soit  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$  et  $y = (y^{(1)}, y^{(2)})$  dans  $(E^q)^2$ . Nous voulons prouver l'existence d'une suite  $x_0 := x, x_1, x_2, \dots, x_i = y$ , où  $i \geq 1$ , telle que

$$\prod_{k=0}^i P_{\beta,x_k,y_k}^\cap(\tau_1 < \infty) > 0.$$

Il suffit de montrer que

$$\prod_{k=0}^i K_{\beta,x_k,y_k}^\cap(n_k) > 0 \tag{3.2}$$

pour un certain  $n_k \geq 1$ . Il n'est pas difficile de trouver un chemin de probabilité positive pour lequel  $\tau^{(1)}$  part dans l'état  $x^{(1)}$ ,  $\tau^{(2)}$  dans l'état  $x^{(2)}$  et tel

---

**Corrélations à portée finie : régime non pertinent.**

---

qu'ils s'intersectent en un point où ils sont respectivement dans l'état  $y^{(1)}$  et  $y^{(2)}$ . Ce chemin fournit de bons  $i$  et  $(x_k, n_k)_{1 \leq k \leq i}$ .

Nous allons seulement prouver la première égalité dans le point 1, c'est-à-dire  $\theta(0) = P^{\otimes 2}((\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)})_1 < \infty)$ , l'autre partie étant standard (cf. appendice). Pour  $\beta = 0$  le renouvellement markovien est en fait réduit au renouvellement initial, et donc les quantités  $P_{x,y}^\cap(n \in \tau)$ ,  $K_{x,y}^\cap(n)$  ainsi que  $P_{x,y}^\cap(\tau_1 < \infty)$  ne dépendent pas de  $x$ . Ainsi,

$$P^{\otimes 2}((\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)})_1 < \infty) = \sum_{y \in (E^q)^2} P_{x,y}^\cap(\tau_1 < \infty)$$

est une valeur propre de  $\phi_0(0)$  de vecteur propre  $\mathbb{1}$  (à constante multiplicative près).

Pour le deuxième point, écrivons

$$\begin{aligned} P_\beta^\cap \left( \sum_{n \geq 1} \delta_n \geq N \right) &\leq P_\beta^\cap(\tau_1 < \infty, \dots, \tau_N < \infty) \\ &\leq \sum_{x_0, \dots, x_N \in (E^q)^2} \prod_{i=0}^{N-1} P_{\beta, x_i, x_{i+1}}^\cap(\tau_1 < \infty) \\ &\leq \sum_{x_0, x_N} (\phi_\beta(0)^N)_{x_0, x_N} \\ &\leq c \times \theta(\beta)^N. \end{aligned}$$

□

Cette proposition implique que si  $e^{\beta^2} \theta(\beta) < 1$ , alors

$$E_\beta^\cap \left( \exp(\beta^2 \sum_{n \geq 1} \delta_n) \right) < \infty.$$

En d'autres termes, il suffit de prouver que pour  $\beta$  assez petit,

$$e^{\beta^2} \theta(\beta) < 1.$$

Nous allons en fait prouver quelque chose de plus fort :  $\theta(\beta)$  est continue en  $\beta = 0$ . Comme nous n'avons pas directement accès à  $P_\beta^\cap$ , nous allons commencer par trouver une formule analogue à

$$P^{\otimes 2}((\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)})_1 < \infty) = 1 - \left( \sum_{n \geq 0} P(n \in \tau)^2 \right)^{-1},$$

i.e. une relation entre  $\theta(\beta)$  et des sommes de fonctions de Green pour  $P_\beta^\cap$ .



### 3.2 Intersection de renouvellements markoviens

---

**Proposition 3.2.4.** *La matrice  $\varphi_\beta(0)$  a tous ses coefficients finis et est irréductible. Si l'on note  $\vartheta(\beta)$  sa valeur propre de Perron-Frobenius alors*

$$\theta(\beta) = 1 - \vartheta(\beta)^{-1}.$$

La preuve de la proposition 3.2.4 repose sur un lemme pour lequel nous avons besoin d'introduire de nouvelles notations. Soit

$$E_\star^q = \{x \in E^q : x_q = \star\}$$

et pour tout  $x, y \in E^q$ ,

$$\hat{K}_{x,y}(n) = \frac{K_{\beta,x,y}(n)}{\tilde{Q}_\beta^\star(x,y)},$$

qui est la probabilité sous  $P_\beta$  de faire un saut de taille  $n$  sachant l'état de départ  $x$  et l'état d'arrivée  $y$ . La lettre  $\beta$  est omise car les  $\hat{K}_{x,y}(n)$  n'en dépendent pas : en fait, si  $y \in E_\star^q$ , alors  $\hat{K}_{x,y}(n) = \frac{K(n)}{K(\star)} \mathbf{1}_{n>q}$  ; sinon,  $\hat{K}_{x,y}(n) = \mathbf{1}_{n=y_q}$ .

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout  $x_0, x_1, \dots, x_k \in E^q$ ,*

$$(\hat{K}_{x_0,x_1} * \hat{K}_{x_1,x_2} * \dots * \hat{K}_{x_{k-1},x_k})(n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{L(n)}{K(\star)n^{1+\alpha}} \times |\{1 \leq l \leq k, x_l \in E_\star^q\}| \quad (3.3)$$

*et il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $k, x_0, x_1, \dots, x_k \in E^q$  et  $n > kq$ ,*

$$(\hat{K}_{x_0,x_1} * \hat{K}_{x_1,x_2} * \dots * \hat{K}_{x_{k-1},x_k})(n) \leq k^c \frac{L(n)}{K(\star)n^{1+\alpha}}. \quad (3.4)$$

*Démonstration.* Le point (3.3) vient du fait que si  $q(n) = \tilde{L}(n)/n^{1+\alpha}$  est une probabilité, où  $\tilde{L}$  est une fonction à variation lente, alors  $q^{*k}(n) \sim kq(n)$  (cf. [30, Lemme A.5]) et seuls les  $\hat{K}_{x,y}$  pour lesquels  $y \in E_\star^q$  contribuent à la queue de la loi. Pour  $k = 1$ , (3.4) est clairement vérifié. On peut alors adapter la récurrence dans la preuve de [30, Lemme A.5] pour conclure.  $\square$

*Proof of Proposition 3.2.4.* Prouvons tout d'abord que les coefficients de la matrice sont bien finis. Soit  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  deux éléments de  $(E^q)^2$ . On a

$$\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau) = \sum_{n \geq 0} P_{\beta,x_1,y_1}(n \in \tau) P_{\beta,x_2,y_2}(n \in \tau) \quad (3.5)$$

donc nous devons étudier le comportement pour  $n$  grand des  $P_{\beta,x_1,y_1}(n \in \tau)$ . Or pour tout  $x, y \in E^q$  nous pouvons écrire

$$P_{\beta,x,y}(n \in \tau) = P_{\beta,x}(n \in \tau_y)$$

où  $\tau_{y,n} = \tau_{\theta_n(y)}$ , et

$$\begin{aligned}\theta_0(y) &= \inf\{k \geq 0, \bar{T}_{k-q+1}^* = y\}, \\ \theta_{n+1}(y) &= \inf\{k > \theta_n(y), \bar{T}_{k-q+1}^* = y\}.\end{aligned}$$

Par la propriété des renouvellements markoviens, sous  $P_\beta$ , pour tout  $y \in E^q$ ,  $\tau_y$  est un renouvellement standard (retardé, car on peut commencer dans un état  $x \neq y$ ). Il nous reste donc à prouver que la queue de la loi d'interarrivée de  $\tau_y$  a (approximativement) le même comportement que celle du processus de renouvellement initial (qui satisfait les hypothèses du théorème 3.1.1). On peut alors conclure d'après un résultat de Doney (cf. [23]) sur les renouvellements non intégrables que la série dans (3.5) converge. Fixons  $y \in E^q$ , et écrivons que  $\theta = \theta_0(y)$ , fini presque sûrement car  $(\bar{T}_n^*)_{n \geq 1}$  est une chaîne de Markov récurrente. Notons  $J_n = \bar{T}_{n-q}^*$  la chaîne de Markov modulante. Alors

$$P_{\beta,y}(T_1 + \dots + T_\theta = n) = \sum_{k \geq 1} E_{\beta,y}(\mathbf{1}_{\{\theta=k\}} P_z(T_1 + \dots + T_\theta = n | J_0 \dots J_k))$$

D'après notre remarque précédente sur les  $\hat{K}_{y,z}$  et le lemme 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}P_{\beta,y}(T_1 + \dots + T_k = n | J_0 \dots J_k) &= (K_{J_0, J_1} * K_{J_1, J_2} * \dots * K_{J_{k-1}, J_k})(n) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} \times \frac{N_k^*}{K(\star)}\end{aligned}$$

avec

$$N_k^* := \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\{J_i \in E^q\}}.$$

D'après un résultat classique sur les chaînes de Markov (cf. [7, Chap I.3] par exemple),

$$E_{\beta,y} \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{\theta=k\}} N_k^* = E_{\beta,y} N_\theta^* = \frac{l_\beta^*(E_\star^q)}{l_\beta^*(y)}$$

où  $l_\beta^*$  est loi invariante de  $\tilde{Q}_\beta^*$ . Nous avons finalement

$$P_{\beta,y}(T_0 + \dots + T_\theta = n) \sim \frac{l_\beta^*(E_\star^q)}{l_\beta^*(y) K(\star)} \times \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}}. \quad (3.6)$$

**Remarque 3.2.1.** *On peut retrouver ce comportement asymptotique en appliquant un résultat de [14, Appendice A].*

### 3.2 Intersection de renouvellements markoviens

---

Il faut néanmoins justifier l'interversion entre l'espérance et l'équivalent. D'après la majoration (3.4) dans le lemme 3.2.1, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée, car  $\mathbb{E}(\theta^c) < \infty$  (il n'est pas difficile de voir que la queue de  $\theta$  décroît exponentiellement vite).

Enfin, nous prouvons le dernier point de la proposition. Les équations de renouvellement donnent, dans le cadre markovien : pour tout  $x, y \in (E^q)^2$ ,

$$P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau) = \delta_{x,y} \mathbf{1}_{n=0} + \sum_{z \in (E^q)^2} \sum_{k=1}^n P_{\beta,x,z}^\cap(n-k \in \tau) K_{\beta,z,y}^\cap(k) \quad (3.7)$$

$$= \delta_{x,y} \mathbf{1}_{n=0} + \sum_{z \in (E^q)^2} \sum_{k=1}^n K_{\beta,x,z}^\cap(k) P_{\beta,z,y}^\cap(n-k \in \tau) \quad (3.8)$$

En prenant les transformées de Laplace, on obtient pour  $\lambda > 0$  :

$$\varphi_\beta(\lambda) = \text{Id} + \varphi_\beta(\lambda) \phi_\beta(\lambda) = \text{Id} + \phi_\beta(\lambda) \varphi_\beta(\lambda).$$

D'après la première partie de la proposition, nous pouvons prendre la limite lorsque  $\lambda$  tend vers 0, ce qui donne

$$\varphi_\beta(0)(\text{Id} - \phi_\beta(0)) = (\text{Id} - \phi_\beta(0))\varphi_\beta(0) = \text{Id},$$

et qui permet de conclure. □

Ainsi, nous allons prouver que  $\vartheta(\beta)$  est continue en  $\beta = 0$ , ce qui revient à prouver que pour tout  $x, y$  dans  $(E^q)^2$ , les séries  $\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau)$  sont continues en  $\beta = 0$ .

Il n'est pas difficile de voir que pour  $n \geq 0$ ,  $x, y \in (E^q)^2$ , les fonctions de Green  $P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau)$  sont continues en  $\beta$  mais la continuité des séries

$$\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau)$$

n'est pas immédiate. Nous allons voir par la suite que ces quantités peuvent s'écrire comme des normes  $L^2$  de certaines fonctions. La continuité sera donc prouvée pour ces normes  $L^2$  en passant par le théorème de convergence dominée.

Nous définissons les séries de Fourier suivantes :

$$\hat{\phi}_{\beta,x,y}(\theta) = \sum_{n \geq 1} e^{i\theta n} K_{\beta,x,y}(n);$$

$$\hat{\varphi}_{\beta,x,y}(\theta) = \sum_{n \geq 0} e^{i\theta n} P_{\beta,x,y}(n \in \tau);$$

$$\hat{\varphi}_{\beta,x,y}^{\text{sym}}(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\theta n} P_{\beta,x,y}(|n| \in \tau).$$

La matrice  $\hat{\phi}_0(\theta)$  sera maintenant notée  $\hat{\phi}(\theta)$ . Les fonctions  $\hat{\phi}_{\beta,x,y}$  sont continues tandis que  $\hat{\varphi}_{\beta,x,y}(\theta)$  et  $\hat{\varphi}_{\beta,x,y}^{\text{sym}}(\theta)$  sont dans  $L^2(-\pi, \pi)$  — l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure uniforme sur  $(-\pi, \pi)$  — d'après ce que l'on sait sur la décroissance en  $n$  des  $P_{\beta,x,y}(n \in \tau)$  (cf. partie précédente).

**Proposition 3.2.5.** *La matrice  $\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta)$  est  $\theta$ -presque partout inversible, et*

$$P_{\beta,x,y}(n \in \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \left( 2 \operatorname{Re}((\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta))_{x,y}^{-1}) - 1 \right) d\theta.$$

De plus il existe une constante positive  $C$  telle que pour tout  $\beta$  assez petit, pour tout  $x, y \in E^q$

$$|[(\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta))^{-1}]_{x,y}| \leq C \sup_{s,t \in E^q} |[(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))^{-1}]_{s,t}| \quad (3.9)$$

$\theta$ -presque partout.

*Démonstration.* Soit

$$\hat{\phi}_\beta^{(x)}(\theta) := \sum_{n \geq 1} e^{in\theta} P_\beta(\tau_{x,k+1} - \tau_{x,k} = n)$$

la fonction caractéristique des interarrivées de  $\tau_x$  sous  $P_\beta$  (cf. partie précédente) et

$$\hat{\phi}_\beta^{(x,y)}(\theta) := \sum_{n \geq 1} e^{in\theta} P_{\beta,x}(\tau_{\theta_0(y)} = n),$$

qui sont des fonctions continues (le terme dans la somme étant borné en valeur absolue par un noyau de probabilité). D'après l'hypothèse (2.5) (en fait l'apériodicité suffit),  $\hat{\phi}_\beta^{(x)}(\theta) = 1$  si et seulement si  $\theta = 0$ . D'après [29, Lemme 3.1.1] (on peut trouver la preuve dans [56, Chap. II.9]) on a  $\theta$ -presque partout :

$$\hat{\varphi}_{\beta,y,y}^{\text{sym}}(\theta) = \frac{1}{1 - \hat{\phi}_\beta^{(y)}(\theta)},$$

et plus généralement, pour tout  $x, y \in E^q$ , on peut décomposer la probabilité (sous  $P_\beta$ ) démarrant en  $x$  que  $n$  soit dans  $\tau_y$  suivant la valeur de  $\tau$  lorsque l'état  $y$  est atteint pour la première fois, considérer la série de Fourier, et établir que

$$\hat{\varphi}_{\beta,x,y}^{\text{sym}}(\theta) = 1 + \frac{\hat{\phi}_\beta^{(x,y)}(\theta)}{1 - \hat{\phi}_\beta^{(y)}(\theta)}.$$

### 3.2 Intersection de renouvellements markoviens

---

D'après les équations de renouvellement (3.7), écrites pour  $P_\beta$  au lieu de  $P_\beta^\cap$ , on peut déduire que presque partout,

$$\hat{\varphi}_\beta(\theta) = \text{Id} + \hat{\varphi}_\beta(\theta)\hat{\phi}_\beta(\theta) = \text{Id} + \hat{\phi}_\beta(\theta)\hat{\varphi}_\beta(\theta),$$

ce qui prouve la première partie de la proposition. Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} P_{\beta,x,y}(n \in \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \hat{\varphi}_{\beta,x,y}^{\text{sym}}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} (2 \text{Re}(\hat{\varphi}_{\beta,x,y}(\theta)) - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \left( 2 \text{Re}([\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta)]_{x,y}^{-1}) - 1 \right) d\theta, \end{aligned}$$

ce qui clôt une première partie de la preuve. Prouvons maintenant (equation (3.9)). Rappelons que

$$\hat{\phi}_{\beta,x,y}(\theta) = \hat{\phi}_{x,y}(\theta) \frac{e^{\beta^2 G(y)} \nu_\beta^*(y)}{\lambda(\beta) \nu_\beta^*(x)}$$

et  $\hat{\phi}_\beta := \hat{\phi}_\beta(\theta = 0)$  est simplement la matrice  $Q^*$ , si bien que

$$\lambda(\beta) = \sum_{y \in E^q} e^{\beta^2 G(y)} \frac{\nu_\beta^*(y)}{\nu_\beta^*(x)} \hat{\phi}_{x,y}. \quad (3.10)$$

On définit la matrice  $R_\beta(\theta) = \lambda(\beta)(\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta)) - (\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))$ . Il suffit de prouver que les coefficients de  $R_\beta(\theta)(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))^{-1}$  décroissent vers 0 quand  $\beta$  tend vers 0, uniformément en  $\theta$ . Ce n'est pas immédiat du fait de la singularité en  $\theta = 0$ . Souvenons-nous que

$$(\text{Id} - \hat{\phi}_\beta(\theta))^{-1} = \frac{{}^t \text{Com}(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))}{\det(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))}.$$

Nous savons que lorsque  $\theta$  tend vers 0, l'ordre de  $\det(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))$  est le plus faible parmi ceux des  $(\hat{\phi}_{x,y} - \hat{\phi}_{x,y}(\theta))$ , pour  $x, y \in E^q$ , et donc nous devons étudier les coefficients de  $R_\beta(\theta) {}^t \text{Com}(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))$ . Pour être plus précis nous allons vérifier les points suivants :

- lorsque  $\theta$  tend vers 0 il n'y pas aucun terme d'ordre 0,
- tous les termes d'ordre plus élevés ont des coefficients tendant vers 0 quand  $\beta$  tend vers 0.

D'une part nous avons

$$(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))_{x,x} = (\hat{\phi}_{x,x} - \hat{\phi}_{x,x}(\theta)) + \sum_{y \neq x} \hat{\phi}_{x,y}$$

et si  $x \neq y$ ,

$$(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))_{x,y} = (\hat{\phi}_{x,y} - \hat{\phi}_{x,y}(\theta)) + \hat{\phi}_{x,y}$$

D'autre part nous pouvons calculer sans trop de difficulté, d'après (3.10),

$$R_\beta(\theta)_{x,x} = \epsilon_\beta(x, x)(\hat{\phi}_{x,x} - \hat{\phi}_{x,x}(\theta)) + \sum_{y \neq x} \epsilon_\beta(x, y)\hat{\phi}_{x,y},$$

$$R_\beta(\theta)_{x,y} = \epsilon_\beta(x, y)(\hat{\phi}_{x,y} - \hat{\phi}_{x,y}(\theta)) - \epsilon_\beta(x, y)\hat{\phi}_{x,y},$$

où  $\epsilon_\beta(x, y) := e^{\beta^2 G(y)} \frac{\nu_\beta^*(y)}{\nu_\beta^*(x)} - 1$  (qui tend vers 0 quand  $\beta$  tend 0). D'après ces expressions, on peut vérifier que le second point est satisfait. Quant aux termes d'ordre 0 en  $\theta$  dans  $R_\beta(\theta)^t \text{Com}(\text{Id} - \hat{\phi}(\theta))$ , ils sont nuls : cela se montre par le calcul, en utilisant le fait que  ${}^t \text{Com}(\text{Id} - \hat{\phi})$  est constante sur ses colonnes.  $\square$

Nous pouvons conclure cette première partie par :

*Preuve de la proposition 3.2.1.* Nous commençons par le cas  $l = 0$ , i.e. nous montrons que

$$E_\beta^\cap \left( \exp \left( \beta^2 \sum_{n \geq 1} \delta_n \right) \right) < \infty$$

pour  $\beta$  assez petit. D'après la proposition 3.2.3, il suffit de montrer que  $e^{\beta^2 \theta(\beta)} < 1$  pour  $\beta$  petit et comme  $\theta(0) < 1$ , nous allons montrer que  $\theta(\beta) \rightarrow \theta(0)$  quand  $\beta \rightarrow 0$ . D'après la proposition 3.2.4, cela se réduit à la continuité de  $\vartheta(\beta)$  en  $\beta = 0$  et donc, par continuité des séries

$$\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau)$$

en  $\beta = 0$ , pour tout  $x, y \in (E^q)^2$ . D'après (3.5) on peut écrire

$$\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau) = \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{\beta,x_1,y_1}(|n| \in \tau) P_{\beta,x_2,y_2}(|n| \in \tau) \right)$$

où  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$ . D'après la proposition 3.2.5 et l'identité de Parseval nous avons

$$\sum_{n \geq 0} P_{\beta,x,y}^\cap(n \in \tau) = \frac{1}{2} \left( 1 + \langle \hat{\phi}_{\beta,x_1,y_1}^{\text{sym}}, \hat{\phi}_{\beta,x_2,y_2}^{\text{sym}} \rangle_{L^2(-\pi,\pi)} \right) \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \langle 2 \text{Re}((\text{Id} - \hat{\phi}_\beta)_{x_1,y_1}^{-1}) - 1, 2 \text{Re}((\text{Id} - \hat{\phi}_\beta)_{x_2,y_2}^{-1}) - 1 \rangle_{L^2(-\pi,\pi)} \right). \quad (3.12)$$

### 3.3 Contrôle du moment d'ordre deux

---

Mais pour tout  $s, t \in E^q$ ,

$$(\text{Id} - \hat{\phi}_\beta)_{s,t}^{-1} \xrightarrow{L^2} (\text{Id} - \hat{\phi}_0)_{s,t}^{-1}$$

car (3.9) dans la proposition 3.2.5 permet d'utiliser le théorème de convergence dominée. En conséquence le produit scalaire dans le terme de droite de (3.11) est continu en  $\beta = 0$ .

Passons au cas  $1 \leq l \leq q$ , et écrivons  $\tau^{(2)} - l := \{\tau_n^{(2)} - l, n \geq 0\}$ . Alors

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} \delta_{n+l}^{(2)} = |\tau^{(1)} \cap (\tau^{(2)} - l)|$$

et  $\tau^{(1)} \cap (\tau^{(2)} - l)$  est un processus de renouvellement retardé de même loi d'interarrivée que  $\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}$ , ce qui nous ramène au cas  $l = 0$ .  $\square$

### 3.3 Contrôle du moment d'ordre deux

Dans cette partie nous allons prouver la proposition suivante

**Proposition 3.3.1.** *Il existe  $\beta_0 > 0$  tel que pour tout  $\beta \leq \beta_0$ ,*

$$\sup_{N \geq 1} \mathbb{E} \left( Z_{N,\beta,h_c(\beta)}^2 \right) < \infty.$$

*Démonstration.* La méthode des répliques donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{N,\beta,h}^2) &= E^{\otimes 2} \left( e^{h \sum_{n=1}^N (\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)})} \mathbb{E} \left( e^{\beta \sum_{n=1}^N \omega_n (\delta_n^{(1)} + \delta_n^{(2)})} \right) \right) \\ &= E^{\otimes 2} \left( e^{\sum_{i=1,2} \sum_{n=1}^N h \delta_n^{(i)} + \frac{\beta^2}{2} \text{Var}(\sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n^{(i)})} e^{\beta^2 \text{Cov}(\sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n^{(1)}, \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n^{(2)})} \right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{Cov} \left( \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n^{(1)}, \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n^{(2)} \right) &= \sum_{n,m=1}^N \text{Cov}(\omega_n, \omega_m) \delta_n^{(1)} \delta_m^{(2)} \\ &= \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} + \sum_{\substack{1 \leq |n-m| \leq q \\ 1 \leq n,m \leq N}} \text{Cov}(\omega_n, \omega_m) \delta_n^{(1)} \delta_m^{(2)}. \end{aligned}$$

Définissons

$$C_N(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}) = \sum_{n=1}^N \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} + \sum_{k=1}^q \rho_k \sum_{n=1}^N (\delta_n^{(1)} \delta_{n+k}^{(2)} + \delta_n^{(2)} \delta_{n+k}^{(1)})$$

et posons  $h = h_c^a(\beta)$ . Il vient alors :

$$\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a})^2 \leq C_\beta E_\beta^{\otimes 2} \left( e^{\beta^2 C_N(\tau^{(1)}, \tau^{(2)})} \right).$$

De plus, notons que

$$C_N(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} \delta_n^{(2)} + \sum_{k=1}^q \rho_q^+ \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n^{(1)} \delta_{n+k}^{(2)} + \delta_n^{(2)} \delta_{n+k}^{(1)})$$

où  $\rho_q^+ = \rho_q \vee 0$ . En utilisant l'inégalité de Hölder on peut prouver que pour tout  $\beta > 0$ , il existe des constantes strictement positives  $C_\beta, c_0, c_1, \dots, c_q$  et  $e_0, e_1, \dots, e_q$  telles que

$$\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a})^2 \leq C_\beta \prod_{k=0}^q \left( E_\beta^{\otimes 2} \left( e^{c_k \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{(1)} \delta_{n+k}^{(2)}} \right) \right)^{e_k}.$$

On conclut en utilisant la proposition 3.2.1. □

### 3.4 Partie lim sup et fin de la preuve

On définit

$$A_N^\gamma = \{|\tau \cap [0, N]| \leq N^\gamma\}$$

(si ça ne porte pas à confusion, on omettra parfois  $\gamma$ ). Nous allons prouver :

**Proposition 3.4.1.** *Pour tout  $\beta \leq \beta_0$  (avec  $\beta_0$  comme dans la proposition 3.3.1), pour tout  $\gamma < \alpha$ , il existe  $c > 0$  tel que*

$$\liminf_{N \geq 1} \mathbb{P} \left( P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega \left( \overline{A_N^\gamma} \right) > c \right) > c.$$

Une fois que cela sera prouvé, la proposition suivante fournira la partie limsup du théorème 3.1.1 :

**Proposition 3.4.2.** *Si pour tout  $\gamma < \alpha$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que*

$$\liminf_{N \geq 1} \mathbb{P} \left( P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega \left( \overline{A_N^\gamma} \right) > c \right) > c \tag{3.13}$$

alors

$$\limsup_{h \rightarrow h_c^a(\beta)^+} \frac{\log F(\beta, h)}{\log(h - h_c^a(\beta))} \leq \frac{1}{\alpha}.$$



### 3.4 Partie lim sup et fin de la preuve

---

Cette proposition est prouvée dans [40]. On peut vérifier qu'elle reste vraie sans l'hypothèse d'indépendance sur la suite  $\omega$ .

Pour prouver la proposition 3.4.1, nous avons besoin du contrôle du moment d'ordre deux (voir proposition 3.3.1) et du lemme de Paley-Zygmund (cf. lemme 1.3.1).

**Lemme 3.4.1.** *Pour tout  $\beta > 0$ ,  $\liminf_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}Z_{N,\beta,h_c^a} \geq c(\beta) > 0$ .*

*Démonstration.* Dans la partie 2 nous avons prouvé que

$$\mathbb{E}Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq c_1(\beta)P_\beta(n \in \tau)$$

en considérant la fonction de partition *pinned*. Pour la fonction de partition libre, nous pouvons prouver sans trop de difficultés que

$$\mathbb{E}Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq c_1(\beta) > 0.$$

□

**Lemme 3.4.2.** *Pour tout  $\beta \leq \beta_0$  ( $\beta_0$  comme dans la proposition 3.3.1), il existe  $\delta > 0$ ,  $c \in (0, 1)$  tel que*

$$\inf_{N \geq 1} \mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq \delta) > c.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 1.3.1, nous avons pour tout  $u \in (0, 1)$ ,

$$\mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq u\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)})) \geq (1-u)^2 \frac{(\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)}))^2}{\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^2)}.$$

Pour  $N$  assez grand et  $\beta \leq \beta_0$ , on a d'après les lemmes 3.4.1 et 3.3.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq \frac{uc(\beta)}{2}\right) &\geq \mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq u\mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)})) \\ &\geq (1-u)^2 \frac{(c(\beta)/2)^2}{\sup_{N \geq 1} \mathbb{E}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^2)}, \end{aligned}$$

qui est strictement positif d'après 3.3.1. Le résultat vient en choisissant  $u$  assez proche de 1. □

**Lemme 3.4.3.** *Pour tout  $\beta > 0$ , il existe  $C_\beta > 0$  tel que*

$$\mathbb{E}\left[Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(A_N^\gamma)\right] \leq C_\beta P_\beta(A_N^\gamma).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(A_N^\gamma) \right] &= \mathbb{E} E \left( \mathbf{1}_{A_N^\gamma} e^{\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h_c^a(\beta))\delta_n} \right) \\
 &= E \left( \mathbf{1}_{A_N^\gamma} e^{(-\log \lambda(\beta) - \frac{\beta^2}{2}) \sum_{n=1}^N \delta_n + \frac{\beta^2}{2} \text{Var} \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n} \right) \\
 &\leq C(\beta) E \left( \mathbf{1}_{A_N^\gamma} e^{-\log \lambda(\beta) \sum_{n=1}^N \delta_n + \sum_{n=1}^N \delta_n \sum_{k=1}^q \rho_k \beta^2 \delta_{n+k}} \right) \\
 &\leq C'(\beta) P_\beta(A_N^\gamma)
 \end{aligned}$$

où  $C(\beta)$  et  $C'(\beta)$  sont des constantes strictement positives.  $\square$

**Lemme 3.4.4.** *Pour tout  $\beta > 0$ ,  $\gamma < \alpha$ ,*

$$P_\beta(A_N^\gamma) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

*Démonstration.* Choisissons de manière arbitraire un élément  $z$  de  $E^q$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 P_\beta(A_N^\gamma) &= P_\beta(|\tau \cap [0, N]| \leq N^\gamma) \\
 &\leq P_\beta(|\tau_z \cap [0, N]| \leq N^\gamma),
 \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$  car l'exposant de la queue de la loi des temps de retour de  $\tau_z$  est  $\alpha$  (cf. preuve de la proposition 3.2.4, équation (3.6)), si bien que  $|\tau_z \cap [0, N]|$  est de l'ordre de  $N^\alpha$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 3.4.1.* Nous montrons tout d'abord que pour tout  $a \in (0, 1)$ ,

$$\mathbb{P}(P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) > a) \geq \mathbb{E} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) - a.$$

En effet, cela vient des inégalités

$$\mathbb{P}(P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) > a) \geq \mathbb{E} \left[ P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) \mathbf{1}_{\{P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) > a\}} \right]$$

et

$$\mathbb{E} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) \leq a + \mathbb{E} \left[ P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) \mathbf{1}_{\{P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) > a\}} \right].$$

Aussi, par le lemme 3.4.3,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(A_N) &\leq \mathbb{E} \left[ P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(A_N) \mathbf{1}_{\{Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq \delta\}} \right] + \mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} < \delta) \\
 &\leq \delta^{-1} \mathbb{E} \left[ Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(A_N) \right] + (1 - \mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq \delta)) \\
 &\leq \delta^{-1} C_\beta P_\beta(A_N) + (1 - \mathbb{P}(Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)} \geq \delta)).
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.4.4 et le lemme 3.4.2, nous avons

$$\liminf_N \mathbb{E} P_{N,\beta,h_c^a(\beta)}^\omega(\overline{A_N}) \geq c$$

### 3.4 Partie lim sup et fin de la preuve

---

et donc

$$\liminf_N \mathbb{P}(P_{N,\beta,h_c^a}(\overline{A_n}) > a) \geq c - a,$$

ce qui conclut la preuve, si l'on choisit  $a$  dans  $(0, c)$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure.

*Preuve du théorème 3.1.1.* D'après l'inégalité  $F(\beta, h) \leq F^a(\beta, h)$  ainsi que la proposition 2.3.2,  $h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta)$  et

$$\liminf_{h \rightarrow h_c^a(\beta)^+} \frac{\log F(\beta, h)}{\log(h - h_c^a(\beta))} \geq \frac{1}{\alpha},$$

et les propositions 3.4.1 et 3.4.2 assurent que

$$\limsup_{h \rightarrow h_c^a(\beta)^+} \frac{\log F(\beta, h)}{\log(h - h_c^a(\beta))} \leq \frac{1}{\alpha},$$

en particulier  $h_c(\beta) \leq h_c^a(\beta)$ . Ainsi nous avons tous les éléments pour conclure la preuve du théorème.  $\square$

Corrélations à portée finie : régime non pertinent.

---

# Chapitre 4

## Corrélations à portée finie : régime pertinent.

Nous continuons notre étude du cas des corrélations à portée finie. Nous montrons que les techniques utilisées dans le cas i.i.d. et reposant sur le contrôle des moments fractionnaires peuvent être généralisées à notre cas, donnant un critère de pertinence du désordre. Nous commençons par énoncer les résultats obtenus, et divisons le reste du chapitre en deux parties :

- Cas  $\beta \ll$  assez grand  $\gg$ ,  $\alpha > 0$ .
- Cas  $\beta > 0$ ,  $\alpha > 1/2$ .

### 4.1 Résultats

Dans cette partie nous prouvons les trois résultats suivants, généralisant ceux qui ont été obtenus dans le cas du désordre i.i.d. dans [21] et [59].

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . Il existe  $\beta_0 < \infty$  tel que pour tout  $\beta > \beta_0$ ,  $h_c(\beta) > h_c^\alpha(\beta)$ .*

Le théorème 4.1.1 est aussi vrai pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ , auquel cas les résultats sont plus précis :

**Théorème 4.1.2.** *Soit  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ . Alors  $h_c(\beta) > h_c^\alpha(\beta)$  pour tout  $\beta > 0$ .*

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $\alpha > 1$ . Il existe  $a > 0$  tel que pour tout  $\beta \leq 1$ ,  $h_c(\beta) \geq h_c^\alpha(\beta) + a\beta^2$ . De plus,  $h_c(\beta) > h_c^\alpha(\beta)$  pour tout  $\beta > 0$ .*

De manière simplifiée, nous devons adapter les preuves du cas i.i.d. au domaine des processus de renouvellement markoviens. Par endroits, la dépendance en  $\beta$  du renouvellement markovien sous-jacent au point critique *annealed* (qui

n'a pas lieu pour un désordre i.i.d.) demandera un travail supplémentaire. Dans le cas i.i.d, le théorème 4.1.1 a été prouvé dans [59] par estimation des moments fractionnaires de la fonction de partition. Toujours dans le cas i.i.d, une valeur explicite de  $\beta_0$  est donnée :

$$\beta_0 = \inf\{\beta \geq 0 : \beta^2/2 - h(K) > 0\} = \sqrt{2h(K)},$$

où  $h(K) = -\sum_{n \geq 1} K(n) \log K(n)$  est l'entropie de  $K(\cdot)$ . Notre valeur de  $\beta_0$  n'est pas explicite mais peut toutefois s'exprimer implicitement comme la plus petite valeur de  $\beta$  pour laquelle un terme d'énergie dépasse un terme d'entropie (cf. preuve du théorème 4.1.1). Les théorèmes 4.1.3 et 4.1.2 ont été prouvés dans [21] dans le cas i.i.d. Le résultat y est cependant plus complet pour  $\alpha \in (1/2, 1)$ , car nous savons alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $a(\epsilon) > 0$  tel que

$$h_c(\beta) \geq h_c^a(\beta) + a(\epsilon)\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}+\epsilon} \quad (4.1)$$

pour tout  $\beta \leq 1$ .

## 4.2 Le cas $0 < \alpha < 1/2$ et $\beta$ grand

Cette partie est consacrée à la preuve du théorème 4.1.1. Pour tout  $\gamma$  dans  $(\frac{1}{1+\alpha}, 1]$ , pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E^q$  on définit

$$\hat{Q}_{\beta,\gamma}^*(x, y) = \begin{cases} \frac{K(y_q)^\gamma}{\lambda(\beta)^\gamma} \exp\left\{\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma-1) + \gamma^2\beta^2 G(y)\right\} \mathbf{1}_{\{x \rightsquigarrow y\}} & \text{si } y_q \neq \star, \\ \frac{\sum_{n>q} K(n)^\gamma}{\lambda(\beta)^\gamma} \exp\left\{\frac{\beta^2}{2}\gamma(\gamma-1) + \gamma^2\beta^2 G(y)\right\} \mathbf{1}_{\{x \rightsquigarrow y\}} & \text{si } y_q = \star. \end{cases}$$

La condition  $\alpha > 0$  assure que  $(\frac{1}{1+\alpha}, 1]$  est non vide. On note  $\Lambda(\beta, \gamma)$  la valeur propre de Perron-Frobenius de  $\hat{Q}_{\beta,\gamma}^*$ . Nous allons utiliser le lemme suivant :

**Lemme 4.2.1.** *Si  $\Lambda(\beta, \gamma) < 1$  alors il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\beta,h_c^a(\beta)+\delta}^\gamma = 0.$$

*Preuve du lemme 4.2.1.* Nous commençons par décomposer la fonction de partition *pinned* suivant les valeurs de  $\iota_N$ . Pour tout  $h$  on a :

$$Z_N = \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{t_1, \dots, t_n \geq 1 \\ t_1 + \dots + t_n = N}} \exp\left(\sum_{i=1}^n (\beta\omega_{t_1+\dots+t_i} + h)\right) \prod_{i=1}^n K(t_i).$$

Pour tout  $\gamma \in (0, 1)$  et tous  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  positifs, on a :

$$(a_1 + \dots + a_n)^\gamma \leq a_1^\gamma + \dots + a_n^\gamma, \quad (4.2)$$

## 4.2 Le cas $0 < \alpha < 1/2$ et $\beta$ grand

---

d'où

$$Z_N^\gamma \leq \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{t_1, \dots, t_n \geq 1 \\ t_1 + \dots + t_n = N}} \exp \left( \gamma \sum_{i=1}^n (\beta \omega_{t_1 + \dots + t_i} + h) \right) \prod_{i=1}^n K(t_i)^\gamma. \quad (4.3)$$

D'après nos hypothèses sur les corrélations de  $\omega$ ,

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \omega_{t_1 + \dots + t_i} \right) &= n + 2 \sum_{i=2}^n (\rho_{t_i} + \rho_{t_i + t_{i+1}} + \dots + \rho_{t_i + \dots + t_n}) \\ &\leq n + 2 \sum_{i=1}^n G(\bar{t}_i) + c \end{aligned}$$

où  $c = (q+1)(|\rho_1| + \dots + |\rho_q|)$ , et pour toutes valeurs de  $t_{n+1}, \dots, t_{n+q}$ . L'inégalité vient en majorant les effets de bord ( $i = 1$  et  $n - q \leq i \leq n$ ). Comme  $\omega$  est gaussien, on a

$$\mathbb{E} \left( \exp \left( \beta \gamma \sum_{i=1}^n \omega_{t_1 + \dots + t_i} \right) \right) \leq \exp \left( \frac{\gamma^2 \beta^2 n}{2} + \gamma^2 \beta^2 \sum_{i=1}^n G(\bar{t}_i) \right). \quad (4.4)$$

D'après (4.3) et (4.4), en choisissant

$$h = h_c^a(\beta) + \delta = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta) + \delta,$$

on obtient

$$\mathbb{E}(Z_{N, \beta, h_c^a(\beta) + \delta}^\gamma) \leq C(\beta, \delta) \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n \\ t_1 + \dots + t_n = N}} K(t_1)^\gamma \dots K(t_q)^\gamma \prod_{k=1}^{n-1} e^{\delta} \hat{Q}_{\beta, \gamma}(\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}) \quad (4.5)$$

où

$$\hat{Q}_{\beta, \gamma}(\bar{s}, \bar{t}) := \frac{K(t_q)^\gamma}{\lambda(\beta)^\gamma} \exp \left\{ \frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma - 1) + \gamma^2 \beta^2 G(\bar{t}) \right\} \mathbf{1}_{\{\bar{s} \rightsquigarrow \bar{t}\}}.$$

Prenons maintenant  $\gamma$  dans  $(\frac{1}{1+\alpha}, 1]$ . Soit  $r^*$  un vecteur propre à droite de  $\hat{Q}_{\beta, \gamma}^*$ , strictement positif, associé à  $\Lambda(\beta, \gamma)$ . Définissons  $r$  sur  $(\mathbb{N}^*)^q$  par  $r(\bar{s}) = r^*(\bar{s}^*)$ . On observe alors que

$$\sum_{\bar{t} \in (\mathbb{N}^*)^q} \hat{Q}_{\beta, \gamma}(\bar{s}, \bar{t}) r(\bar{t}) = \Lambda(\beta, \gamma) r(\bar{s}).$$

Ainsi, pour tout  $\bar{s}$  et pour  $\delta > 0$  assez petit,

$$\sum_{\bar{t}} e^{\delta \hat{Q}_{\beta, \gamma}(\bar{s}, \bar{t})} \frac{r(\bar{t})}{r(\bar{s})} = e^{\delta \Lambda(\beta, \gamma)} \leq 1.$$

Cela nous permet de définir le processus suivant : pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\hat{P}(T_{k+q+1} = t_{q+1} | T_{k+1} = t_1, \dots, T_{k+q} = t_q) = \hat{Q}_{\beta, \gamma}(\bar{t}_1, \bar{t}_2) \frac{r(\bar{t}_2)}{r(\bar{t}_1)} e^{\delta} \quad (4.6)$$

et

$$\hat{P}(T_{k+q+1} = +\infty | \bar{T}_k = \bar{s}) = 1 - e^{\delta \Lambda(\beta, \gamma)},$$

ainsi que

$$\hat{P}(T_1 = t_1, \dots, T_q = t_q) = \frac{1}{c(\gamma)^q} K(t_1)^\gamma \dots K(t_q)^\gamma,$$

où  $c(\gamma) = \sum_{n \geq 1} K(n)^\gamma$ . Notons que (4.6) donne la loi d'une interarrivée conditionnellement au passé, mais seulement si les interarrivées précédentes sont finies. Dès qu'une interarrivée est infinie, toutes les interarrivées suivantes seront définies comme valant  $+\infty$ . Ainsi, nous pouvons écrire

$$\mathbb{E}(Z_{N, \beta, h_c^a(\beta) + \delta}^\gamma) \leq c(\gamma)^q C(\beta, \delta) \max_{x, y \in E^q} \{r^*(y)/r^*(x)\} \hat{P}(N \in \tau)$$

et comme  $\mathbb{E}(Z_{N, \beta, h_c^a(\beta) + \delta}^\gamma) \geq C' K(N)^\gamma$  (inégalité obtenue en restreignant la fonction de partition à l'événement  $\{\tau_1 = N\}$ ), nous obtenons le résultat.  $\square$

*Preuve du théorème 4.1.1.* Supposons que  $\beta$  soit tel qu'il existe  $\gamma$  dans l'intervalle  $(\frac{1}{1+\alpha}, 1)$  vérifiant les conditions du lemme 4.2.1. Alors pour tout  $\delta > 0$  assez petit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathbb{E} \log Z_{n, \beta, h_c^a(\beta) + \delta} &= \frac{1}{\gamma n} \mathbb{E} \log Z_{n, \beta, h_c^a(\beta) + \delta}^\gamma \stackrel{\text{(Jensen)}}{\leq} \frac{1}{\gamma n} \log \mathbb{E} Z_{n, \beta, h_c^a(\beta) + \delta}^\gamma \\ &\stackrel{\text{(Lemme 4.2.1)}}{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}} 0, \end{aligned}$$

ce qui signifie que  $F(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) = 0$  et donc  $h_c(\beta) > h_c^a(\beta)$ . Comme  $\Lambda(\beta, 1) = 1$ , il suffit de prouver que pour  $\beta$  assez grand,

$$\partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma) \Big|_{\gamma=1^-} > 0.$$

La première étape consiste à calculer  $\partial_\gamma \hat{Q}_{\beta, \gamma}^* \Big|_{\gamma=1^-}$ . On obtient, en notant  $\hat{Q}_\beta^*$  au lieu de  $\hat{Q}_{\beta, 1}^*$ ,

$$\partial_\gamma \hat{Q}_{\beta, \gamma}^* \Big|_{\gamma=1^-} (x, y) = \left( \frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta) + 2\beta^2 G(y) + \log K(y) \right) \hat{Q}_\beta^*(x, y) \quad (4.7)$$



## 4.2 Le cas $0 < \alpha < 1/2$ et $\beta$ grand

---

si  $y_q \neq \star$ , et si  $y_q = \star$  alors

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \hat{Q}_{\beta,\gamma}^* \Big|_{\gamma=1^-} (x, y) &= \left( \frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta) + 2\beta^2 G(y) + \log K(\star) \right) \hat{Q}_\beta^*(x, y) \\ &+ \left( \sum_{n>q} \frac{K(n)}{K(\star)} \log \frac{K(n)}{K(\star)} \right) \hat{Q}_\beta^*(x, y). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notons  $l_\beta^*$  (resp.  $r_\beta^*$ ) un vecteur propre à gauche (resp. à droite) strictement positif de  $\hat{Q}_\beta^*$  associés à 1, normalisés de telle sorte que

$$l_\beta^* \cdot r_\beta^* = 1.$$

En utilisant la proposition A.4.1 nous obtenons

$$\partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma) \Big|_{\gamma=1^-} = l_\beta^* \cdot \partial_\gamma \hat{Q}_{\beta,\gamma}^* \Big|_{\gamma=1^-} r_\beta^*. \quad (4.9)$$

Notons  $\pi_\beta$  la probabilité sur  $E^q$  définie par

$$\pi_\beta(x) = l_\beta^*(x) r_\beta^*(x).$$

C'est en fait la probabilité invariante pour la chaîne de Markov sur  $E^q$  de noyau de transition  $\tilde{Q}_\beta^*$ , défini dans le lemme 2.2.1. En effet, pour tout  $y$ ,

$$\begin{aligned} \sum_x \pi_\beta(x) \tilde{Q}_\beta^*(x, y) &= \sum_x l_\beta^*(x) r_\beta^*(x) \tilde{Q}_\beta^*(x, y) \\ &= \sum_x l_\beta^*(x) \hat{Q}_\beta^*(x, y) r_\beta^*(y) \\ &= l_\beta^*(y) r_\beta^*(y) \\ &= \pi_\beta(y). \end{aligned}$$

Dans la suite,  $(X^{(n)})_{n \geq 0} = (X_1^{(n)}, \dots, X_q^{(n)})_{n \geq 0}$  désignera une chaîne de Markov sur  $E^q$  de noyau  $\tilde{Q}_\beta^*$  et de loi initiale  $\pi_\beta$ . Sa loi sera notée  $P_{\pi_\beta}$  et  $E_{\pi_\beta}$  désignera l'espérance relativement à  $P_{\pi_\beta}$ . En utilisant (4.7) et (4.8) dans (4.9), et en utilisant la stationnarité de  $\pi_\beta$ , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma) \Big|_{\gamma=1^-} &= \frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta) + 2\beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X^{(1)})) + E_{\pi_\beta}(\log K(X_q^{(1)})) \\ &+ P_{\pi_\beta}(X_q^{(0)} = \star) \left( \sum_{n>q} \frac{K(n)}{K(\star)} \log \frac{K(n)}{K(\star)} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Etudier le comportement de  $\lambda(\beta)$  et  $\pi_\beta$  lorsque  $\beta$  devient grand n'est pas chose facile, car cela dépend des maxima de la fonction  $G$  (cf. [2] à ce sujet).

Nous allons plutôt transformer cette expression de manière à ce que la preuve ne repose pas sur l'analyse de ces objets pour  $\beta$  grand. La somme dans (4.10) peut être vue comme une somme de termes d'« énergie » et d'entropie : le terme  $\sum_{n>q} \frac{K(n)}{K(\star)} \log \frac{K(n)}{K(\star)}$  est au signe près l'entropie du noyau  $K_q(n) := \frac{K(n)}{K(\star)} \mathbf{1}_{\{n>q\}}$ , que l'on notera  $h(K_q)$ . L'entropie spécifique (cf. [53, p.59-63]) de la chaîne de Markov stationnaire  $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ , notée  $h(\tilde{Q}_\beta^*)$ , peut être réécrite (en utilisant la définition de  $\tilde{Q}_\beta^*$  donnée dans le lemme 2.2.1), comme

$$\begin{aligned} -h(\tilde{Q}_\beta^*) &\stackrel{(\text{d\'ef.})}{=} E_{\pi_\beta}(\log \tilde{Q}_\beta^*(X^{(0)}, X^{(1)})) \\ &= \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X^{(1)})) + E_{\pi_\beta}(\log K(X_q^{(1)})) \\ &\quad - \log \lambda(\beta) + E_{\pi_\beta}(\log r_\beta^*(X^{(1)})) - E_{\pi_\beta}(\log r_\beta^*(X^{(0)})) \\ &\stackrel{(\text{stationnarit\'e})}{=} \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X)) + E_{\pi_\beta}(\log K(X_q)) - \log \lambda(\beta). \end{aligned}$$

Ainsi il vient :

$$\partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma)|_{\gamma=1^-} = \frac{\beta^2}{2} + \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X)) - h(\tilde{Q}_\beta^*) - h(K_q) P_{\pi_\beta}(X_q = \star). \quad (4.11)$$

Notons que l'entropie  $h(K_q)$  est finie car  $\alpha > 0$ . Etant l'entropie spécifique d'un processus sur l'espace fini  $E^q$ ,  $h(\tilde{Q}_\beta^*)$  est positif et majoré par  $\log \text{Card}(E^q)$  pour tout  $\beta > 0$ , si bien que les deux derniers termes dans (4.11) sont bornés. Nous pouvons maintenant conclure la preuve en écrivant :

$$\frac{\beta^2}{2} + \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X)) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Soit  $h(\tilde{Q}_\beta^* | \tilde{Q}_0^*)$  l'entropie spécifique relative de la chaîne de Markov stationnaire de matrice de transition  $\tilde{Q}_\beta^*$  relativement à la chaîne de transition  $\tilde{Q}_0^*$ , définie comme la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $(1/n)h\left(\tilde{Q}_\beta^* \Big|_{\mathcal{F}_n} \Big| \tilde{Q}_0^* \Big|_{\mathcal{F}_n}\right)$  (cf. [22]) où  $\mathcal{F}_n$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par les  $X^{(k)}$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Nous avons

$$\begin{aligned} h\left(\tilde{Q}_\beta^* \Big|_{\mathcal{F}_n} \Big| \tilde{Q}_0^* \Big|_{\mathcal{F}_n}\right) &= E_{\pi_\beta} \left( \log \left( \frac{\pi_\beta(X^{(0)}) \prod_{i=1}^n \tilde{Q}_\beta^*(X^{(i-1)}, X^{(i)})}{\pi_0(X^{(0)}) \prod_{i=1}^n \tilde{Q}_0^*(X^{(i-1)}, X^{(i)})} \right) \right) \\ &= \beta^2 \sum_{i=1}^n E_{\pi_\beta}(G(X^{(i)})) - n \log \lambda(\beta) + E_{\pi_\beta}(\log r_\beta^*(X^{(n)})) \\ &\quad - E_{\pi_\beta}(\log r_\beta^*(X^{(0)})) + E_{\pi_\beta} \left( \log \left( \frac{\pi_\beta(X^{(0)})}{\pi_0(X^{(0)})} \right) \right) \\ &\stackrel{(\text{stationnarit\'e})}{=} \beta^2 (E_{\pi_\beta}(G(X^{(0)})) - \log \lambda(\beta)) n + h(\pi_\beta | \pi_0) \end{aligned}$$

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

et donc

$$h(\tilde{Q}_\beta^* | \tilde{Q}_0^*) = \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X^{(0)})) - \log \lambda(\beta),$$

qui est positif. Ainsi,

$$\frac{\beta^2}{2} + \beta^2 E_{\pi_\beta}(G(X)) \geq \frac{\beta^2}{2} + \log \lambda(\beta) = -h_c^a(\beta).$$

Comme  $h_c^a(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} -\infty$  (car  $h_c(0) = 0$ ,  $h_c^a(\beta) < 0$  si  $\beta > 0$  et la courbe  $\beta \mapsto h_c^a(\beta)$  est concave), la preuve est terminée.  $\square$

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

Dans cette partie nous allons prouver les théorèmes 4.1.2 et 4.1.3. Dans un premier temps, nous adaptions à notre cas la technique des moments fractionnaires développée dans [21]. Il s'agit d'un raffinement de la technique précédente où nous montrons que l'énergie libre est nulle si une certaine somme  $\varrho$  dépendant de  $\beta$ ,  $h$ ,  $\gamma$  et d'un entier  $k$ , est petite (cf. lemme 4.3.1). La dernière partie de la preuve diffère selon que  $\alpha$  est plus grand que 1 ou compris entre  $1/2$  et 1. Dans ce qui suit, les fonctions  $L_i(\cdot)$  désignent des fonctions à variations lentes.

#### 4.3.1 Moments fractionnaires

Par la suite, nous changeons légèrement la définition de l'hamiltonien :

$$H_j(\beta, h, \omega, \tau) = \sum_{k=0}^{j-1} (\beta \omega_k + h) \delta_k,$$

ce qui n'affecte pas la valeur de l'énergie libre. Nous définissons récursivement le sous-ensemble de  $\tau$  suivant :  $\hat{\tau}_0 = 0$  et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\hat{\tau}_{n+1} = \inf\{\tau_k > \hat{\tau}_n : \tau_k - \tau_{k-1} > q\},$$

i.e.  $\hat{\tau}$  est le sous-ensemble des renouvellements qui succèdent à un saut strictement plus grand que  $q$ . Définissons maintenant les fonctions de partition suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{j,\beta,h,\omega} &:= E \left( \exp(H_j(\beta, h, \omega)) \mathbf{1}_{\{\hat{\tau} \cap \{1..j\} = \{j\}\}} \right), \\ \check{Z}_{j,\beta,h,\omega} &:= E \left( \exp(H_j(\beta, h, \omega)) \delta_j \mathbf{1}_{\{\hat{\tau} \cap \{1..j\} = \emptyset\}} \right), \\ \tilde{Z}_{j,\beta,h,\omega} &:= E \left( \exp(H_j(\beta, h, \omega)) \mathbf{1}_{\{j \in \hat{\tau}\}} \right). \end{aligned}$$

En d'autres termes,  $\hat{Z}_j$  est la fonction de partition restreinte à l'événement «  $j$  est un point de renouvellement et le seul saut strictement plus grand que  $q$  est celui qui précède  $j$  »,  $\check{Z}_j$  la restriction à «  $j$  est un point de renouvellement et tous les sauts le précédant sont plus petits que  $q$  », et  $\tilde{Z}_j$  la restriction à «  $j$  est un point de renouvellement, le saut le précédant étant strictement plus grand que  $q$  ».

Soit  $k$  un entier que nous spécifierons plus tard dans la preuve. Nous décomposons  $\tilde{Z}_n$  de la manière suivante :  $l$  est le dernier élément de  $\hat{\tau}$  situé (strictement) avant  $k$  et  $r$  le premier élément de  $\hat{\tau}$  plus grand ou égal à  $k$ . Nous obtenons, en utilisant la propriété de Markov :

$$\tilde{Z}_{n,\omega} = \sum_{0 \leq l < k} \sum_{r=k}^n \tilde{Z}_{l,\omega} \hat{Z}_{r-l,\theta^l \omega} \tilde{Z}_{n-r,\theta^r \omega}, \quad (4.12)$$

si nous convenons que  $\hat{Z}_j = \tilde{Z}_j = 0$  lorsque  $1 \leq j \leq q$ , et  $\hat{Z}_0 = \tilde{Z}_0 = 1$  (cf. figure 4.1). Observons que les trois facteurs apparaissant dans la somme, vus comme fonctions du désordre, sont indépendantes d'après l'hypothèse de portée finie et notre construction de  $\hat{\tau}$ . D'après (4.12) et (4.2) nous déduisons que pour tout  $\gamma \in (0, 1)$ ,

$$\tilde{Z}_{n,\omega}^\gamma \leq \sum_{0 \leq l < k} \sum_{r=k}^n \tilde{Z}_{l,\omega}^\gamma \hat{Z}_{r-l,\theta^l \omega}^\gamma \tilde{Z}_{n-r,\theta^r \omega}^\gamma \quad (4.13)$$

et si nous définissons la suite  $A_n = \mathbb{E} \tilde{Z}_{n,\omega}^\gamma$ , nous avons par indépendance, pour  $n \geq k$ ,

$$A_n \leq \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{r=k}^n A_l \mathbb{E}(\hat{Z}_{r-l}^\gamma) A_{n-r}. \quad (4.14)$$

Soit

$$\hat{K}(j) = \hat{K}(j, \beta, h, \gamma) = \begin{cases} \mathbb{E}(\hat{Z}_{j,\beta,h,\omega}^\gamma) & \text{si } j > q \\ 0 & \text{si } j \leq q. \end{cases}$$

Nous prouvons le lemme suivant :

**Lemme 4.3.1.** *Si  $\beta$  et  $h$  sont tels qu'il existe  $k \geq 1$  et  $\gamma \in (0, 1)$  pour lesquels*

$$\varrho(\beta, h, \gamma, k) := \sum_{r \geq k} \sum_{l=0}^{k-1} \hat{K}(r-l) A_l \leq 1, \quad (4.15)$$

alors  $F(\beta, h) = 0$ .

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

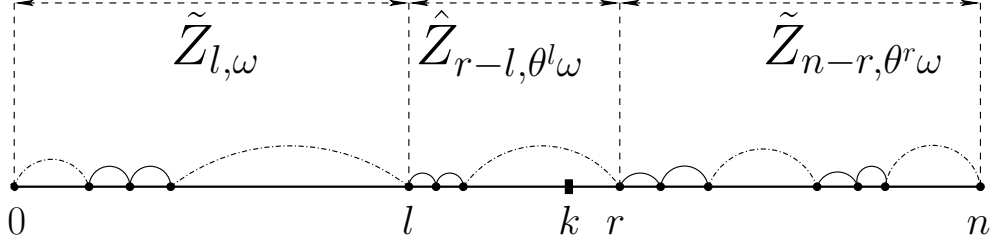


FIGURE 4.1 – Décomposition de la fonction de partition  $\tilde{Z}_n$  suivant (4.12). Les sauts strictement plus grands que  $q$  sont en pointillés.

*Preuve du lemme 4.3.1.* Si l'inégalité (4.15) est vraie alors d'après (4.14) nous pouvons montrer par récurrence que pour tout  $l$ ,

$$A_l \leq \max\{A_0, \dots, A_{k-1}\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F(\beta, h) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\gamma} \mathbb{E} \log(Z_N)^\gamma \stackrel{\text{(Jensen)}}{\leq} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\gamma} \log \mathbb{E}(Z_N^\gamma) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\gamma} \log \left( \frac{\mathbb{E}(\tilde{Z}_{N+q+1}^\gamma)}{K(q+1)^\gamma} \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^\gamma} \log \left( \frac{A_{N+q+1}}{K(q+1)^\gamma} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notons que dans la fonction de partition  $Z_N$  ci-dessus, la somme dans l'hamiltonien devrait parcourir les entiers de 0 à  $N$  (au lieu d'aller de 0 à  $N-1$ , ou de 1 à  $N$ ), mais toutes ces définitions mènent à la même énergie libre à la limite. De plus, pour passer de la première à la deuxième ligne, nous restreignons  $\tilde{Z}_{N+q+1}$  aux renouvellements qui commencent par un saut de longueur  $q+1$ .  $\square$

Ainsi, notre tâche consiste à trouver des paramètres  $h > h_c^a(\beta)$ ,  $\gamma$  et  $k$  qui remplissent les conditions du lemme 4.3.1. Supposons maintenant que

$$h = h_c^a(\beta) + \Delta \tag{4.16}$$

avec  $\Delta$  petit mais strictement positif. Nous allons prouver :

**Lemme 4.3.2.** *Pour tout  $\beta$ , si  $\gamma$  est assez proche de 1 et  $\Delta > 0$  est assez petit alors il existe une constante  $c(\beta)$  telle que*

$$\forall n \geq 0, \quad \hat{K}(n, \beta, h_c^a(\beta) + \Delta, \gamma) \leq c(\beta)L_1(n)n^{-(1+\alpha)\gamma}. \quad (4.17)$$

*De plus, il existe  $\beta_0 > 0$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tous  $\beta \in (0, \beta_0)$ ,  $\Delta \in (0, \epsilon)$ ,  $\gamma \in (1 - \epsilon, 1)$ , l'inégalité (4.17) est vérifiée, avec  $c(\beta)$  remplacé par  $c(\beta_0)$ .*

*Preuve du lemme 4.3.2.* Soit  $n > q$ . Alors en décomposant  $\hat{Z}_{n,\beta,h,\omega}$  selon la valeur du dernier saut avant  $n$ , nous obtenons

$$\hat{Z}_{n,\beta,h,\omega} = \sum_{l=q+1}^n K(l)\check{Z}_{n-l,\beta,h,\omega}e^{\beta\omega_{n-l}+h},$$

d'où

$$\hat{K}(n, \beta, h, \gamma) \leq \sum_{l=q+1}^n K(l)^\gamma \mathcal{Z}_{n-l,\beta,h} \quad (4.18)$$

où

$$\mathcal{Z}_{j,\beta,h} := \mathbb{E} \left( e^{\gamma(\beta\omega_j+h)} \check{Z}_{j,\beta,h,\omega}^\gamma \right).$$

Nous nous intéressons maintenant à la vitesse de convergence vers 0 de la suite  $\mathcal{Z}_n$ . Comme dans (4.5), on décompose  $\mathcal{Z}_n$  selon le nombre de renouvellements avant  $n$ , sans oublier que par définition des  $\check{Z}_n$ , pour tout  $k$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , la somme sur  $\{t_i \geq 1, 1 \leq i \leq k : t_1 + \dots + t_k = n\}$  est restreinte à  $\{1 \leq t_i \leq q, 1 \leq i \leq k : t_1 + \dots + t_k = n\}$ . En utilisant de nouveau (4.3) et (4.4), on obtient

$$\mathcal{Z}_{n,\beta,h} \leq C(\beta, \Delta) \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k \\ t_1 + \dots + t_k = n \\ t_i \leq q, 1 \leq i \leq k}} K(t_1)^\gamma \dots K(t_k)^\gamma \prod_{i=1}^{n-1} Q_{\beta,h,\gamma}(\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}) \quad (4.19)$$

où  $C(\beta, \Delta)$  est une constante venant des effets de bord (et qui dépend de  $\beta$  et  $\Delta$  à cause de (4.16)), et pour tout  $x, y$  dans  $E^q$ ,

$$Q_{\beta,h,\gamma}(x, y) = \exp \left( \frac{\beta^2 \gamma^2}{2} + h\gamma + \gamma^2 \beta^2 G(y) \right) K(y_q)^\gamma \mathbf{1}_{\{x \rightsquigarrow y\}}.$$

D'après (4.19), le comportement de  $\mathcal{Z}_n$  est relié à la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice  $Q_{\beta,h,\gamma}$  restreinte au sous-ensemble  $\{1, \dots, q\}^q$ . Clarifions cette dernière affirmation. Comme on a, en vertu du théorème 2.1.1,  $h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - \log \lambda(\beta)$ , alors

$$Q_{\beta, h_c^a(\beta), \gamma=1} = \lambda(\beta)^{-1} Q_\beta^*,$$

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

dont la valeur propre de Perron-Frobenius vaut 1 d'après la définition de  $\lambda(\beta)$  (cf. partie 2.2). Par stricte croissance de la valeur propre de Perron-Frobenius relativement aux composantes de la matrice (cf. [52, Théorème 1.1] ou [30, Appendice A.8]), la valeur propre de Perron-Frobenius de  $Q_{\beta, h_c^a(\beta), \gamma=1}$  restreinte à  $\{1, \dots, q\}^q$  (obtenue en annulant  $Q_{\beta, h_c^a(\beta), \gamma=1}(x, y)$  dès qu'un des  $x_i$  ou des  $y_i$  vaut  $\star$ ) est alors strictement inférieure à 1. En invoquant la continuité de la valeur propre de Perron-Frobenius par rapport aux composantes de la matrice, et en choisissant  $\gamma$  inférieur à 1 et assez proche de 1 ainsi que  $\Delta > 0$  assez petit, nous affirmons que la valeur propre de Perron-Frobenius de  $Q_{\beta, h_c^a(\beta)+\Delta, \gamma}$  restreinte à  $\{1, \dots, q\}^q$  est strictement inférieure à 1. Pour de tels  $\gamma$  et  $\Delta$ , et en utilisant de nouveau l'argument de monotonie, posons  $\delta = \delta(\Delta, \gamma)$  l'unique réel strictement positif tel que la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice  $Q^{(\delta)}$  (on omet les autres paramètres pour plus de clarté), définie par

$$\left( \exp \left( \delta y_q + \frac{\beta^2}{2} \gamma(\gamma - 1) + \gamma^2 \beta^2 G(y) + \Delta \gamma \right) \frac{K(y_q)^\gamma}{\lambda(\beta)^\gamma} \mathbf{1}_{\{x \rightsquigarrow y\}} \right)_{x, y \in \{1, \dots, q\}^q},$$

soit égale à 1. Soit  $\nu^{(\delta)}$  un vecteur propre à gauche strictement positif de  $Q^{(\delta)}$  associé à 1. Alors (4.19) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n, \beta, h} &\leq C(\beta, \Delta) \max_{x, y} (\nu^{(\delta)}(y) / \nu^{(\delta)}(x)) e^{-\delta n} \\ &\quad \times \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_k \\ t_1 + \dots + t_k = n \\ t_i \leq q, 1 \leq i \leq k}} K(t_1)^\gamma \dots K(t_q)^\gamma \prod_{i=1}^{n-1} Q^{(\delta)}(\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}) \frac{\nu^{(\delta)}(\bar{t}_{i+1})}{\nu^{(\delta)}(\bar{t}_i)}. \end{aligned}$$

Comme  $(x, y) \mapsto Q^{(\delta)}(x, y) \frac{\nu^{(\delta)}(y)}{\nu^{(\delta)}(x)}$  est le noyau d'une chaîne de Markov, on a

$$\mathcal{Z}_{n, \beta, h_c^a(\beta)+\Delta, \gamma} \leq c e^{-\delta n} \tag{4.20}$$

où  $c$  est une constante strictement positive qui peut dépendre de  $\beta$ ,  $\Delta$ , et  $\gamma$ .

De (1.2), (4.18) et (4.20) on peut déduire le premier point du lemme. En effet, on peut écrire

$$\sum_{l=q+1}^n K(l)^\gamma e^{-\delta(n-l)} = \sum_{l=q+1}^{n/2} K(l)^\gamma e^{-\delta(n-l)} + \sum_{l=n/2+1}^n K(l)^\gamma e^{-\delta(n-l)}.$$

La première somme est bornée par  $e^{-\delta n/2} \sum_{k \geq q+1} L(k)^\gamma k^{-(1+\alpha)\gamma}$  (fini pour  $\gamma$

assez proche de 1). Quant à la deuxième somme, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{l=n/2+1}^n K(l)^\gamma e^{-\delta(n-l)} &= \frac{L(n)^\gamma}{n^{(1+\alpha)\gamma}} \sum_{l=n/2+1}^n \left(\frac{n}{l}\right)^{(1+\alpha)\gamma} \left(\frac{L(n)}{L(l)}\right)^\gamma e^{-\delta(n-l)} \\ &\leq \frac{2^{(1+\alpha)\gamma}}{1 - e^{-\delta}} \sup_{1/2 \leq t \leq 1} \left(\frac{L(n)}{L(nt)}\right)^\gamma, \end{aligned}$$

qui est borné car  $\sup_{1/2 \leq t \leq 1} \left(\frac{L(n)}{L(nt)}\right)^\gamma$  converge vers 1 en utilisant la propriété des fonctions à variations lentes (cf. [30, (A.18)] ou [10]).

Nous nous occupons maintenant du deuxième point du lemme (la version uniforme). Soit  $\bar{\mathbf{1}}$  le vecteur tel que pour tout  $x$  dans  $E^q$ , si un des  $x_i$  vaut  $\star$ , alors  $\bar{\mathbf{1}}(x) = 0$ , sinon  $\bar{\mathbf{1}}(x) = 1$ . Remarquons que pour tous  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \leq 1$ ,

$$(Q_{\beta, h_c^a(\beta), \gamma} \bar{\mathbf{1}})(x) \leq \exp(\beta^2(1/2 + \max G)) \lambda(\beta)^{-\gamma} (K(1)^\gamma + \dots + K(q)^\gamma).$$

Par conséquent, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\beta_0 > 0$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tous  $\beta \leq \beta_0$  et  $\gamma$  dans  $(1 - \epsilon, 1)$ , la valeur propre de Perron-Frobenius de  $Q_{\beta, h_c^a(\beta), \gamma}$  restreinte à  $\{1, \dots, q\}^q$  est inférieure à

$$K(1) + \dots + K(q) + \eta = P(T_1 \leq q) + \eta,$$

qui est plus petit que 1 quand  $\eta$  est assez petit. On peut alors prendre  $\Delta < \Delta_0 := -\log(P(T_1 \leq q) + \eta)$  dans les lignes précédentes pour prouver la version uniforme du lemme.  $\square$

Soit désormais  $\Delta$  assez proche de 0 et  $\gamma$  assez proche de 1 tels que la queue de  $\hat{K}$  décroisse comme dans le lemme 4.3.2. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varrho &:= \varrho(\beta, h, \gamma, k) = \sum_{r \geq k} \sum_{l=0}^{k-1} \hat{K}(r-l) A_l \\ &\leq c(\beta) \sum_{r \geq k} \sum_{l=0}^{k-1} (r-l)^{-(1+\alpha)\gamma} L_2(r-l) A_l \\ &\leq C(\beta) \sum_{l=0}^{k-1} \frac{L_2(k-l) A_l}{(k-l)^{(1+\alpha)\gamma-1}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

où  $C(\beta)$  est une constante qui peut être rendue uniforme sur  $(0, \beta_0)$ , et ce, pour tout  $\beta_0$ . Notre but dans les sections suivantes est de rendre cette dernière somme petite, en choisissant correctement  $\Delta := h_c(\beta) - h_c^a(\beta)$  comme une fonction de  $\beta$ , et le paramètre  $k$  comme une fonction de  $\Delta$ . Les théorèmes 4.1.2 et 4.1.3 suivront alors en appliquant le lemme 4.3.1.



### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

#### 4.3.2 Cas $\alpha > 1$

Dans ce qui suit nous posons  $k = k(\beta) = \frac{1}{a\beta^2}$  et  $\Delta = a\beta^2$ , où  $a$  sera spécifié ultérieurement. Alors

$$\varrho \leq c(\beta)(S_1 + S_2)$$

où

$$S_1 = \sum_{l=0}^{k(\beta)-R-1} \frac{L_2(k-l)A_l}{(k-l)^{(1+\alpha)\gamma-1}}$$

et

$$S_2 = \sum_{l=k(\beta)-R}^{k(\beta)-1} \frac{L_2(k-l)A_l}{(k-l)^{(1+\alpha)\gamma-1}}$$

avec  $R \leq k(\beta)$  à préciser. Nous avons d'une part :

**Lemme 4.3.3.** *On peut rendre  $S_1$  arbitrairement petit en choisissant  $R$  assez grand et  $a$  assez petit.*

*Démonstration.* Nous avons

$$A_l = \mathbb{E}(\tilde{Z}_l^\gamma) \stackrel{\text{(Jensen)}}{\leq} (\mathbb{E}\tilde{Z}_l)^\gamma \leq c(\beta) \exp(\gamma F^a(\beta, h_c^a(\beta) + a\beta^2)l) \leq c(\beta)e^{a\beta^2 l},$$

qui est plus petit qu'une constante  $c(\beta)$  dès que  $l \leq k(\beta)$ . Pour obtenir la deuxième inégalité nous utilisons d'abord que

$$\tilde{Z}_l \leq E(\exp(H_j(\beta, h, \omega))\delta_j)$$

puis que

$$\mathbb{E}E(\exp(H_j(\beta, h, \omega))\delta_j) \leq c(\beta) \exp(F^a(\beta, h)l)$$

par sur-additivité (cf. preuve du théorème 2.1.1). Pour obtenir la troisième inégalité nous utilisons que

$$H_l(\beta, h_c^a(\beta) + a\beta^2) \leq H_l(\beta, h_c^a(\beta)) + a\beta^2 l,$$

ce qui implique

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + a\beta^2) \leq F^a(\beta, h_c^a(\beta)) + a\beta^2 = a\beta^2.$$

Ainsi, en sommant sur  $l$ , il vient :

$$S_1 \leq \frac{c(\beta)L_3(R)}{R^{(1+\alpha)\gamma-2}},$$

qui peut être rendu petit en prenant  $R$  assez grand. Comme  $R \leq k(\beta) = \frac{1}{a\beta^2}$ , cela peut nécessiter de prendre  $a$  assez petit.  $\square$

---

**Corrélations à portée finie : régime pertinent.**

---

D'autre part, nous avons  $S_2 \leq C_2 \max_{k(\beta)-R < l < k(\beta)} A_l$ . Nous allons montrer, en utilisant la technique du changement de mesure introduite dans le cas du désordre i.i.d., que cette quantité peut être assez proche de 0 en prenant  $a$  assez petit. Dans ce but, nous définissons

$$\frac{d\mathbb{P}_{N,\lambda}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \frac{e^{-\lambda \sum_{i=1}^N \omega_i}}{\mathbb{E}(e^{-\lambda \sum_{i=1}^N \omega_i})}.$$

Notons que d'après l'hypothèse gaussienne sur  $\omega$ , cette fraction est égale à  $e^{-\lambda \sum \omega_i - \frac{\lambda^2}{2} v_N}$ , où  $v_N := \text{Var}(\sum_{i=1}^N \omega_i)$ .

**Lemme 4.3.4.** *Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $N$ , tous  $\lambda$  et  $\gamma$  dans  $(0, 1)$ ,*

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_N^\gamma) \leq (\mathbb{E}_{N,\lambda} \tilde{Z}_N)^\gamma \exp\left(c \frac{\gamma}{1-\gamma} \lambda^2 N\right).$$

*Démonstration.* Par inégalité de Hölder, il vient :

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_N^\gamma) = \mathbb{E}_{N,\lambda} \left( \tilde{Z}_N^\gamma \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_{N,\lambda}}(\cdot) \right) \leq (\mathbb{E}_{N,\lambda} \tilde{Z}_N)^\gamma \mathbb{E}_{N,\lambda} \left( \left( \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_{N,\lambda}}(\cdot) \right)^{1/(1-\gamma)} \right)^{1-\gamma}. \quad (4.22)$$

Le dernier facteur dans le terme de droite est égal à

$$\mathbb{E} \left[ \left( e^{\lambda \sum_{i=1}^N \omega_i + \frac{\lambda^2}{2} v_N} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} e^{-\lambda \sum_{i=1}^N \omega_i - \frac{\lambda^2}{2} v_N} \right]^{1-\gamma} = e^{\frac{\lambda^2 \gamma}{2(1-\gamma)} v_N},$$

et le lemme est donc vrai en prenant  $c := \sup_{N \geq 1} (v_N/N)$ , qui est fini puisque

$$v_N \stackrel{N \rightarrow +\infty}{\sim} N \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^q \rho_k \right).$$

□

Si  $N = j$  et  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{j}}$ , nous obtenons :

$$A_j \leq (\mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}} \tilde{Z}_j)^\gamma \exp\left(c \frac{\gamma}{1-\gamma}\right). \quad (4.23)$$

**Proposition 4.3.1.** *Si  $h = h_c^a(\beta) + \Delta$ , alors*

$$\mathbb{E}_{j,\lambda}(\tilde{Z}_j) \leq c(\beta) E_\beta \left( e^{(\Delta - \bar{\rho}\beta\lambda) \sum_{i=0}^{j-1} \delta_i} \right)$$

où  $\bar{\rho} = 1 + 2 \sum_{k=1}^q \rho_k$ .

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

*Démonstration.* Les calculs donnent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{j,\lambda}(\tilde{Z}_j) &= E\mathbb{E}_{j,\lambda}\left(e^{\sum_{k=0}^{j-1}(\beta\omega_k+h)\delta_k}\mathbf{1}_{\{j\in\hat{\tau}\}}\right) \\ &\leq E\left(\mathbb{E}\left(e^{\sum_{k=0}^{j-1}(\beta\omega_k+h)\delta_k-\lambda\sum_{k=0}^{j-1}\omega_k}\right)e^{-\frac{\lambda^2}{2}v_j}\right) \\ &= E\left(e^{h\sum\delta_k+\frac{1}{2}\text{Var}(\sum_{k=0}^{j-1}\omega_k(\beta\delta_k-\lambda))}\right)e^{-\frac{\lambda^2}{2}v_j},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\omega_k(\beta\delta_k-\lambda)\right) &= \sum_{k=0}^{j-1}(\beta\delta_k-\lambda)^2+2\sum_{0\leq m<n\leq j-1}(\beta\delta_m-\lambda)(\beta\delta_n-\lambda) \\ \text{rho}_{n-m} &= \lambda^2j+2\lambda^2\sum_{0\leq m<n\leq j-1}\rho_{n-m}+\beta^2\sum_{k=0}^{j-1}\delta_k-2\beta\lambda\sum_{k=0}^{j-1}\delta_k \\ &+2\beta^2\sum_{0\leq m<n\leq j-1}\delta_m\delta_n\rho_{n-m}-2\beta\lambda\sum_{0\leq m<n\leq j-1}\delta_n\rho_{n-m} \\ &-2\beta\lambda\sum_{0\leq m<n\leq j-1}\delta_m\rho_{n-m}.\end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, la somme des deux premiers termes vaut  $\lambda^2v_j$ . Ainsi, en  $h = h_c^a(\beta) + \Delta$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{j,\lambda}(\tilde{Z}_j) &\leq C_1(\beta)E\left(e^{(\Delta-\bar{\rho}\beta\lambda-\log\lambda(\beta))\sum_{n=0}^{j-1}\delta_n+\beta^2\sum_{0\leq m<n\leq j-1}\delta_n\delta_m\rho_{n-m}}\right) \\ &\leq C_2(\beta)E_\beta\left(e^{(\Delta-\bar{\rho}\beta\lambda)\sum_{k=0}^{j-1}\delta_k}\right),\end{aligned}\tag{4.24}$$

où  $C_1(\beta)$  et  $C_2(\beta)$  sont des constantes, uniformes sur  $(0, \beta_0)$ , pour tout  $\beta_0$  (remarque : à cause des effets de bord,  $\lambda$  devrait apparaître dans la constante  $C_1(\beta)$ , mais ceci n'est pas gênant car  $|\lambda| = 1/\sqrt{j} \leq 1$ ).  $\square$

Si  $\Delta = a\beta^2$ , et  $a$  assez petit, alors pour  $j \leq k(\beta) = \frac{1}{a\beta^2}$ ,

$$\Delta - \frac{\bar{\rho}\beta}{\sqrt{j}} \leq -\frac{c_1}{2k(\beta)\sqrt{a}},$$

(la constante est uniforme en  $\beta$ ) d'où

$$\max_{k(\beta)-R \leq j < k(\beta)} \mathbb{E}_{j,1/\sqrt{j}}(\tilde{Z}_j) \leq e^{c_1\sqrt{a}\beta^2\frac{R}{2}} E_\beta\left(\exp\left(-\frac{c_1}{2\sqrt{a}k(\beta)}|\tau \cap \{1, \dots, k(\beta)\}|\right)\right).$$

Dans la ligne précédente, nous avons utilisé l'inégalité  $\nu_j \geq \nu_{k(\beta)} - R$ , qui est vraie pour toute valeur de  $j$  apparaissant dans le maximum. Nous pouvons rendre le dernier terme arbitrairement petit en choisissant  $a$  petit, ce qui prouve le deuxième point du théorème. Quant au premier point, il vient du fait que cela peut se faire de manière uniforme en  $\beta \leq \beta_0$ . En effet, nous allons prouver le lemme suivant :

**Lemme 4.3.5.**

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \limsup_{\beta \rightarrow 0} E_\beta \left( e^{-\frac{c}{k(\beta)} |\tau \cap \{1, \dots, k(\beta)\}|} \right) = 0. \quad (4.25)$$

*Démonstration.* Ce n'est pas tout à fait comme dans le cas i.i.d. car ici la loi de  $\tau$  dépend de  $\beta$ . Premièrement, remarquons qu'il existe un couplage (de la chaîne de Markov modulante de noyau  $\tilde{Q}_\beta^*$ ) tel que l'espérance dans (4.25) peut s'écrire

$$E \left( \exp \left( -\frac{c}{k(\beta)} |\tau_\beta \cap \{1, \dots, k(\beta)\}| \right) \right).$$

Comme  $\tau_\beta$  converge vers  $\tau$  et  $k(\beta)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\beta$  tend vers 0, et

$$\frac{|\tau \cap \{1, \dots, N\}|}{N} \xrightarrow{\text{p.s}} \frac{1}{m} := \frac{1}{\sum_{n \geq 1} nK(n)},$$

nous nous attendons à ce que la variable aléatoire  $\frac{|\tau_\beta \cap \{1, \dots, k(\beta)\}|}{k(\beta)}$  tende vers  $1/m$ , mais le résultat n'est pas clair à cause d'un problème d'uniformité en  $\beta$ . Toutefois, nous pouvons montrer « à la main » que cette convergence a bien lieu. Prouvons par exemple qu'il y a convergence de la fonction de répartition. Comme

$$\begin{aligned} P \left( \frac{|\tau_\beta \cap \{1, \dots, k(\beta)\}|}{k(\beta)} \geq x \right) &= P(|\tau_\beta \cap \{1, \dots, k(\beta)\}| \geq \lceil xk(\beta) \rceil) \\ &= P(\tau_{\beta, \lceil xk(\beta) \rceil} \leq k(\beta)) \\ &= P(\tau_{\beta, \lceil xk(\beta) \rceil} / k(\beta) \leq 1), \end{aligned}$$

il suffit de montrer que  $\tau_{\beta, \lceil xk(\beta) \rceil} / k(\beta)$  converge en loi vers  $xm$  lorsque  $\beta$  tend vers 0. Nous allons le prouver en passant par la transformée de Laplace. Dorénavant, nous supposons que  $xk(\beta)$  est un entier pour éviter d'écrire trop souvent  $\lceil \cdot \rceil$ . Premièrement, nous définissons  $\Phi_\beta$  une matrice de transformées de Laplace. Pour tous  $\beta \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $x$  et  $y$  dans  $E^q$ ,  $\Phi_{\beta, x, y}(\lambda) := \varphi_{y_q}(\lambda) \tilde{Q}_\beta^*(x, y)$  où  $\tilde{Q}_\beta^*$  est la matrice de transition définie dans le lemme 2.2.1, et les  $\varphi_t$  sont les transformées de Laplace suivantes :

$$\varphi_t(\lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{si } 1 \leq t \leq q \\ \sum_{t > q} e^{-\lambda t} \frac{K(t)}{K(\star)} & \text{si } t = \star. \end{cases}$$

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

Alors

$$E \left( e^{-\lambda \frac{\tau_{\beta, xk(\beta)}}{k(\beta)}} \right) = \mu_0 \Phi_{\beta}^{xk(\beta)} \left( \frac{\lambda}{k(\beta)} \right) \mathbf{1},$$

où  $\mathbf{1}$  est le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1 et  $\mu_0$  est la loi initiale de la chaîne de Markov modulante. Définissons aussi

$$m(t) = \begin{cases} t & \text{si } 1 \leq t \leq q \\ \sum_{t>q} t \frac{K(t)}{K(\star)} & \text{si } t = \star. \end{cases}$$

Alors  $\varphi_t(\lambda) = 1 - \lambda m(t)(1 + o_{\lambda}(1))$  et  $\tilde{Q}_{\beta}^* = \tilde{Q}_0^* + A\beta^2(1 + o_{\beta}(1))$ , où

$$A\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

et donc il existe une matrice  $\epsilon_{\beta}(\lambda) = o_{\beta}(1)$  pour tout  $\lambda \geq 0$  telle que

$$\Phi_{\beta}(\lambda a \beta^2) = \tilde{Q}_0^* + \beta^2(A - \lambda a M) + \beta^2 \epsilon_{\beta}(\lambda), \quad (4.27)$$

où  $M(x, y) = m(y_q) \tilde{Q}_0^*(x, y)$  et

$$M\mathbf{1} = m\mathbf{1}. \quad (4.28)$$

D'après (4.26) et (4.28), pour tout  $k \geq 0$ ,

$$(\tilde{Q}_0^* + \beta^2(A - a\lambda M))^k \mathbf{1} = (1 - a\lambda m \beta^2)^k \mathbf{1}, \quad (4.29)$$

et si nous choisissons  $k = k(\beta) = \frac{1}{a\beta^2}$  en faisant tendre  $\beta$  vers 0, le terme de droite dans (4.29) converge vers  $e^{-\lambda m x}$ , qui est la limite souhaitée. Contrôlons maintenant le reste. Soit

$$R_{\beta, n}(\lambda) = \mu_0 \left( \Phi_{\beta}^n(\lambda a \beta^2) - (\tilde{Q}_0^* + \beta^2(A - a\lambda M))^n \right) \mathbf{1}.$$

D'après (4.27), pour tout  $\lambda \geq 0$  il existe  $c > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |R_{\beta, n}(\lambda)| &\leq \sum_{k=1}^n C_n^k (1 + c\beta^2)^{n-k} (\beta^2 \max_{x, y \in E^q} |\epsilon_{\beta}(x, y)|)^k \\ &= (1 + c\beta^2 + \beta^2 \|\epsilon_{\beta}\|)^n - (1 + c\beta^2)^n, \end{aligned}$$

et si on pose  $n = x/(a\beta^2)$ , les deux derniers termes convergent vers la même limite lorsque  $\beta$  tend vers 0.  $\square$

Nous résumons ici la preuve dans le cas  $\alpha > 1$ . Uniformément en  $\beta \leq \beta_0$  (pour un  $\beta_0$  arbitraire) : poser  $h = h_c^a(\beta) + a\beta^2$  et choisir  $a$  assez petit,  $\gamma$  assez proche de 1, de manière à ce que la condition  $(1 + \alpha)\gamma - 1 > 1$  et le lemme 4.3.2 soient vérifiés. Si nécessaire, prendre  $a$  encore plus petit pour que  $S_2$  soit petit, et prendre  $R$  assez grand pour que  $S_1$  soit petit. Finalement,  $\varrho$  est plus petit que 1 et d'après le lemme 4.3.1, nous concluons que  $F(\beta, h_c^a(\beta) + a\beta^2) = 0$ .

### 4.3.3 Cas $1/2 < \alpha < 1$

Fixons  $\beta > 0$  et posons

$$k = k(\Delta) := F^\alpha(\beta, h_c^\alpha(\beta) + \Delta)^{-1}$$

si bien que d'après la proposition 2.3.2,

$$k(\Delta) \stackrel{\Delta \searrow 0}{\sim} (L'_\beta(1/\Delta))^{-1} \Delta^{-1/\alpha}.$$

En utilisant (4.24) avec  $\lambda = 1/\sqrt{j}$  et le fait que

$$0 \leq \Delta \sqrt{j} \leq \Delta \sqrt{k} \stackrel{\Delta \searrow 0}{\sim} (L'_\beta(1/\Delta))^{-1/2} \Delta^{1-\frac{1}{2\alpha}} \xrightarrow{(\alpha > 1/2)} 0,$$

il existe des constantes strictement positives  $c_1$  et  $c_2$  (qui peuvent dépendre de  $\beta$ ) telles que pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$\mathbb{E}_{j, 1/\sqrt{j}}(\tilde{Z}_j) \leq c_1 E_\beta \left( e^{-\frac{c_2}{\sqrt{j}} |\tau \cap \{1, \dots, j\}|} \delta_j \right).$$

Pour tout  $x$  dans  $E^q$ , notons  $\tau^{(x)}$  le processus de renouvellement défini par

$$\tau^{(x)} = \{\tau_n, n \geq q : \bar{T}_{n-q}^* = x\}.$$

D'après (3.6), lorsque  $\tau$  suit la loi  $P_\beta$ , le noyau de probabilité des interarrivées de  $\tau^{(x)}$ , noté  $K_\beta^{(x)}$ , vérifie

$$K_\beta^{(x)}(n) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} c(\beta, x) K(n) \tag{4.30}$$

où  $c(\beta, x)$  est une constante strictement positive. Alors

$$\begin{aligned} E_\beta \left( e^{-\frac{c_2}{\sqrt{j}} |\tau \cap \{1, \dots, j\}|} \delta_j \right) &= \sum_{x \in E^q} E_\beta \left( e^{-\frac{c_2}{\sqrt{j}} |\tau \cap \{1, \dots, j\}|} \delta_j^{(x)} \right) \\ &\leq \sum_{x \in E^q} E_\beta \left( e^{-\frac{c_2}{\sqrt{j}} |\tau^{(x)} \cap \{1, \dots, j\}|} \delta_j^{(x)} \right). \end{aligned}$$

Pour chacun des termes de la somme, nous utilisons (4.30) et nous appliquons la proposition A.2 de [21] pour obtenir

$$E_\beta \left( e^{-\frac{c_2}{\sqrt{j}} |\tau^{(x)} \cap \{1, \dots, j\}|} \delta_j^{(x)} \right) \leq C(\beta, x) \frac{L(j)}{j^\alpha}.$$

Ainsi, d'après (4.23), il existe une constante  $c$  (qui dépend de  $\beta$  mais  $\beta$  est fixé ici) telle que :

$$A_j \leq c(L(j))^\gamma j^{-\gamma\alpha}, \tag{4.31}$$

### 4.3 Le cas $\alpha > 1/2$ et $\beta > 0$

---

et  $(L(\cdot))^\gamma$  est une fonction à variation lente (cf. appendice A.2). Dans ce qui suit, la valeur de la constante  $c$  peut changer de ligne en ligne. On décompose la somme apparaissant dans (4.21) en deux parties. Premièrement, on obtient en utilisant la proposition A.2.1 (point 2) à plusieurs reprises :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k/2} \frac{L(k-j)A_j}{(k-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}} &\leq c \frac{L(k/2)}{k^{(1+\alpha)\gamma-1}} \sum_{j=1}^{k/2} \frac{(L(j))^\gamma}{j^{\alpha\gamma}} \text{ d'après (4.31)} \\ &\leq \frac{c(L(k/2))^{(1+\gamma)}}{k^{\gamma(2\alpha+1)-2}}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$  (i.e  $\Delta \rightarrow +\infty$ ) en choisissant  $\gamma$  assez proche de 1, puisque

$$\gamma(2\alpha + 1) - 2 \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} 2\alpha - 1 > 0.$$

Nous avons ensuite

$$\begin{aligned} \sum_{j=k/2+1}^{k-1} \frac{L(k-j)A_j}{(k-j)^{(1+\alpha)\gamma-1}} &\leq c \frac{(L(k/2))^\gamma}{k^{\gamma\alpha}} \sum_{j=1}^{k/2} \frac{L(j)}{j^{(1+\alpha)\gamma-1}} \text{ d'après (4.31)} \\ &\leq \frac{c(L(k/2))^{(1+\gamma)}}{k^{\gamma(2\alpha+1)-2}}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $k \rightarrow +\infty$  pour les mêmes raisons que ci-dessus. On conclut donc d'après le lemme 4.3.1 que pour tout  $\beta > 0$ , pour  $\Delta > 0$  assez petit,  $F(\beta, h_c^\alpha(\beta) + \Delta) = 0$  et donc  $h_c(\beta) > h_c^\alpha(\beta)$ .

**Remarque 4.3.1.** *Pour obtenir la borne (4.1) comme dans le cas i.i.d, il faudrait poser  $\Delta$  de la forme  $\Delta = a\beta^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}+\epsilon}$  ( $\epsilon > 0$  arbitrairement petit) et obtenir des bornes sur les  $(A_j)_{1 \leq j \leq k(\beta)}$  qui soient uniformes en  $\beta$  sur  $(0, \beta_0)$  ( $\beta_0 > 0$  fixé), mais cela demande une analyse plus fine que la preuve que nous venons de faire. Dans le cas  $\alpha > 1$ , celle-ci est rendue possible par le lemme 4.3.5. Pour prouver ce lemme, nous utilisons le fait que les termes en  $\beta$  de  $\tilde{Q}_\beta^*$  et  $\Delta = a\beta^2$  sont du même ordre en  $\beta$ , ce qui n'est plus vrai dans le cas  $1/2 < \alpha < 1$ .*

Corrélations à portée finie : régime pertinent.



---

# Chapitre 5

## Corrélations à décroissance rapide.

Une question qui se pose naturellement est de savoir quels résultats parmi ceux des chapitres précédents subsistent et si les techniques se généralisent au cas où nous enlevons l'hypothèse de finitude sur la portée des corrélations (condition (2.3)). Il est à peu près clair que la construction des renouvellements à mémoire *finie* ne suffit plus à traiter le problème. La généralisation de la méthode devrait plutôt faire intervenir des processus à mémoire infinie (aussi appelées chaînes à liaisons complètes).

Dans ce chapitre, nous obtenons des informations sur les propriétés *annealed* du modèle lorsque les corrélations du désordre décroissent « assez rapidement », de deux manières différentes :

- par approximation avec une suite de covariance nulle à partir d'un certain rang, où le rang est choisi arbitrairement grand ;
- en faisant le lien entre ce problème et l'étude du décalage sur les suites d'entiers ainsi que les mesures de Gibbs ou d'équilibre associées à un potentiel défini sur ces mêmes suites d'entiers.

### 5.1 Hypothèses

Dans ce chapitre nous supposons toujours que  $\omega$  est un processus gaussien stationnaire, centré, de variance 1, mais nous ne rajoutons pas l'hypothèse de portée finie sur les corrélations comme nous l'avons fait dans les chapitres 2, 3 et 4. Les hypothèses sur  $K(\cdot)$  sont les mêmes que précédemment (en particulier, pour alléger les preuves, nous considérons toujours que  $K(n) > 0$  pour tout  $n \geq 1$ , bien que l'hypothèse d'apériodicité soit suffisante). Sauf mention contraire, nous considérons les fonctions de partition *pinned*.

Rappelons que si les corrélations  $\rho_n = \text{Cov}(\omega_0, \omega_n)$  tendent vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, alors l'énergie libre *quenched*  $F(\beta, h)$  est toujours bien définie pour tous  $\beta$  et  $h$ , cf. remarque 2.1.1. Nous nous demandons maintenant à quelles conditions l'énergie libre *annealed* est bien définie. D'après la preuve du théorème 2.1.1 (égalité (2.7)), nous avons :

$$Z_{n,\beta,h}^a = E \left( \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{k=1}^n \delta_k + \beta^2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \right) \delta_n \right). \quad (5.1)$$

Commençons par le cas où les  $\rho_n$  sont positifs. Nous avons :

**Proposition 5.1.1.** *Si les  $\rho_n$  sont positifs, alors l'énergie libre annealed*

$$F^a(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h}^a$$

*est finie si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 1} \rho_n$  converge.*

*Démonstration.* Fixons  $\beta$  et  $h$  et écrivons  $Z_n^a$  à la place de  $Z_{n,\beta,h}^a$ . Soient  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}^*$ . En considérant les renouvellements qui passent par le point  $n$  on obtient

$$Z_{n+m}^a \geq E \left[ \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \iota_{n+m} + \beta^2 \sum_{1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \right) \delta_n \delta_{n+m} \right]. \quad (5.2)$$

Comme les  $\rho_n$  sont positifs, nous avons

$$\sum_{1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \geq \sum_{1 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l + \sum_{n+1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l,$$

et donc en utilisant la propriété de Markov sur (5.2), on obtient

$$Z_{n+m}^a \geq Z_n^a Z_m^a. \quad (5.3)$$

Ainsi, la suite  $((1/n) \log Z_n^a)_{n \geq 1}$  converge vers  $F^a(\beta, h)$ , qui n'est pas nécessairement finie cependant. Si nous supposons de plus que les  $\rho_n$  sont sommables, alors, comme

$$Z_n^a \leq \exp \left( n \left( h + \frac{\beta^2}{2} + \beta^2 \sum_{k \geq 1} \rho_k \right) \right), \quad (5.4)$$

l'énergie libre *annealed* est finie. Si les  $\rho_n$  ne sont pas sommables, considérons l'événement

$$\mathcal{E}_n := \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{T_i = 1\},$$

## 5.1 Hypothèses

---

et écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log Z_n^a &\geq \frac{1}{n} \log E \left( e^{\left(h + \frac{\beta^2}{2}\right) \mathbf{1}_n + \beta^2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l} \mathbf{1}_{\mathcal{E}_n} \right) \\ &= h + \frac{\beta^2}{2} + \log K(1) + \frac{\beta^2}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k \rho_i. \end{aligned}$$

Par Césaro, le deuxième terme tend vers  $+\infty$ , et donc  $F^a(\beta, h) = +\infty$ .  $\square$

Passons maintenant au cas où les  $\rho_n$  sont de signe quelconque. Nous obtenons :

**Proposition 5.1.2.** *Dans les deux cas suivants, l'énergie libre annealed*

$$F^a(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h}^a$$

existe et est finie :

1.  $\sum_{n \geq 1} n |\rho_n| < +\infty$  ;
2.  $\sum_{n \geq 1} |\rho_n| < +\infty$  et  $\sum_{k \geq n} |\rho_k| = L_\rho(n) n^{-\theta}$  où  $L_\rho$  est une fonction à variation lente, avec  $0 < \theta \leq 1$  ou bien  $\theta = 0$  et  $\sum_{n \geq 1} L_\rho(n) n^{-1} < +\infty$ .

*Démonstration.* Posons

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i \geq k} |\rho_i| = \sum_{k=1}^n k |\rho_k|.$$

Soient  $m$  et  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Nous avons

$$\sum_{1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l = \left( \sum_{1 \leq k < l \leq n} + \sum_{n+1 \leq k < l \leq n+m} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n+1 \leq l \leq n+m}} \right) \rho_{l-k} \delta_k \delta_l.$$

Or,

$$\left| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n+1 \leq l \leq n+m}} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \right| \leq \sum_{l=1}^m \sum_{i \geq 0} |\rho_{l+i}| = \Delta_m,$$

et donc

$$\sum_{1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \geq \sum_{1 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l + \sum_{n+1 \leq k < l \leq n+m} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l - \Delta_m.$$

On en déduit donc, en considérant les renouvellements qui passent par le point  $n$  et en utilisant la propriété de Markov, que

$$Z_{n+m}^a \geq Z_n^a Z_m^a \exp(-\beta^2 \Delta_m).$$

Dans le premier cas de figure, on a

$$Z_{n+m}^a \geq Z_n^a Z_m^a \exp(-\beta^2 \Delta),$$

où  $\Delta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n = \sum_{n \geq 1} n |\rho_n|$ . Ainsi, en multipliant des deux côtés par  $\exp(-\beta^2 \Delta)$ , on obtient que la suite  $(\log Z_n^a - \beta^2 \Delta)$  est sur-additive, d'où l'existence de  $F^a(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ((1/n) \log Z_n^a)$ , qui est finie d'après la borne (5.4). Dans le deuxième cas de figure, on a :

$$Z_{n+m}^a \geq Z_n^a Z_m^a \exp(-\beta^2 \Delta_m) \geq Z_n^a Z_m^a \exp(-\beta^2 \Delta_{n+m}),$$

avec

$$\Delta(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L_\rho(r) r^{1-\theta}}{1-\theta},$$

et nous pouvons conclure grâce au lemme de quasi sur-additivité (lemme 5.1.1) que l'énergie libre *annealed* existe. Celle-ci est finie, toujours d'après l'inégalité (5.4) (qui reste vraie en remplaçant les  $\rho_n$  par leurs valeurs absolues).  $\square$

**Lemme 5.1.1** (Lemme de quasi sous-additivité de Hammersley, [35]). *Soit  $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  tel que pour tous  $n, m \geq 1$ ,*

$$h(n+m) \leq h(n) + h(m) + \Delta(n+m),$$

*où  $\Delta$  est une suite croissante vérifiant :*

$$\sum_{r \geq 1} \frac{\Delta(r)}{r(r+1)} < +\infty.$$

*Alors la suite  $(h(n)/n)_{n \geq 1}$  a une limite dans  $[-\infty, +\infty)$ .*

Dans la suite, nous nous placerons toujours dans des cas où l'énergie libre *annealed* est bien définie.

## 5.2 Résultats

Nous allons maintenant énoncer trois résultats, dont un à propos du point critique *annealed* et deux à propos de l'exposant critique *annealed*.

## 5.2 Résultats

---

**Théorème 5.2.1.** *Si  $\sum_{n \geq 1} |\rho_n| < +\infty$ , alors*

$$h_c^a(\beta) \stackrel{\beta \searrow 0}{\sim} -\frac{\beta^2}{2} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_n P(n \in \tau) \right).$$

Ainsi, en ce qui concerne le comportement à haute température ( $\beta \searrow 0$ ) du point critique *annealed*, tout se passe comme s'il suffisait de faire tendre  $q$  vers l'infini dans la proposition 2.3.1. Notons que la somme  $\sum_{n \geq 1} \rho_n P(n \in \tau)$  est finie car les  $|\rho_n|$  sont supposées sommables.

**Théorème 5.2.2.** *S'il existe  $C > 0$  et  $\varrho \in (0, 1)$  tel que pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$|\rho_n| \leq C\varrho^n,$$

*alors pour tout  $\beta > 0$ , il existe dans chacun des cas suivants une constante  $c_\beta > 0$  et une fonction à variation lente  $\tilde{L}$  telle que*

1. *si  $K(n) = L(n)n^{-(1+\alpha)}$ ,  $0 < \alpha < 1$ , alors*

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} c_\beta \tilde{L}(1/\delta) \delta^{1/\alpha},$$

2. *si  $K(n) = L(n)/n^2$  avec  $\sum_{n \geq 1} L(n)/n = +\infty$  alors*

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} c_\beta \tilde{L}(1/\delta) \delta,$$

*où  $L(1/\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$ ,*

3. *si  $\sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , alors*

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} c_\beta \delta.$$

Dans le cas où les corrélations décroissent exponentiellement vite, on peut donc donner le comportement précis de la fonction d'énergie libre *annealed* au voisinage du point critique  $h_c^a(\beta)$ , qui est le même que dans le cas homogène  $\beta = 0$ . De plus, dans le cas  $\sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , nous verrons dans la preuve que  $c_\beta$  est la densité de contact moyenne lorsque  $\tau$  suit une certaine loi à mémoire infinie. Si l'on suppose seulement  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n| < +\infty$ , alors les techniques que nous utilisons ne nous permettent pas d'obtenir le comportement critique *annealed* précis. Nous obtenons tout de même :

**Théorème 5.2.3.** *Si les sommes  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  et  $\sum_{n \geq 1} nK(n)$  sont finies, alors pour tout  $\beta > 0$ , il existe une constante  $c_\beta > 0$  telle que pour tout  $\delta \geq 0$ ,*

$$c_\beta \delta \leq F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \leq \delta.$$

Dans le cas où les temps d'interarrivées sont intégrables, la transition de phase reste donc d'ordre un, comme dans le cas homogène. Notons également que seule la borne inférieure a besoin d'être prouvée. En effet, si  $\delta \geq 0$  alors

$$\sum_{k=1}^n (h_c^a(\beta) + \delta) \delta_k \leq h_c^a(\beta) \sum_{k=1}^n \delta_k + \delta n,$$

dont on déduit directement

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \leq F^a(\beta, h_c^a(\beta)) + \delta = \delta.$$

Les théorèmes 5.2.2 et 5.2.3 seront prouvés dans une partie à part, car les techniques que nous allons utiliser nécessitent d'introduire certains résultats sur les décalages de type infini. *A contrario*, nous pouvons prouver dès maintenant le théorème 5.2.1. Il s'avère que le comportement de la courbe critique *annealed* à haute température peut se déduire, par approximations, de celui du cas « portée finie ».

*Preuve du théorème 5.2.1.* Pour toute suite d'entiers non nuls  $\bar{t} = (t_i)_{i \geq 0}$ , nous notons

$$G(\bar{t}) = \sum_{n \geq 0} \rho_{t_0 + \dots + t_n}$$

et pour tout  $q \geq 1$ ,

$$G^{(q)}(\bar{t}) = \sum_{n \geq 0} \rho_{t_0 + \dots + t_n} \mathbf{1}_{\{t_0 + \dots + t_n \leq q\}}.$$

Comme

$$|G^{(q)}(\bar{t}) - G(\bar{t})| \leq \sum_{k \geq q+1} |\rho_k|,$$

on a

$$F^{a,q} \left( \beta, h - \beta^2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k| \right) \leq F^a(\beta, h) \leq F^{a,q} \left( \beta, h + \beta^2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k| \right),$$

où  $F^{a,q}$  (resp.  $h_c^{a,q}$ ) désigne l'énergie libre (resp. la courbe critique) *annealed* du modèle à portée de corrélations  $q$ . D'où :

$$h_c^{a,q}(\beta) - \beta^2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k| \leq h_c^a(\beta) \leq h_c^{a,q}(\beta) + \beta^2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k|$$

On en déduit, d'après la proposition 2.3.1,

$$\limsup_{\beta \searrow 0} \frac{h_c^a(\beta)}{(\beta^2/2)} \leq - \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^q \rho_k P(k \in \tau) - 2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k| \right)$$

### 5.3 Décalages de type infini

---

ainsi que

$$\liminf_{\beta \searrow 0} \frac{h_c^a(\beta)}{(\beta^2/2)} \geq - \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^q \rho_k P(k \in \tau) + 2 \sum_{k \geq q+1} |\rho_k| \right).$$

Pour conclure, il suffit de faire tendre  $q$  vers  $+\infty$ .  $\square$

La borne supérieure peut également être prouvée en appliquant l'inégalité de Jensen sur la fonction de partition *annealed*. En effet, on obtient alors (en considérant la fonction de partition libre) :

$$Z_{n,\beta,h}^a \geq \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{k=1}^n P(k \in \tau) + \beta^2 \sum_{1 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} P(k \in \tau) P(l - k \in \tau) \right),$$

et donc,

$$\frac{1}{n} \log Z_{n,\beta,h}^a \geq \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(k \in \tau) + \frac{\beta^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(k \in \tau) \sum_{l=1}^{n-k} \rho_l P(l \in \tau).$$

Si  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ , on obtient par le théorème du renouvellement A.3.1, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  :

$$F^a(\beta, h) \geq \frac{1}{m} \left( h + \frac{\beta^2}{2} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_n P(n \in \tau) \right) \right),$$

et donc, pour tout  $\beta \geq 0$ , pour tout  $h > -\frac{\beta^2}{2} (1 + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_n P(n \in \tau))$ ,  $F^a(\beta, h) > 0$ , d'où

$$h_c^a(\beta) \leq -\frac{\beta^2}{2} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \rho_n P(n \in \tau) \right).$$

## 5.3 Décalages de type infini

### 5.3.1 Définitions

Soit  $S$  un ensemble dénombrable et  $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$  l'espace des suites dans  $S$ . On appelle décalage de type infini l'application

$$T : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow \Sigma \\ x = (x_i)_{i \geq 0} & \mapsto Tx = (x_{i+1})_{i \geq 0}. \end{cases}$$

L'espace  $\Sigma$  est pourvu de la métrique

$$d(x, y) = 2^{-\inf\{k \geq 0 : x_k \neq y_k\}},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ . Les cylindres finis seront notés de la façon suivante : pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in S^n$ ,

$$[a] = \{x \in \Sigma : x_0 = a_0, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}\}.$$

Si  $x$  est un élément de  $\Sigma$  et  $s$  un élément de  $S$ , alors on note  $(sx)$ , ou parfois seulement  $sx$ , la concaténation de  $s$  et  $x$ , i.e  $(sx)_0 = s$  et  $(sx)_n = x_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ . Remarquons que dans le cas général, le décalage est introduit sur n'importe quelle partie de  $\Sigma$  invariante par  $T$ , mais ici seul le décalage entier (c'est-à-dire sur tout  $\Sigma$ ) nous intéresse. Dans ce cas, le système est clairement topologiquement mélangeant. En effet, pour tout cylindre fini  $C$ , il existe  $n \geq 1$  (prendre  $n$  égal à la taille du cylindre) tel que

$$T^n(C) = \Sigma.$$

Dans les références que nous allons citer (cf. [48] par exemple), une condition appelée condition (BIP) – pour *big images and preimages* – est introduite. Soit  $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{S \times S}$  une matrice à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , et supposons que l'on s'intéresse au décalage non pas sur  $\Sigma$  mais sur

$$\Sigma_{\mathbb{A}} := \{x \in S^{\mathbb{N}} : \forall i \geq 0, A_{x_i, x_{i+1}} = 1\}.$$

La condition (BIP) est alors satisfaite s'il existe  $N \geq 1$ ,  $b_1, \dots, b_N$  dans  $S$  tels que pour tout  $a$  dans  $S$ , il existe  $i, j$  tels que  $A_{b_i, a} A_{a, b_j} = 1$ . Celle-ci est clairement satisfaite pour les décalages sur l'espace  $\Sigma$  entier (c'est-à-dire notre cas) car alors la matrice  $\mathbb{A}$  est uniquement composée de 1.

Une fonction  $\phi$  définie sur  $\Sigma$  et à valeurs réelles sera appelée « potentiel ». Les variations d'un potentiel sont définies par :

$$\forall n \geq 1, \quad V_n(\phi) = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x_0 = y_0, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}\}.$$

On dira qu'un potentiel est à variations sommables si

$$\sum_{n \geq 1} V_n(\phi) < +\infty,$$

et qu'il est à décroissance exponentielle s'il existe  $\varrho \in (0, 1)$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$V_n(\phi) \leq C \times \varrho^n,$$



### 5.3 Décalages de type infini

---

auquel cas le potentiel est dit localement Hölder-continu, car pour tous  $x$  et  $y$  tels que  $x_0 = y_0$ ,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C \varrho^{\inf\{k \geq 0 : x_k \neq y_k\}} = Cd(x, y)^\kappa$$

avec  $\kappa = -\log \varrho / \log 2$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on notera

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n-1} \phi \circ T^k,$$

où  $T^0 := \text{Id}$ . L'opérateur de transfert (ou opérateur de Ruelle-Perron-Frobenius) associé au potentiel  $\phi$ , noté  $\mathcal{L}_\phi$ , est défini par

$$\forall f \in \mathbb{R}^\Sigma, \forall x \in \Sigma, \quad (\mathcal{L}_\phi f)(x) = \sum_{y:Ty=x} e^{\phi(y)} f(y),$$

autrement dit :

$$(\mathcal{L}_\phi f)(x) = \sum_{s \in S} e^{\phi(sx)} f(sx).$$

Pour que la définition soit correcte, il faut préciser le domaine de définition de l'opérateur, afin que la série dans l'égalité précédente soit bien définie. Par exemple, si  $\|\mathcal{L}_\phi \mathbf{1}\|_\infty$  est finie ( $\mathbf{1}$  étant ici la fonction identiquement égale à 1), alors l'opérateur de transfert agit sur les fonctions bornées. Notons que les itérés de l'opérateur de transfert sont reliés aux fonctions  $\phi_n$  par

$$(\mathcal{L}_\phi^n f)(x) = \sum_{y:T^n y=x} e^{\phi_n(y)} f(y) = \sum_{s_1, \dots, s_n \in S} e^{\phi_n(s_n \dots s_1 x)} f(s_n \dots s_1 x).$$

La proposition suivante est extraite de [50, Théorème 1].

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $a$  un élément de  $S$  et  $[a] = \{x \in \Sigma : x_0 = a\}$ . Supposons  $\sum_{n \geq 1} V_n(\phi) < +\infty$ . Alors la limite*

$$P_G(\phi) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x:T^n x=x} e^{\phi_n(x)} \mathbf{1}_{[a]}(x) \quad (5.5)$$

*existe, ne dépend pas de  $a$ , est finie si  $\|\mathcal{L}_\phi \mathbf{1}\|_\infty$  est finie, et est appelée pression de Gurevich de  $\phi$ .*

*Démonstration.* La preuve se trouve dans [50] et repose sur les propriétés de sur-additivité (cf. proposition A.1.1). En effet, si l'on note

$$\mathbf{Z}_n(\phi, a) = \sum_{x:T^n x=x} e^{\phi_n(x)} \mathbf{1}_{[a]}(x),$$

(en gras pour ne pas confondre avec les fonctions de partition) alors pour tous  $m$  et  $n$  entiers non nuls, on a

$$\mathbf{Z}_{n+m}(\phi, a) \geq C \mathbf{Z}_n(\phi, a) \mathbf{Z}_m(\phi, a)$$

où  $C = \exp(-3 \sum_{n \geq 1} V_n(\phi))$ . On en déduit donc par sur-additivité que

$$P_G(\phi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{Z}_n(\phi, a)$$

existe, mais aussi que pour tout  $n$ ,

$$P_G(\phi) \geq \frac{1}{n} \log \mathbf{Z}_n(\phi, a) + \frac{\log C}{n}. \quad (5.6)$$

Enfin,  $\mathbf{Z}_n(\phi, a) \leq \|\mathcal{L}_\phi \mathbf{1}\|_\infty^n$  donc  $P_G(\phi) \leq \log \|\mathcal{L}_\phi \mathbf{1}\|_\infty$ .  $\square$

**Remarque 5.3.1.** Si  $P_G(\phi)$  est finie, alors on a aisément  $P_G(\phi + c) = P_G(\phi) + c$  pour tout réel  $c$ .

**Remarque 5.3.2.** Une condition suffisante pour que  $\|\mathcal{L}_\phi \mathbf{1}\|_\infty$  soit finie est :

$$\exists C > 0, u : S \mapsto \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \sum_{s \in S} u(s) < +\infty \text{ et } \forall x \in S, e^{\phi(x)} \leq C u(\pi_0(x))$$

### 5.3.2 Théorèmes

Sous de bonnes hypothèses, l'opérateur de transfert  $\mathcal{L}_\phi$  a le même genre de propriétés qu'une matrice positive irréductible, et un théorème du type « Perron-Frobenius » peut être prouvé. Historiquement, cela a d'abord été établi pour les décalages sur un alphabet fini. Plusieurs auteurs ont ensuite trouvé des hypothèses plus générales, jusqu'à inclure le cas des décalages sur un alphabet dénombrable, pour des potentiels dont les variations décroissent assez rapidement. Le lecteur peut se référer à [47, 42, 49, 50, 51, 48]. Le théorème suivant est extrait de [48, Corollaire 2 et Théorème 2]. Rappelons que la condition (BIP) est satisfaite dans notre cas.

**Théorème 5.3.1.** Si  $\phi$  est à variations sommables et de pression de Gurevich finie, alors, en posant  $\lambda = \exp(P_G(\phi))$ , il existe une fonction  $h : \Sigma \mapsto (0, +\infty)$  continue et une mesure borélienne  $\nu$  finie, strictement positive sur tout cylindre fini, et ergodique, tels que :

1.  $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$ ,
2.  $\mathcal{L}_\phi^* \nu = \lambda \nu$ , où  $\mathcal{L}_\phi^*$  désigne l'adjoint de  $\mathcal{L}_\phi$
3.  $\int_\Sigma h d\nu < +\infty$ ,

### 5.3 Décalages de type infini

---

4.  $\nu(\Sigma) < +\infty$ ,
5.  $0 < \inf h \leq \sup h < +\infty$ ,
6. Si  $h$  est choisie de telle sorte que  $\int_{\Sigma} h d\nu = 1$ , alors

$$\forall n \geq 1, \forall a \in S^n, \quad \lambda^{-l} \mathcal{L}_{\phi}^l \mathbf{1}_{[a]} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \nu[a]h,$$

uniformément sur tout compact de  $\Sigma$ .

Soient  $h$  et  $\nu$  comme dans le théorème 5.3.1, normalisés de telle façon que  $\int_{\Sigma} h d\nu = 1$ , et  $m$  la probabilité sur  $\Sigma$  définie par

$$dm = h d\nu. \quad (5.7)$$

Alors  $m$  est une mesure de Gibbs invariante (pour le shift  $T$ ) associée au potentiel  $\phi$ , i.e. il existe une constante  $B > 0$  telle que pour tous  $n \geq 1$ ,  $a$  dans  $S^n$  et  $x$  dans  $[a]$ ,

$$\frac{1}{B} \leq \frac{m([a])}{e^{\phi_n(x) - nP_G(\phi)}} \leq B,$$

cf. [48]. Nous pouvons aussi définir une chaîne de Markov sur  $\Sigma$  à partir de  $\nu$  et  $h$ , dont les probabilités de transition sont :

$$\forall x, y \in \Sigma, \quad Q(x, y) = \frac{e^{\phi(y)} h(y)}{\lambda h(x)} \mathbf{1}_{\{Ty=x\}}, \quad (5.8)$$

où  $\lambda = \exp(P_G(\phi))$ . On a bien  $\sum_{s \in S} Q(x, sx) = 1$  pour tout  $x$  dans  $\Sigma$ , en vertu du premier point du théorème 5.3.1. On peut vérifier alors que  $m$  est une probabilité stationnaire pour cette chaîne de Markov : pour toute fonction borélienne bornée  $\varphi$ , on a

$$\begin{aligned} \int (Q\varphi)(x) dm(x) &= \int \sum_{s \in S} \varphi(sx) Q(x, sx) dm(x) \\ &= \lambda^{-1} \int \sum_{s \in S} \varphi(sx) e^{\phi(sx)} h(sx) d\nu(x) \\ &= \lambda^{-1} \int \mathcal{L}_{\phi}(\varphi h)(x) d\nu(x) \\ &= \int \varphi(x) h(x) d\nu(x) \text{ d'après thm. 5.3.1 (2)} \\ &= \int \varphi(x) dm(x). \end{aligned}$$

Le deuxième théorème donne le comportement précis de la pression de Gurevich pour des potentiels à un paramètre du type  $\{\phi + t\psi\}_{t \geq 0}$ , lorsque  $t$  tend vers 0, et sous certaines hypothèses sur les potentiels  $\phi$  et  $\psi$ . Ce résultat se base sur [49, Théorèmes 4 et 5, Remarque (3) page 635].

**Théorème 5.3.2.** Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux potentiels dont les variations sont à décroissance exponentielle, tels que

- $\sup \phi < +\infty$ ,
- $\sup \psi < +\infty$ ,
- $P_G(\phi) < +\infty$ .

Soit  $m$  la mesure de Gibbs invariante associée à  $\phi$ , définie par (5.7). Dans la suite,  $L$  désigne une fonction à variation lente.

1. Si  $m(\{x : \psi(x) < -n\}) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{-\alpha} L(n)}{\Gamma(1-\alpha)}$ , avec  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$P_G(\phi + t\psi) - P_G(\phi) \stackrel{t \searrow 0}{\sim} -L(1/t)t^\alpha;$$

2. si  $\psi \in L^1(m)$ , alors

$$P_G(\phi + t\psi) - P_G(\phi) \stackrel{t \searrow 0}{\sim} t \times \left( \int \psi dm \right);$$

3. si  $\alpha = 1$  et  $\psi \notin L^1(m)$ , alors

$$P_G(\phi + t\psi) - P_G(\phi) \stackrel{t \searrow 0}{\sim} tL(1/t),$$

$$\text{où } L(n) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int (\psi \vee (-n)) dm.$$

Notons que dans [49, Théorème 5], l'auteur parle plutôt de mesure d'équilibre, mais nous pouvons en fait remplacer « mesure d'équilibre » par « mesure de Gibbs » (ibid. note en bas de la page 637).

## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

Nous allons utiliser dans les deux preuves suivantes les outils introduits dans la partie précédente, concernant les décalages de type infini, dans le cas où  $S = \mathbb{N}^*$ .

Commençons par quelques notations et définitions. Soit  $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  l'espace des suite d'entiers naturels non nuls. Si  $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots)$  est un élément de  $\Sigma$  et  $n \geq 1$ , on note  $(n\bar{t})$  la concaténation  $(n, t_0, t_1, \dots)$ . On rappelle la définition de la fonction  $G$  et on introduit ses versions tronquées  $G^{(n)}$ ,  $n \geq 1$  :

$$G(\bar{t}) = \sum_{n \geq 0} \rho_{t_0 + \dots + t_n}$$

et

$$G^{(n)}(\bar{t}) = \rho_{t_0} + \rho_{t_0+t_1} + \dots + \rho_{t_0+\dots+t_{n-1}}.$$

## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

---

Notons que  $G$  est bien définie si  $\sum \rho_n$  converge absolument, et que les versions tronquées que nous venons de définir sont différentes de celles utilisées lors de la preuve du théorème 5.2.1. On rappelle également que le shift  $T$  agissant sur  $\Sigma$  est défini par :

$$\forall x \in \Sigma, \forall i \geq 0, \quad (Tx)_i = x_{i+1}.$$

L'application « première coordonnée » sera notée  $\pi_0 : \bar{t} = (t_0, t_1, \dots) \mapsto t_0$ . Pour tout  $\beta > 0$ , on définit :

$$\phi_\beta : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{t} & \mapsto & \beta^2 G(\bar{t}) + \log K(t_0) \end{cases},$$

que l'on peut aussi écrire

$$\phi_\beta = \beta^2 G + \log K \circ \pi_0.$$

Si  $P_G(\phi_\beta)$  existe, alors elle est finie d'après la remarque 5.3.1 ( $G$  étant bornée). On peut alors définir pour tous  $\beta > 0$  et  $F \geq 0$ ,

$$\phi_{\beta,F} : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{t} & \mapsto & \beta^2 G(\bar{t}) + \log K(t_0) - P_G(\phi_\beta) - F \times t_0 \end{cases},$$

que l'on peut aussi écrire

$$\phi_{\beta,F} = \beta^2 G + \log K \circ \pi_0 - P_G(\phi_\beta) - F \times \pi_0 = \phi_\beta - P_G(\phi_\beta) - F \times \pi_0.$$

De même, si  $P_G(\phi_{\beta,F})$  existe alors elle est finie d'après la remarque 5.3.1. L'opérateur de transfert associé à  $\phi_\beta$  (resp.  $\phi_{\beta,F}$ ) sera noté  $\mathcal{L}_\beta$  (resp.  $\mathcal{L}_{\beta,F}$ ). On a ainsi :

$$\mathcal{L}_\beta f : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{t} & \mapsto & \sum_{n \geq 1} e^{\beta^2 G(n\bar{t})} K(n) f(n\bar{t}) \end{cases}$$

et

$$\mathcal{L}_{\beta,F} f : \begin{cases} \Sigma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{t} & \mapsto & \sum_{n \geq 1} e^{\beta^2 G(n\bar{t}) - P_G(\phi_\beta) - F n} K(n) f(n\bar{t}) \end{cases}$$

Les variations de  $\phi_\beta$  et  $\phi_{\beta,F}$  sont reliées à la façon dont les corrélations  $\rho_n$  décroissent, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 5.4.1.** *Si la série  $\sum_{n \geq 1} n |\rho_n|$  converge alors pour tous  $\beta$  et  $F$ , les potentiels  $\phi_\beta$  et  $\phi_{\beta,F}$  sont à variations sommables. Si les  $\rho_n$  décroissent exponentiellement vite, alors il en va de même pour les variations de  $\phi_\beta$  et  $\phi_{\beta,F}$  (avec le même exposant).*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$V_n(\phi_\beta) = V_n(\phi_{\beta,F}) = \beta^2 V_n(G),$$

les constantes et les fonctions dépendant seulement de la première coordonnée ne jouant aucun rôle dans les variations des potentiels. Il suffit ensuite de constater que pour tout  $n \geq 1$ , et tous  $x$  et  $y$  dans  $\Sigma$  tels que  $x_0 = y_0, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}$ ,

$$|G(x) - G(y)| \leq \left| \sum_{k \geq n} \rho_{x_0 + \dots + x_k} - \sum_{k \geq n} \rho_{y_0 + \dots + y_k} \right| \leq 2 \sum_{k \geq n} |\rho_k|.$$

□

**Remarque 5.4.1.** *D'après les propositions 5.3.1 et 5.4.1, si  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  est finie alors les quantités limites  $P_G(\phi_\beta)$  et  $P_G(\phi_{\beta,F})$  existent et sont finies.*

**Proposition 5.4.2.** *Supposons  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n| < +\infty$ . Pour tout  $\beta > 0$ , la fonction qui à  $F \in \mathbb{R}_+$  associe  $P_G(\phi_{\beta,F})$  est continue et strictement décroissante, vaut 0 en  $F = 0$  et tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ .*

*Démonstration.* Premièrement,  $P_G(\phi_\beta)$  et  $P_G(\phi_{\beta,F})$  existent et sont finies d'après la remarque précédente. De plus,  $P_G(\phi_{\beta,F=0}) = P_G(\phi_\beta - P_G(\phi_\beta)) = 0$  (cf. remarque 5.3.2). Soit  $a$  un entier non nul choisi arbitrairement. Pour tous  $F_1$  et  $F_2$  dans  $\mathbb{R}_+$ , nous avons

$$\forall \bar{t} \in \Sigma, \quad \phi_{\beta, F_1 + F_2}(\bar{t}) \leq \phi_{\beta, F_1}(\bar{t}) - F_2$$

d'où

$$\mathbf{Z}_n(\phi_{\beta, F_1 + F_2}, a) \leq \mathbf{Z}_n(\phi_{\beta, F_1}, a) \exp(-F_2 n)$$

et en passant à la limite,

$$P_G(\phi_{\beta, F_1 + F_2}) \leq P_G(\phi_{\beta, F_1}) - F_2. \tag{5.9}$$

On en déduit la stricte décroissance et le fait que  $P_G(\phi_{\beta,F}) \rightarrow -\infty$  lorsque  $F \rightarrow +\infty$ . La continuité sur  $(0, +\infty)$  découle de la convexité de la fonction. En effet, pour tout  $n$ , la fonction  $F \mapsto \log \mathbf{Z}_n(\phi_{\beta,F}, a)$  est convexe (la convexité est conservée en passant à la limite en  $n$ ) car on peut montrer par un calcul similaire à (1.13) (et les lignes suivantes) que pour  $F > 0$ ,  $\partial_F^2 \log \mathbf{Z}_n(\phi_{\beta,F}, a)$  s'écrit comme une variance, et est donc positive. Prouvons maintenant la continuité en  $F = 0$ . Soit  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit. Comme

$$\frac{1}{n} \log \mathbf{Z}_n(\phi_{\beta, F=0}, a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

---

Il existe  $n_0$  tel que

$$\frac{1}{n_0} \log \mathbf{Z}_{n_0}(\phi_{\beta, F=0}, a) + \frac{\log C}{n_0} \geq -\epsilon,$$

où  $C$  est la constante apparaissant dans (5.6). D'après (5.6), on a

$$P_G(\phi_{\beta, F}) \geq \frac{1}{n_0} \log \mathbf{Z}_{n_0}(\phi_{\beta, F}, a) + \frac{\log C}{n_0},$$

et par continuité en  $F$  de la fonction  $\mathbf{Z}_{n_0}(\phi_{\beta, F}, a)$ , on en déduit que  $P_G(\phi_{\beta, F}) \geq -2\epsilon$  pour  $F$  assez petit, ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le point de départ pour prouver les théorèmes 5.2.2 et 5.2.3 est la caractérisation suivante de l'énergie libre *annealed* :

**Proposition 5.4.3.** *Supposons que la série  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  converge, de sorte que l'énergie libre *annealed* est bien définie. Pour tout  $\beta \geq 0$ ,*

1. *si  $h \leq -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta)$  alors*

$$F^a(\beta, h) = 0,$$

2. *si  $h = -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta) + \delta$  avec  $\delta > 0$  alors  $F^a(\beta, h)$  est l'unique solution strictement positive de l'équation en  $F$  suivante :*

$$P_G(\phi_{\beta, F}) = -\delta. \tag{5.10}$$

Un corollaire immédiat de cette caractérisation est :

**Corollaire 5.4.1.** *Pour tout  $\beta \geq 0$ ,*

$$h_c^a(\beta) = -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta).$$

*Preuve de la proposition 5.4.3.* Remarquons tout d'abord que l'équation (5.10) a bien une unique solution strictement positive en vertu de la proposition 5.4.2. Nous modifions légèrement l'expression de la fonction de partition *annealed* :

$$Z_{n, \beta, h}^a = E \left( \exp \left( \left( h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{k=1}^n \delta_k + \beta^2 \sum_{0 \leq k < l \leq n} \rho_{l-k} \delta_k \delta_l \right) \delta_n \right),$$

(la deuxième somme commence à  $k = 0$  et non  $k = 1$ ) ce qui n'a aucune incidence sur l'énergie libre *annealed*.

Dans la suite nous appelons « passé » une suite de temps d'interarrivées placée artificiellement avant  $\tau_0 = 0$ . On a alors pour tout passé  $\bar{p}$  dans  $\Sigma$  :

$$Z_{n,\beta,h}^a = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k \left( e^{h + \frac{\beta^2}{2} + \beta^2 G^{(i)}(l_i l_{i-1} \dots l_1 \bar{p})} K(l_i) \right). \quad (5.11)$$

L'inconvénient de cette expression vient du fait qu'un nombre infini de potentiels (les  $G^{(i)}$ ) interviennent. Or, en raisonnant par analogie avec le cas des corrélations à portée finie, on aimerait relier  $Z_{n,\beta,h}^a$  aux propriétés spectrales d'un unique opérateur (associé à un unique potentiel). On va donc remplacer les  $G^{(i)}$  par  $G$ , c'est-à-dire remplacer une infinité de potentiels à mémoire finie (i.e. dont les variations sont nulles à partir d'un certain rang) par un unique potentiel à mémoire infinie. Comme  $\sum_{n \geq 1} n |\rho_n|$  est finie et donc les variations de  $G$  sont sommables, nous verrons que l'erreur commise en effectuant ce changement est négligeable. Définissons pour tout passé  $\bar{p}$  dans  $\Sigma$  :

$$\mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k \left( e^{h + \frac{\beta^2}{2} + \beta^2 G(l_i l_{i-1} \dots l_1 \bar{p})} K(l_i) \right). \quad (5.12)$$

Sous les hypothèses de la proposition, nous avons alors que pour tous  $\beta$  et  $h$  :

$$F^a(\beta, h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}}. \quad (5.13)$$

En effet, pour tout  $i \geq 1$ , tous  $l_1, \dots, l_i \geq 1$  et  $\bar{p}$  dans  $\Sigma$ , on a

$$|G(l_i \dots l_1 \bar{p}) - G^{(i)}(l_i \dots l_1 \bar{p})| = \left| \sum_{k \geq 0} \rho_{l_i + \dots + l_1 + p_0 + \dots + p_k} \right| \leq \sum_{k \geq i} |\rho_k|$$

et donc d'après (5.11), (5.12), on obtient l'encadrement

$$e^{-\beta^2 \sum_{n \geq 1} n |\rho_n|} \mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} \leq Z_{n,\beta,h}^a \leq \mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} e^{\beta^2 \sum_{n \geq 1} n |\rho_n|}, \quad (5.14)$$

dont découle directement (5.13). Ainsi, nous pouvons maintenant travailler directement sur les  $(\mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}})_{n \geq 1}$ .

Comme la série  $\sum_{n \geq 1} n |\rho_n|$  converge, les variations de  $\phi_\beta$  (resp.  $\phi_{\beta,F}$ ) sont sommables (proposition 5.4.1), et nous pouvons donc appliquer le théorème 5.3.1. Notons  $h_\beta$  et  $\nu_\beta$  (resp.  $h_{\beta,F}$  et  $\nu_{\beta,F}$ ) la fonction et la mesure propres ainsi obtenues, normalisées de sorte que  $\int_\Sigma h_\beta d\nu_\beta = 1$  (resp.  $\int_\Sigma h_{\beta,F} d\nu_{\beta,F} = 1$ ) et notons  $dm_\beta = h_\beta d\nu_\beta$  (resp.  $dm_{\beta,F} = h_{\beta,F} d\nu_{\beta,F}$ ) la mesure de Gibbs associée. Les probabilités de transition induites, définies par (5.8) dans le



## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

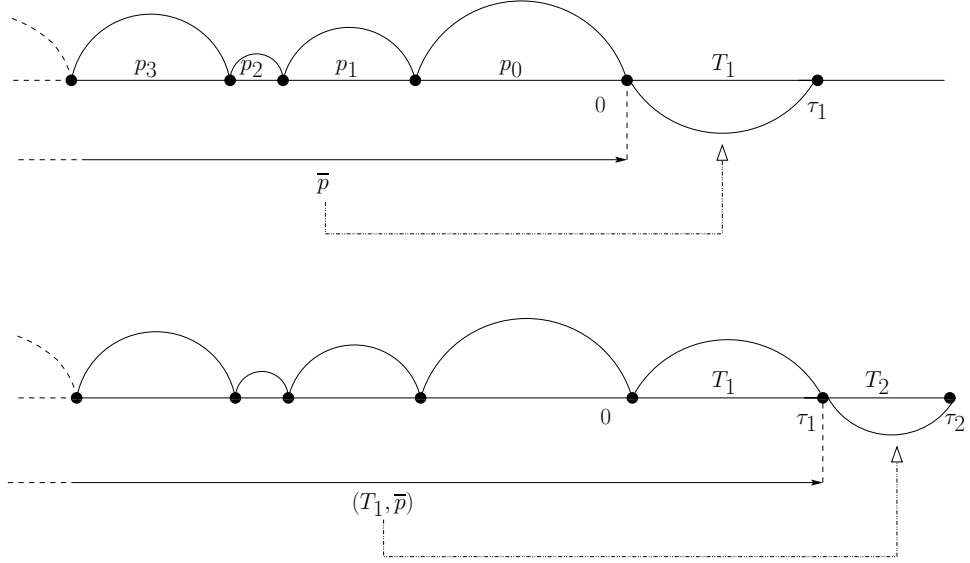


FIGURE 5.1 – Processus à mémoire complète. En haut : la loi du premier temps d'interarrivée dépend du passé  $\bar{p}$ , i.e.  $P_\beta(T_1 = n|\bar{p}) = K_\beta(\bar{p}, n)$  (cf. définition 5.15). En bas : à la deuxième étape, la loi de  $T_2$  dépend du « nouveau passé »  $(T_1, \bar{p})$ , soit la concaténation de  $T_1$  et  $\bar{p}$ . Ainsi,  $P_\beta(T_2 = m|T_1 = n, \bar{p}) = K_\beta(n\bar{p}, m)$ .

cadre général, seront notées  $(Q_\beta(\bar{s}, \bar{t}))_{\bar{s}, \bar{t} \in \Sigma}$  (resp.  $(Q_{\beta, F}(\bar{s}, \bar{t}))_{\bar{s}, \bar{t} \in \Sigma}$ ), et la loi de la chaîne de Markov sur  $\Sigma$  associée à ces transitions, partant de  $\bar{p}$ , sera notée  $P_\beta(\cdot|\bar{p})$  (resp.  $P_{\beta, F}(\cdot|\bar{p})$ ). On définit également  $P_\beta(\cdot) = \int_\Sigma P_\beta(\cdot|\bar{p}) dm_\beta(\bar{p})$  (resp.  $P_{\beta, F}(\cdot) = \int_\Sigma P_{\beta, F}(\cdot|\bar{p}) dm_{\beta, F}(\bar{p})$ ). Nous pouvons également voir ces lois comme des nouvelles lois sur le processus  $\tau$ . En effet, comme  $Q_\beta(x, y) > 0$  si et seulement si  $Ty = x$ , nous pouvons définir pour tout  $x$  dans  $\Sigma$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$K_\beta(x, n) := Q_\beta(x, nx) = \frac{\exp(\beta^2 G(nx)) K(n) h_\beta(nx)}{\exp(P_G(\phi_\beta)) h_\beta(x)}. \quad (5.15)$$

Ainsi, pour tout  $x$  dans  $\Sigma$ ,  $\sum_{n \geq 1} K_\beta(x, n) = 1$ , et pour tout  $\bar{p}$  dans  $\Sigma$ , tout  $n \geq 1$ , tous  $l_1, \dots, l_n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} P_\beta(\tau_1 = l_1, \tau_2 = l_1 + l_2, \dots, \tau_n = l_1 + \dots + l_{n-1} + l_n | \bar{p}) \\ = K_\beta(\bar{p}, l_1) K_\beta(l_1 \bar{p}, l_2) \dots K_\beta(l_{n-1} \dots l_1 \bar{p}, l_n) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sous  $P_\beta(\cdot|\bar{p})$ , tout se passe comme si le processus  $\tau = (\tau_n)_{n \geq 0}$  avait une mémoire à portée infinie (cf. figure 5.1).

Considérons dans un premier temps le cas  $h \leq -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta)$  et montrons que  $F^a(\beta, h) = 0$ . Par croissance en  $h$  de l'énergie libre, il suffit de montrer

que

$$F^a(\beta, -\beta^2/2 - P_G(\phi_\beta)) = 0.$$

Pour un passé  $\bar{p}$  quelconque, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\beta,-\beta^2/2-P_G(\phi_\beta)}^{\bar{p}} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k e^{\beta^2 G(l_i \dots l_1 \bar{p}) - P_G(\phi_\beta)} K(l_i) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \frac{h_\beta(\bar{p})}{h_\beta(l_k \dots l_1 \bar{p})} \prod_{i=1}^k K_\beta(l_{i-1} \dots \bar{p}, l_i) \text{ où } l_0 \bar{p} := \bar{p} \\ &\leq C_\beta \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k K_\beta(l_{i-1} \dots \bar{p}, l_i) \text{ d'après thm. 5.3.1 (5)} \\ &= C_\beta P_\beta(n \in \tau|\bar{p}) \\ &\leq C_\beta, \end{aligned}$$

et on utilise ensuite (5.13) pour conclure.

Passons maintenant au cas  $h = -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta) + \delta$ , avec  $\delta > 0$ . Notons  $F(\delta)$  la solution de l'équation (5.10). De manière analogue à (5.15), on définit pour tous  $x$  et  $n$  :

$$K_{\beta, F(\delta)}(x, n) = \exp(\delta + \beta^2 G(nx) - P_G(\phi_\beta) - F(\delta)n) K(n) \frac{h_{\beta, F(\delta)}(nx)}{h_{\beta, F(\delta)}(x)},$$

et pour un passé  $\bar{p}$ ,  $P_{\beta, F(\delta)}(\cdot|\bar{p})$  est la loi sur  $\tau$  associée aux transitions  $K_{\beta, F(\delta)}$  (de manière analogue à (5.16)). On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k e^{\delta + \beta^2 G(l_i \dots l_1 \bar{p}) - P_G(\phi_\beta)} K(l_i) \\ &= \exp(nF(\delta)) \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k e^{\delta + \beta^2 G(l_i \dots l_1 \bar{p}) - P_G(\phi_\beta) - F(\delta)l_i} K(l_i) \\ &= \exp(nF(\delta)) \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \frac{h_{\beta, F(\delta)}(\bar{p})}{h_{\beta, F(\delta)}(l_k \dots l_1 \bar{p})} \prod_{i=1}^k K_{\beta, F(\delta)}(l_{i-1} \dots \bar{p}, l_i). \end{aligned}$$

D'après le point (5) du théorème 5.3.1 et le fait que

$$P_{\beta, F(\delta)}(n \in \tau|\bar{p}) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_k = n}} \prod_{i=1}^k K_{\beta, F(\delta)}(l_{i-1} \dots \bar{p}, l_i),$$

## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

---

il existe donc deux constantes  $0 < c_\beta \leq C_\beta < +\infty$  telles que

$$c_\beta P_{\beta, F(\delta)}(n \in \tau | \bar{p}) \exp(F(\delta)n) \leq \mathcal{Z}_{n, \beta, h}^{\bar{p}} \leq C_\beta \exp(F(\delta)n).$$

Pour conclure la preuve, il suffit maintenant de prouver que

$$\frac{1}{n} \log P_{\beta, F(\delta)}(n \in \tau | \bar{p}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Fixons  $\beta > 0$  et  $\delta > 0$ , et écrivons  $P_{\bar{p}}$  à la place de  $P_{\beta, F(\delta)}(\cdot | \bar{p})$ . Nous allons montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $m, n \geq 1$ ,

$$P_{\bar{p}}(m + n \in \tau) \geq C P_{\bar{p}}(n \in \tau) P_{\bar{p}}(m \in \tau). \quad (5.17)$$

En multipliant par  $C$  des deux côtés, on pourra alors invoquer le lemme de sous-additivité classique pour établir que la suite  $((1/n) \log P_{\bar{p}}(n \in \tau))_{n \geq 1}$  converge. Clairement, sa limite est négative. Si elle était strictement négative alors on aurait

$$E_{\bar{p}} \left( \sum_{n \geq 1} \delta_n \right) = \sum_{n \geq 1} P_{\bar{p}}(n \in \tau) < +\infty,$$

ce qui est absurde car  $\sum_{n \geq 1} \delta_n = +\infty$  presque-sûrement. Ainsi, la limite est nulle. Prouvons (5.17). Soit  $m, n \geq 1$ . Alors :

$$\begin{aligned} & P_{\bar{p}}(n + m \in \tau) \\ & \geq P_{\bar{p}}(n \in \tau, n + m \in \tau) \\ & = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq m}} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = n \\ j_1 + \dots + j_p = m}} K_{\beta, F(\delta)}(\bar{p}, l_1) K_{\beta, F(\delta)}(l_1 \bar{p}, l_2) \dots K_{\beta, F(\delta)}(l_{n-1} \dots l_1 \bar{p}, l_n) \\ & \quad \times K_{\beta, F(\delta)}(l_n \dots l_1 \bar{p}, j_1) \dots K_{\beta, F(\delta)}(j_{p-1} \dots j_1 l_n \dots l_1 \bar{p}, j_p). \end{aligned}$$

Or, pour tout  $i \geq 1$ ,

$$|G(j_i \dots j_1 l_k \dots l_1 \bar{p}) - G(j_i \dots j_1 \bar{p})| \leq 2 \sum_{k \geq i} |\rho_k|.$$

Et  $c = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq i} |\rho_k| < +\infty$  par hypothèse, donc en posant

$$C = e^{-2c\beta^2} \times \inf_{x, y \in \Sigma} \{h_{\beta, F(\delta)}(y) / h_{\beta, F(\delta)}(x)\},$$

constante finie et strictement positive (toujours d'après le point (5) du théorème

---

5.3.1), on a :

$$\begin{aligned}
 & P_{\bar{p}}(n + m \in \tau) \\
 & \geq C \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq p \leq m}} \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = n \\ j_1 + \dots + j_p = m}} K_{\beta, F(\delta)}(\bar{p}, l_1) K_{\beta, F(\delta)}(l_1 \bar{p}, l_2) \dots K_{\beta, F(\delta)}(l_{n-1} \dots l_1 \bar{p}, l_n) \\
 & \times K_{\beta, F(\delta)}(\bar{p}, j_1) \dots K_{\beta, F(\delta)}(j_{p-1} \dots j_1 \bar{p}, j_p) \\
 & \geq C P_{\bar{p}}(n \in \tau) P_{\bar{p}}(m \in \tau),
 \end{aligned}$$

et la preuve est terminée.  $\square$

*Preuve du théorème 5.2.2.* Comme nous l'avons vu dans la proposition 5.4.1, si les  $\rho_n$  décroissent exponentiellement vite alors les variations des potentiels  $\phi_\beta$  et  $\phi_{\beta, F}$  décroissent exponentiellement vite également, et ces derniers sont alors localement Hölder continus. Soit  $h = h_c^a(\beta) + \delta = -\frac{\beta^2}{2} - P_G(\phi_\beta) + \delta$ , avec  $\delta > 0$ . Alors d'après le point (2) de la proposition 5.4.3, le réel  $F(\delta) := F^a(\beta, h)$  vérifie

$$P_G(\phi_\beta - P_G(\phi_\beta) - F(\delta)\pi_0) = -\delta.$$

Nous allons appliquer le théorème 5.3.2 avec  $\phi_\beta - P_G(\phi_\beta)$  à la place de  $\phi$ , et  $-\pi_0$  à la place de  $\psi$ , pour obtenir un équivalent du terme de gauche en fonction de  $F(\delta)$ . En « inversant » la relation obtenue (cf. [10, Théorème 1.5.12]), on obtiendra alors le comportement critique de  $F(\delta)$  lorsque  $\delta$  tend vers 0.

Nous allons tout d'abord montrer (dans le but de trouver le comportement asymptotique de  $m_\beta([n])$ ) que pour tout  $x$  dans  $\Sigma$ , la suite  $(h_\beta(nx))_{n \geq 1}$  converge vers une constante strictement positive (et qui ne dépend pas du  $x$  choisi). Choisissons un entier  $a \geq 1$  quelconque et notons pour tout  $x$  dans  $\Sigma$  et  $l \geq 1$  :

$$h_\beta^{(l)}(x) = \exp(-lP_G(\phi_\beta)) (\mathcal{L}_\beta^l \mathbf{1}_{[a]})(x).$$

Soient  $m \geq n \geq 1$  deux entiers. Alors pour tout  $l \geq 1$ , nous avons

$$e^{-2\beta^2 \sum_{j \geq n} \sum_{i \geq j} |\rho_i|} h_\beta^{(l)}(mx) \leq h_\beta^{(l)}(nx) \leq h_\beta^{(l)}(mx) e^{2\beta^2 \sum_{j \geq n} \sum_{i \geq j} |\rho_i|}.$$

En faisant tendre  $l$  vers l'infini, en utilisant le point (6) du théorème 5.3.1, et en passant au log, on obtient :

$$|\log h_\beta(mx) - \log h_\beta(nx)| \leq 2\beta^2 \sum_{j \geq n} \sum_{i \geq j} |\rho_i| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite  $(\log h_\beta(nx))_{n \geq 1}$  est donc de Cauchy. En conséquence, la suite  $(h_\beta(nx))_{n \geq 1}$  a bien une limite finie et strictement positive  $\bar{h}_\beta$ , qui ne dépend pas de  $x$  car

## 5.4 Preuve des théorèmes 5.2.2 et 5.2.3

---

pour tout  $x$  et  $y$ , nous avons également

$$|\log h_\beta(nx) - \log h_\beta(ny)| \leq 2\beta^2 \sum_{j \geq n} \sum_{i \geq j} |\rho_i|.$$

On a donc, par invariance de  $m_\beta$  sous l'action de  $Q_\beta$  :

$$\begin{aligned} m_\beta([n]) &= \int Q_\beta(\bar{p}, n\bar{p}) dm_\beta(\bar{p}) \\ &= \int e^{\beta^2 G(n\bar{p}) - P_G(\phi_\beta)} K(n) h_\beta(n\bar{p}) d\nu_\beta(\bar{p}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

qui, par convergence dominée, est équivalent à  $e^{-P_G(\phi_\beta)} \bar{h}_\beta \nu_\beta(\Sigma) \times K(n)$ . On conclut en utilisant le théorème 5.3.2 : si  $0 < \alpha < 1$ , alors

$$\delta \sim_0 L_\beta(1/F(\delta)) F(\delta)^\alpha;$$

si  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$  alors

$$\delta \sim_0 c_\beta m F(\delta);$$

si  $\alpha = 1$  et  $\sum_{n \geq 1} nK(n) = +\infty$  alors

$$\delta \sim_0 L_\beta(1/F(\delta)) F(\delta);$$

où dans chacun des cas suivants,  $c_\beta > 0$  est une constante et  $L_\beta$  une fonction à variation lente. Pour en déduire le comportement de  $F(\delta)$  en fonction de  $\delta$ , on utilise [10, théorème 1.5.12].

Notons que dans le cas

$$\sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty,$$

on obtient

$$F(\delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} \left( \int \pi_0 dm_\beta \right)^{-1} \delta,$$

et la constante  $(\int \pi_0 dm_\beta)^{-1}$  est la densité de contact limite lorsque  $\tau$  suit la loi  $m_\beta$ .  $\square$

*Preuve du théorème 5.2.3.* Avec les mêmes techniques que dans la preuve de la proposition 5.4.3, et en considérant des fonctions de partition libres plutôt que *pinned*, on peut prouver que pour tout  $\delta > 0$ , en  $h = h_c^\alpha(\beta) + \delta = -\frac{\beta^2}{2} + P_G(\phi_\beta) + \delta$ ,

$$\mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} \geq c_\beta E_\beta(\exp(\delta \nu_n) | \bar{p})$$

et donc, en intégrant sur  $\bar{p}$  puis en utilisant l'inégalité de Jensen :

$$\frac{1}{n} \log \int \mathcal{Z}_{n,\beta,h}^{\bar{p}} dm_{\beta}(\bar{p}) \geq \delta E_{\beta}(\iota_n/n) + o(1). \quad (5.19)$$

Hors, d'après nos hypothèses,  $\pi_0$  est  $m_{\beta}$ -intégrable. En effet,

$$\begin{aligned} \int \pi_0 dm_{\beta} &= \sum_{n \geq 1} n \times m_{\beta}(\{x : \pi_0(x) = n\}) \\ &= \sum_{n \geq 1} n \int K(n) \frac{e^{\beta^2 G(n\bar{p})}}{e^{P_G(\beta)}} \frac{h_{\beta}(n\bar{p})}{h_{\beta}(\bar{p})} dm_{\beta}(\bar{p}) \text{ d'après (5.18)} \\ &\leq C_{\beta} \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty \text{ d'après le thm. 5.3.1 (5)}. \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $m_{\beta}$  est ergodique, le théorème de Birkhoff affirme que la suite  $(\tau_n/n)_{n \geq 1} = ((1/n) \sum_{i=1}^n T_i)_{n \geq 1}$  converge  $m_{\beta}$ -p.s vers  $\int \pi_0 dm_{\beta}$ . D'après l'encadrement

$$\tau_{\iota_n} \leq n < \tau_{\iota_n+1},$$

on obtient que  $m_{\beta}$ -p.s, ainsi que dans  $L^1(m_{\beta})$  par convergence dominée,

$$\iota_n/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left( \int \pi_0 dm_{\beta} \right)^{-1} > 0. \quad (5.20)$$

Notons aussi que la convergence (5.13) reste vraie si l'on remplace  $\mathcal{Z}_n^{\bar{p}}$  par  $\int \mathcal{Z}_n^{\bar{p}} dm_{\beta}(\bar{p})$ , d'après les bornes (5.14). Ainsi, en faisant tendre  $n$  vers l'infini dans (5.19) et en utilisant (5.20), nous obtenons

$$F^a(\beta, h_c^a(\beta) + \delta) \geq \left( \int \pi_0 dm_{\beta} \right)^{-1} \delta.$$

□

---

## Chapitre 6

### Quelques résultats dans le cas d'un désordre markovien.

Dans cette partie nous montrons que les outils utilisés dans le chapitre 2 et la partie 4.2 permettent de donner quelques résultats dans le cas d'un désordre markovien, c'est-à-dire lorsque

$$\forall n \geq 0, \quad \omega_n = f(X_n),$$

où  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov stationnaire sur un espace d'état fini  $\Sigma$  ( $|\Sigma| = n$ ), de matrice de transition  $Q$  irréductible, de loi invariante  $\mu_0$ , et  $f$  une fonction réelle de  $E$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\mathbb{E}f(X_0) = 0$ .

Introduisons quelques notations. Soit  $M(t, \beta, h)$  la matrice positive  $n \times n$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \forall \beta \geq 0, \forall h \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \Sigma, \quad M(t, \beta, h)(x, y) = K(t)Q^t(x, y)e^{\beta f(y)+h} \quad (6.1)$$

et pour tout  $b \geq 0$ ,

$$A(b, \beta, h) := \sum_{t \geq 1} M(t, \beta, h) \exp(-bt).$$

Comme  $Q$  est irréductible, pour tous  $x$  et  $y$  il existe  $t \geq 1$  tel que

$$K(t)Q^t(x, y) > 0,$$

si bien que  $A(b, \beta, h)$  est une matrice strictement positive, dont la valeur propre de Perron-Frobenius sera notée  $\lambda(b, \beta, h)$ . Dorénavant nous écrirons  $\lambda(\beta)$  pour  $\lambda(0, \beta, 0)$ .

## 6.1 Résultats

Le premier résultat est :

**Théorème 6.1.1.** *Pour tout  $h$  et tout  $\beta \geq 0$ ,*

$$\frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\beta,h} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} F^a(\beta, h) \geq 0.$$

où  $F^a(\beta, h)$  est l'unique solution de l'équation

$$\lambda(F^a(\beta, h), \beta, h) = 1 \tag{6.2}$$

si  $\lambda(0, \beta, h) > 1$  et  $F^a(\beta, h) = 0$  sinon. La courbe critique annealed est

$$h_c^a(\beta) := \sup\{h : F^a(\beta, h) = 0\} = -\log \lambda(\beta).$$

Notons que (6.2) est l'analogie de l'équation implicite définissant l'énergie libre *annealed* dans le cas i.i.d. :

$$\sum_{n \geq 1} K(n) \exp(-F^a(\beta, h)n) = \exp(-h - \log \Lambda(\beta)).$$

Le deuxième résultat est :

**Théorème 6.1.2.** *Si la condition*

$$h(\tilde{Q}_\beta | \tilde{Q}_0) > -E_\beta(\log K(T_1))$$

*est vérifiée, alors*

$$h_c(\beta) > h_c^a(\beta) = -\log \lambda(\beta),$$

où  $Q_\beta$ ,  $P_\beta$  et  $h(\tilde{Q}_\beta | \tilde{Q}_0)$  sont définis dans (6.7), (6.8) et (6.9).

La condition du théorème 6.1.2 est analogue à celle obtenue dans le cas i.i.d. (cf [17, (1.23)]).

## 6.2 Preuves

*Preuve du théorème 6.1.1.* Nous commençons par décomposer la fonction de partition *quenched* suivant le nombre de points de contact avant  $N$  :

$$Z_{N,\beta,h,X} = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0=:t_0 < t_1 < \dots \\ \dots < t_{k-1} < t_k := N}} e^{kh + \beta(f(X_{t_1}) + \dots + f(X_{t_k}))} \prod_{i=1}^k K(t_i - t_{i-1}). \tag{6.3}$$



## 6.2 Preuves

---

En moyennant sur  $X$  on obtient la fonction de partition *annealed* :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_{N,\beta,h} &= \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0=:t_0 < t_1 < \dots \\ \dots < t_{k-1} < t_k := N}} \sum_{x_0, x_1, \dots, x_k \in \Sigma} e^{kh + \beta(f(x_1) + \dots + f(x_k))} \times \dots \\ &\times \mu_0(x_0) Q^{t_1}(x_0, x_1) Q^{t_2 - t_1}(x_1, x_2) \dots Q^{t_k - t_{k-1}}(x_{k-1}, x_k) \\ &\times K(t_1) K(t_2 - t_1) \dots K(t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

D'après la définition (6.1) nous avons :

$$\mathbb{E}Z_{N,\beta,h} = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0=:t_0 < t_1 < \dots \\ \dots < t_{k-1} < t_k := N}} \sum_{\substack{x_0, x_1 \\ \dots, x_k \in \Sigma}} \mu_0(x_0) \prod_{i=1}^k M(t_i - t_{i-1}, \beta, h)(x_{i-1}, x_i).$$

Nous noterons  $\xi(b, \beta, h)$  un vecteur propre strictement positif (défini à constante multiplicative près) associé à  $\lambda(b, \beta, h)$ . La dépendance en  $h$  de ces quantités est simple : on a  $\lambda(b, \beta, h) = e^h \lambda(b, \beta, 0)$  et comme  $\xi$  est défini au scalaire près, le «  $h$  » dans  $\xi(b, \beta, h)$  n'est pas important, et donc nous écrirons simplement  $\xi(b, \beta)$ . D'après la définition de  $\lambda$  et  $\xi$ , nous avons pour tout  $b \geq 0$  et tout  $x \in \Sigma$ ,

$$\sum_{y \in E} \frac{A(b, \beta, h)(x, y) \xi(b, \beta)(y)}{\lambda(b, \beta, h) \xi(b, \beta)(x)} = 1,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{t \geq 1} \sum_{y \in E} \frac{M(t, \beta, h)(x, y) e^{-bt} \xi(b, \beta)(y)}{\lambda(b, \beta, h) \xi(b, \beta)(x)} = 1. \quad (6.4)$$

Supposons dans un premier temps que  $\lambda(0, \beta, h) > 1$ . Comme  $\lambda(F, \beta, h)$  est continue, strictement décroissante en  $F$ , et tend vers 0 quand  $F$  tend vers  $+\infty$ , il existe  $F^a = F^a(\beta, h) > 0$  tel que  $\lambda(F^a, \beta, h) = 1$ . Soit

$$p(x, y, t) := M(t)(x, y) e^{-F^a t} \frac{\xi(y)}{\xi(x)}$$

(on omet  $\beta$  et  $h$  pour l'instant) tel que pour tout  $x \in \Sigma$ ,

$$\sum_{t \geq 1} \sum_{y \in \Sigma} p(x, y, t) = 1. \quad (6.5)$$

L'égalité (6.5) signifie que  $p$  est le noyau d'un processus de renouvellement Markovien : soit  $\bar{\tau}$  un processus sur les entiers défini par

$$\bar{\tau}_n = \sum_{k=1}^n \bar{T}_k \quad (6.6)$$

---

**Quelques résultats dans le cas d'un désordre markovien.**

---

où les temps d'interarrivées sont donnés par la chaîne de Markov suivante, sur  $\Sigma \times \mathbb{N}$  (la valeur de  $\bar{T}_0$  n'a pas d'importance) :

$$\mathbb{P}((\bar{X}_0, \bar{T}_0) = (x_0, t)) = \mu_0(x_0)\delta_0(t),$$

$$\mathbb{P}((\bar{X}_{n+1}, \bar{T}_{n+1}) = (y, t) | (\bar{X}_n, \bar{T}_n) = (x, s)) = p(x, y, t).$$

Le processus  $\bar{X}$  est la chaîne modulante du processus de renouvellement Markovien  $\bar{\tau}$ . D'après (6.5) et (6.4), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_{N,\beta,h} &= e^{F^a N} \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0=:t_0 < t_1 < \dots \\ \dots < t_{k-1} < t_k := N}} \sum_{x_0, x_1, \dots, x_k \in \Sigma} \frac{\xi(x_0)}{\xi(x_k)} \mu_0(x_0) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^k p(x_{i-1}, x_i, t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Notons que

$$\mathbb{P}(N \in \bar{\tau}) = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0=:t_0 < t_1 < \dots \\ \dots < t_{k-1} < t_k := N}} \sum_{x_0, x_1, \dots, x_k \in \Sigma} \mu_0(x_0) \prod_{i=1}^k p(x_{i-1}, x_i, t_i - t_{i-1}),$$

et donc

$$0 < c := \min_{x,y \in \Sigma} \frac{\xi(x)}{\xi(y)} \leq \frac{\mathbb{E}Z_{N,\beta,h}}{e^{F^a N} \mathbb{P}(N \in \bar{\tau})} \leq \max_{x,y \in \Sigma} \frac{\xi(x)}{\xi(y)} =: C.$$

Comme  $\mathbb{P}(N \in \bar{\tau}) \leq 1$ , il suffit de prouver que  $\liminf_{N \rightarrow +\infty} P(N \in \bar{\tau}) > 0$ . Soit  $x$  un élément de  $\Sigma$  et  $(\bar{\tau}_n^{(x)})_{n \geq 0}$  les éléments de  $\bar{\tau}$  où la chaîne de Markov sous-jacente est dans l'état  $x$ . Alors  $\bar{\tau}^{(x)}$  est un processus de renouvellement (retardé) dont les sauts sont de moyenne  $m^{(x)} = \sum_{y \in \Sigma} m_y \frac{\mu_0(y)}{\mu_0(x)}$  où  $m_y := E(T_1 | X_0 = y)$ . Ainsi nous avons par le théorème de renouvellement

$$P(N \in \bar{\tau}) \geq P(N \in \bar{\tau}^{(x)}) \rightarrow \frac{1}{m^{(x)}} > 0.$$

Il reste à traiter le cas  $\lambda(0, \beta, h) \leq 1$ . Dans tous les cas,

$$Z_{N,\beta,h,X} \geq \exp(h + \beta f(X_N))K(N)$$

donc  $\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}Z_{N,\beta,h} \geq 0$ . Supposons que  $\lambda(0, \beta, h) = 1$ . Alors on peut répéter le même argument que dans le cas  $\lambda(0, \beta, h) > 1$ , sauf que  $F^a = 0$ , et on trouve  $\mathbb{E}Z_{N,\beta,h} \leq C \times \mathbb{P}(N \in \bar{\tau})$ , donc  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}Z_{N,\beta,h} = 0$ . Si  $\lambda(0, \beta, h) < 1$ , on peut prendre  $F^a = 0$  dans (6.5) et  $p$  est maintenant une

## 6.2 Preuves

---

sous-probabilité (au sens où la somme dans (6.5) est strictement inférieure à 1). De nouveau, nous avons  $\mathbb{E}Z_{N,\beta,h} \leq C \times \mathbb{P}(N \in \bar{\tau})$ , où  $\bar{\tau}$  est un processus de renouvellement transient (le défaut de masse dans la somme (6.5) étant attribuée à la valeur  $t = +\infty$ ), et  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}Z_{N,\beta,h} = 0$ .

Nous avons prouvé le premier point du théorème. Le second en découle immédiatement :

$$\begin{aligned} F^a = F^a(\beta, h) > 0 &\Leftrightarrow \lambda(0, \beta, h) > 1 \\ &\Leftrightarrow e^h \lambda(0, \beta, 0) > 1 \\ &\Leftrightarrow h > -\log \lambda(0, \beta, 0) = -\log \lambda(\beta) \end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$h_c^a(\beta) = -\log \lambda(\beta).$$

□

*Preuve du théorème 6.1.2.* On commence par quelques notations :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_0(x, y) &= \sum_{n \geq 1} Q^n(x, y) K(n) \\ \tilde{Q}_\beta(x, y) &= \frac{\tilde{Q}_0(x, y) e^{\beta f(y)} \eta_\beta(y)}{\lambda(\beta) \eta_\beta(x)} \end{aligned} \tag{6.7}$$

où  $\lambda(\beta)$  est la valeur propre de P-F de  $(x, y) \mapsto \tilde{Q}_0(x, y) e^{\beta f(y)}$  et  $\eta_\beta$  (resp.  $\nu_\beta$ ) un vecteur propre (strictement positif) à droite (resp. à gauche) associé à  $\lambda(\beta)$ , choisis de telle sorte que  $(\mu_\beta(x))_x = (\eta_\beta(x) \nu_\beta(x))_x$  est une probabilité.

On va utiliser la méthode des moments fractionnaires (cf. partie 1.3.3). En utilisant (6.3), (4.2), et le fait que  $h_c^a(\beta) = -\log \lambda(\beta)$  (cf. théorème 6.1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Z_{n,\beta,h_c^a(\beta)+\delta}^c)^\gamma \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{t_1, \dots, t_k \geq 1 \\ t_1 + \dots + t_k = n}} \sum_{x_0, \dots, x_k \in \Sigma} \mu_0(x_0) \prod_{i=1}^k e^{\gamma(\delta + \beta f(x_i) - \log \lambda(\beta))} K(t_i)^\gamma Q^{t_i}(x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 4.2.1, on obtient le critère de pertinence suivant :

$$\partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma = 1) > 0 \Rightarrow h_c(\beta) > h_c^a(\beta),$$

où  $\Lambda(\beta, \gamma)$  est la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice et

$$(x, y) \mapsto \sum_{n \geq 1} e^{-\gamma \log \lambda(\beta) + \gamma \beta f(y)} K(n)^\gamma Q^n(x, y).$$

---

## Quelques résultats dans le cas d'un désordre markovien.

---

Notons que  $\Lambda(\beta, 1) = 1$  par définition de  $\lambda(\beta)$ .

Par le calcul (en utilisant A.4.1), on obtient :

$$\partial_\gamma \Lambda(\beta, \gamma = 1) = -\log \lambda(\beta) + \beta E_\beta(f(X)) + E_\beta(\log K(T_1))$$

où  $P_\beta$  est la loi du processus de renouvellement markovien de noyau

$$Q_\beta(x, y, n) = \frac{Q^n(x, y)K(n)e^{\beta f(y)}\eta_\beta(y)}{\lambda(\beta)\eta_\beta(x)}, \quad (6.8)$$

ayant pour probabilité initiale la probabilité stationnaire  $\mu_\beta$ .

Il suffit maintenant de montrer que

$$\beta E_\beta(f(X)) - \log \lambda(\beta) = h(\tilde{Q}_\beta | \tilde{Q}_0),$$

où  $h(\tilde{Q}_\beta | \tilde{Q}_0)$  est l'entropie spécifique relative (cf. [22]) de la chaîne de Markov stationnaire de noyau  $\tilde{Q}_\beta$  relativement à celle de noyau  $\tilde{Q}_0$ . En effet,

$$\begin{aligned} h(\tilde{Q}_\beta | \tilde{Q}_0) &:= E_\beta \log \frac{\tilde{Q}_\beta(X_0, X_1)}{\tilde{Q}_0(X_0, X_1)} \\ &= \beta E_\beta(f(X)) - \log \lambda(\beta). \end{aligned} \quad (6.9)$$

□

## 6.3 Exemples

### 6.3.1 Moyennes mobiles

Soit  $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans un espace fini  $A$ . Soit  $(a_0, \dots, a_q)$  dans  $\mathbb{R}^{q+1}$  et définissons  $\omega$  une moyenne mobile d'ordre  $q$  par  $\omega_n = a_0 \varepsilon_n + a_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_q \varepsilon_{n-q}$ . Ces variables localement dépendantes peuvent s'écrire  $\omega_n = f(X_n)$  où  $X_n = (\varepsilon_{n-q}, \dots, \varepsilon_n)$  est en effet une chaîne de Markov sur  $\Sigma := A^{q+1}$  et  $f$  est la fonction sur  $\Sigma$  définie par :

$$f(x_0, x_1, \dots, x_q) = a_0 x_q + a_1 x_{q-1} + \dots + a_q x_0.$$

Prenons par exemple  $q = 1$ ,  $A = \{-1, +1\}$ , et  $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ . Alors on considère la chaîne de Markov dans

$$A^2 = \{(-1, -1), (-1, +1), (+1, -1), (+1, +1)\}$$

---

de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Comme pour tout  $t \geq 2$ ,

$$Q^t = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

la matrice  $A(0, \beta, 0)$  peut être facilement calculée, et sa valeur propre de Perron-Frobenius est

$$\lambda(\beta) = \cosh(a_0\beta) \cosh(a_1\beta) \left( 1 + K(1) \left( \frac{\cosh((a_0 + a_1)\beta)}{\cosh(a_0\beta) \cosh(a_1\beta)} - 1 \right) \right).$$

### 6.3.2 Chaîne à deux états

Voici un autre cas particulier où la courbe critique *annealed* peut être calculée. Supposons que  $\omega$  soit une chaîne de Markov dans  $\{-1, 1\}$ , de matrice de transition ( $0 \leq \epsilon < 1$ )

$$Q = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 - \epsilon \\ 1 - \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$$

et de probabilité stationnaire  $\mu = \frac{\delta_{-1} + \delta_{+1}}{2}$ . Si  $\epsilon = 0$ , alors la suite est périodique (cf. [14]) tandis que  $\epsilon = 1/2$  est le cas i.i.d. Les valeurs propres de  $Q$  sont 1 et  $2\epsilon - 1$  avec pour vecteurs propres respectifs  $(1, 1)$  et  $(1, -1)$ , si bien que pour tout  $t \geq 1$ ,

$$Q^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + (2\epsilon - 1)^t & 1 - (2\epsilon - 1)^t \\ 1 - (2\epsilon - 1)^t & 1 + (2\epsilon - 1)^t \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

et

$$A(0, \beta, 0) = \begin{pmatrix} e^{-\beta} p(\epsilon) & e^{\beta} (1 - p(\epsilon)) \\ e^{-\beta} (1 - p(\epsilon)) & e^{\beta} p(\epsilon) \end{pmatrix}$$

où  $p(\epsilon) := \sum_{t \geq 1} K(t) \frac{1 + (2\epsilon - 1)^t}{2}$ . Nous trouvons alors :

$$h_c^a(\beta) = -\log \left( p(\epsilon) \cosh(\beta) + \sqrt{p(\epsilon)^2 \cosh^2(\beta) - 2p(\epsilon) + 1} \right)$$

ce qui est cohérent avec les cas périodique (dont le point critique peut être calculé à l'aide des résultats de [14]) et i.i.d. (où  $h_c^a(\beta) = -\log \cosh(\beta)$ ).

---

---

## Conclusion et perspectives.

Nous avons prouvé dans cette thèse que l'introduction de corrélations à portée finie dans le modèle d'accrochage désordonné gaussien peut provoquer des différences quantitatives sur la courbe critique, et que celles-ci dépendent des détails de la loi  $K(\cdot)$  (cf. théorème 2.3.1 et proposition 2.3.1). Toutefois, nous n'observons pas de différence qualitative au sens où l'exposant critique *annealed* et les critères de pertinence du désordre établis dans le cas i.i.d sont conservés (cf. proposition 2.3.2, théorèmes 3.1.1, 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3). La méthode que nous avons utilisée consiste à mettre en évidence une structure de renouvellement markovien. De plus, cette idée est également applicable dans le cas d'un désordre markovien (cf. théorèmes 6.1.1 et 6.1.2). Enfin, une partie de ladite méthode a été généralisée – via l'étude d'opérateurs de transfert sur le décalage des suites à alphabet dénombrable – au cas d'un désordre gaussien à portée de corrélation non finie, pour trouver l'exposant critique *annealed* sous certaines hypothèses de décroissance rapide des corrélations (cf. théorème 5.2.2). L'exposant est alors le même que dans le cas homogène : en ce sens le désordre peut être qualifié de « faiblement corrélé ».

Nous terminons par une série de remarques, questions et développements potentiels.

1. Quelle est la limite de  $h_c(\beta)/\beta^2$  lorsque  $\beta$  tend vers 0 dans le cas  $m = \sum_{n \geq 1} nK(n) < +\infty$ ? Cette question est le prolongement naturel de la partie 1.3.3.
2. Les techniques développées dans les parties 2, 3, 4 et 5 se généralisent-elles aux désordres non gaussiens? Voici un premier élément de réponse. Remarquons d'emblée que le calcul de la variance effectué en (2.6) ne suffit plus à calculer la fonction de partition *annealed*. Toutefois, si  $\omega_n := a_0\varepsilon_n + \dots + a_q\varepsilon_{n-q}$  pour tout  $n \geq 0$ , où  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. (non nécessairement gaussiennes) et  $a_0, \dots, a_q$  sont des réels, alors

$$\sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n \simeq \sum_{m=1}^{N-q} \varepsilon_m \left( \sum_{k=0}^q a_k \delta_{m+k} \right)$$

à des termes de bord négligeables près, et donc, par indépendance des  $\varepsilon_n$  :

$$\mathbb{E} \left( \beta \sum_{n=1}^N \omega_n \delta_n \right) \simeq \exp \left( \sum_{m=1}^{N-q} M \left( \beta \sum_{k=0}^q a_k \delta_{m+k} \right) \right),$$

où  $M(x) := \log \mathbb{E}(\exp(x\varepsilon_0))$ , que nous supposons fini au moins dans un voisinage de 0. Nous avons alors par exemple pour  $q = 1$  :

$$\begin{aligned} M(\beta(a_0\delta_m + a_1\delta_{m+1})) &= M(a_0\beta)\delta_m + M(a_1\beta)\delta_{m+1} \\ &\quad + (M((a_0 + a_1)\beta) - M(a_0\beta) - M(a_1\beta))\delta_m\delta_{m+1}, \end{aligned}$$

et nous pouvons alors introduire des matrices de transfert comme dans le cas gaussien. Dans le cas  $q$  quelconque, les expressions sont plus lourdes car elles font intervenir les quantités  $\delta_m\delta_{m+i_1}\dots\delta_{m+i_j}$ , où  $m \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq q$ , et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq q$ .

3. Dans un travail récent ([9]), un modèle d'accrochage hiérarchique désordonné avec corrélations est considéré et les résultats obtenus sur la pertinence du désordre sont comparés aux prédictions de Weinrib et Halperin, qui ont proposé dans les années quatre-vingt une extension du critère de Harris dans le cas où le désordre est corrélé (cf. [62] et [61] à ce sujet). Le choix du désordre correspondrait dans notre cas non-hiérarchique à un désordre gaussien corrélé tel que  $\rho_n = \text{Cov}(\omega_0, \omega_n)$  est de l'ordre de  $n^{-\theta}$  (où  $\theta > 1$ ). Il est alors conjecturé que l'exposant critique *annealed* du modèle non-hiérarchique est différent de l'exposant critique homogène si  $1 < \theta < 2 \min(1, \alpha)$ .
4. D'après la remarque précédente, l'exposant critique *annealed* devrait être le même que l'exposant critique homogène dans le cas où  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  est finie et  $0 < \alpha < 1$ . Les deux questions suivantes sont reliées à cette observation. Premièrement, le théorème 5.3.2 est-il encore vrai si l'on suppose les variations de  $\phi$  seulement sommables? Si oui, cela prouve que l'exposant critique *annealed* est le même que l'exposant critique homogène dès que  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  est finie, pour toute valeur de  $\alpha$ . Deuxièmement, pour une suite d'entiers  $\bar{p}$  choisie arbitrairement et  $\beta > 0$ , et en supposant  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n|$  finie, le processus  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  satisfait-il sous  $P_\beta(\cdot|\bar{p})$  (cf. partie 5.4) un théorème limite locale (cf. [1] dans le cas des corrélations à décroissance exponentielle)?
5. Que se passe-t-il dans le cas  $\sum_{n \geq 1} |\rho_n| < +\infty$  et  $\sum_{n \geq 1} n|\rho_n| = +\infty$ ? Du point de vue des opérateurs de transfert, cela revient à considérer des potentiels à variations non sommables. Que devient le théorème 5.3.1 dans ce cas? L'opérateur possède-t-il une signature d'un nouvel exposant critique *annealed*?



- 
6. L'intersection de deux processus de renouvellement indépendants intervient dans le calcul du moment d'ordre deux de la fonction de partition au point critique *annealed*. Que dire alors de l'intersection de deux copies indépendantes de  $\tau$  sous la loi  $P_\beta(\cdot|\bar{p})$  (cf. définition dans la partie 5.4)?
  7. Un modèle d'accrochage avec un désordre fortement corrélé particulier a été étudié dans [8]. Dans ce modèle, le désordre est construit à partir d'un processus de renouvellement, tel que  $\text{Cov}(\omega_0, \omega_n)$  est de l'ordre de  $n^{-\theta}$ , avec  $\theta > 0$ . L'exposant critique vaut alors  $(1 + \theta)/(\min(1, \alpha))$ .

---

---

# Annexe A

## Appendices.

### A.1 Sur-additivité

La sur-additivité est un outil pratique non seulement pour prouver qu'une suite converge, mais aussi pour estimer la limite obtenue en fonction des termes de la suite.

**Proposition A.1.1.** *Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle telle que pour tous  $n, m \geq 1$ ,*

$$u_{n+m} \geq u_n + u_m.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{u_n}{n} \in (-\infty, +\infty].$$

Le théorème ergodique sur-additif de Kingman est une généralisation de ce résultat (voir [57, 38]).

**Théorème A.1.1.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace de probabilité et  $T : \Omega \mapsto \Omega$  une application qui préserve  $\mu$ . Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions intégrables vérifiant, pour tous  $n, m \geq 1$ ,*

$$g_{n+m}(\omega) \geq g_n(\omega) + g_m(T^n \omega).$$

Alors  $\mu$  presque-sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g_n(\omega)}{n} = \sup_{n \geq 1} \frac{g_n(\omega)}{n} = g(\omega) \in (-\infty, +\infty],$$

où  $g$  est invariant par  $T$ . Si de plus,

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int g_n d\mu < +\infty,$$

alors  $g$  est finie, la convergence a lieu dans  $L^1(\mu)$  et  $\int g d\mu = \sup_{n \geq 1} (1/n) \int g_n d\mu$ .

---

Si de plus,  $T$  est ergodique pour la mesure  $\mu$ , c'est-à-dire

$$T^{-1}A = A \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}, \quad (\text{A.1})$$

alors la fonction  $g$  est presque-sûrement constante (cf. [53, Lemme I.2.1]), et cette constante vaut  $\sup_{n \geq 1} (1/n) \int g_n d\mu$ .

## A.2 Fonctions à variations lentes et théorèmes taubériens

Une fonction  $L : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est à variation lente si pour tout  $\kappa > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\kappa x)}{L(x)} = 1$$

Si  $L$  est à variation lente, alors une convergence plus forte est vérifiée : pour tous  $0 < c < C < +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{\kappa \in [c, C]} \left| \frac{L(\kappa x)}{L(x)} - 1 \right| = 0.$$

Les fonctions à variations lentes permettent d'exprimer les corrections logarithmiques dans le comportement des queues de distribution, des transformées de Laplace, et de l'énergie libre au point critique. Les théorèmes dits abéliens et taubériens mettent en relation les équivalents asymptotiques de ces différentes quantités.

**Proposition A.2.1.** *Soit  $L$  une fonction à variation lente. Alors*

1. *Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\epsilon L(x) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{-\epsilon} L(x) = 0$ .*
2. *Pour tout  $\theta > -1$ ,*

$$\sum_{k=1}^n k^\theta L(k) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\theta+1}}{\theta+1} L(n).$$

3. *Pour tout  $\theta > 1$ ,*

$$\sum_{k \geq n} k^{-\theta} L(k) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\theta}}{\theta-1} L(n)$$

---

4. Si la série  $\sum_{k \geq 1} L(k)/k$  diverge alors il existe une fonction à variation lente  $\hat{L}(\cdot)$  telle que

$$\hat{L}(n) = \sum_{k=1}^n L(k)/k$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{L}(n)/L(n) = +\infty.$$

Si la série  $\sum_{k \geq 1} L(k)/k$  converge alors il existe une fonction à variation lente  $\tilde{L}(\cdot)$  telle que

$$\hat{L}(n) = \sum_{k \geq n} L(k)/k$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{L}(n)/L(n) = +\infty.$$

**Proposition A.2.2.** Soit  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs.

– Si  $\sum_{k=1}^n u_k \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\theta L(n)$  avec  $\theta \geq 0$ , alors

$$\sum_{k \geq 1} e^{-kx} u_k \stackrel{x \searrow 0}{\sim} \Gamma(\theta + 1) \frac{L(1/x)}{x^\theta}.$$

Si  $\sum_{k \geq 1} u_k = 1$  et  $\sum_{k \geq n} u_k \stackrel{x \searrow 0}{\sim} L(n)/n^\theta$  avec  $0 \leq \theta < 1$ , alors

$$1 - \sum_{k \geq 1} e^{-kx} u_k \stackrel{x \searrow 0}{\sim} \Gamma(1 - \theta) x^\theta L(1/x).$$

Si  $\sum_{k \geq 1} u_k = 1$  et  $m = \sum_{k \geq 1} k u_k < +\infty$ , alors

$$1 - \sum_{k \geq 1} e^{-kx} u_k \stackrel{x \searrow 0}{\sim} mx.$$

Pour plus de précisions sur les définitions et résultats énoncés ici, le lecteur pourra se référer à [10].

## A.3 Renouvellements

Nous rassemblons ici quelques résultats de la théorie du renouvellement. On se limitera au cas discret.

---

### A.3.1 Renouvellements standards

Soit  $(T_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\bar{\mathbb{N}}^* := \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On note  $K(n) = P(T_1 = n)$  pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ . Le processus  $\tau = (\tau_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , défini par  $\tau_0 = 0$  et

$$\forall n \geq 1 \quad \tau_n = \tau_{n-1} + T_n = \sum_{k=1}^n T_k.$$

avec la convention  $n + \infty = \infty$ , est appelé processus de renouvellement.

Si  $K(\infty) := 1 - \sum_{n \geq 1} K(n) > 0$  alors le renouvellement est dit transient et la variable aléatoire  $\bar{N} = \inf\{n \geq 1 : \tau_n = +\infty\}$  est presque finie et suit une loi géométrique de paramètre  $K(\infty)$ . Dans le cas contraire, tous les  $\tau_n$  sont finis presque sûrement, et le renouvellement est dit récurrent. Si de plus  $m := E(\tau_1)$  est fini alors le renouvellement est dit récurrent positif.

Un processus de renouvellement est dit apériodique si

$$\text{pgcd}\{n \geq 1 : K(n) > 0\} = 1. \quad (\text{A.2})$$

Pour tout  $n \geq 1$  on note  $\delta_n = \mathbf{1}_{\{n \in \tau\}} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau_k = n\}}$ . La suite des

$$P(n \in \tau) = E(\delta_n) = \sum_{k=1}^n P(\tau_k = n),$$

$n \geq 1$ , peut être vue comme la « fonction de Green » du renouvellement, par analogie avec les marches aléatoires et la théorie du potentiel. Le comportement de ces probabilités est donné par

**Théorème A.3.1** (Théorème du renouvellement, cf. [7], théorème 2.2).  
Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$P(n \in \tau) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1/m$$

avec la convention  $0 = 1/\infty$ .

Dans le cas où  $m = +\infty$ , on a

**Théorème A.3.2** (voir [30], théorèmes A.4 et A.6, et [23], théorème B). Si  $\tau$  est transient alors

$$P(n \in \tau) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} K(n)/K(\infty)^2.$$

Si  $\tau$  est récurrent et  $K(n) = L(n)n^{-(1+\alpha)}$  avec  $L$  à variation lente alors

---

– Si  $0 < \alpha < 1$ ,

$$P(n \in \tau) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{L(n)n^{1-\alpha}}$$

– Si  $\alpha = 0$ , alors il existe  $\hat{L}$  à variation lente tel que

$$P(n \in \tau) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\hat{L}(n)n^{1-\alpha}}$$

– Si  $\alpha = 1$  alors

$$P(n \in \tau) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left( \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}^* \\ i > n}} K(i) \right)^{-1},$$

qui est à variation lente

Notons, pour tout  $x \geq 0$ ,  $F(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-nx} K(n)$  ( $x \geq 0$ ) la transformée de Laplace de  $\tau_1$  et  $G(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-nx} P(n \in \tau)$  celle des fonctions de Green. L'équation de renouvellement s'obtient en partitionnant les trajectoires de  $\tau$  passant par  $n$  suivant le dernier point visité avant  $n$ , pour tout  $n \geq 1$ , soit :

$$P(n \in \tau) = \mathbf{1}_{\{n=0\}} + \sum_{k=1}^n P(k \in \tau) K(n-k).$$

On en déduit :

$$\forall x > 0, \quad (1 - F(x))G(x) = 1$$

et

– si  $\tau$  est transient, alors

$$\sum_{n \geq 1} P(n \in \tau) = 1/K(\infty), \quad (\text{A.3})$$

– si  $\tau$  est récurrent alors  $G(x) \stackrel{x \searrow 0}{\sim} (1 - F(x))^{-1}$ .

### A.3.2 Renouvellements markoviens

Les renouvellements markoviens sont une généralisation des renouvellements définis ci-dessus. On pourra consulter à ce sujet [7, Partie B.VII.4] et [16].

On dit que  $\tau = (\tau_n)_{n \geq 0}$ , où  $\tau_0 = 0$  et  $\tau_{n+1} = \tau_n + T_n$ , est un processus de renouvellement markovien s'il existe un processus  $J = (J_n)_{n \geq 0}$  sur  $E$  un

---

ensemble fini ou dénombrable tel que  $(T_n, J_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov sur  $\mathbb{N}^* \times E$  (ou  $\overline{\mathbb{N}}^* \times E$  dans le cas général) dont les probabilités de transition ne dépendent que de la deuxième coordonnée. Ainsi, on note pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,

$$\forall k \geq 0, \quad K_{x,y}(n) = P(T_{k+1} = n, J_{k+1} = y | J_k = x),$$

qui est appelé noyau du processus (parfois appelé noyau semi-markovien). La chaîne de Markov  $J$  est alors appelée chaîne de Markov modulante. Si au lieu de définir  $\tau_0 = 0$ , on pose  $\tau_0 = \tilde{T}$ , où  $\tilde{T}$  est une variable aléatoire entière indépendante du reste du processus, alors  $\tau$  est dit « retardé ».

**Renouvellements induits.** Soit, pour tout  $x$  dans  $E$  la suite des temps d'atteinte  $\sigma^{(x)} = (\sigma_n^{(x)})_{n \geq 0}$  définie par  $\sigma_0^{(x)} = \inf\{k \geq 0 : J_k = x\}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sigma_n^{(x)} = \inf\{k > \sigma_{n-1}^{(x)} : J_k = x\}$ , où  $\inf \emptyset < +\infty$ . On peut alors considérer le processus  $\tau^{(x)} = (\tau_n^{(x)})_{n \geq 0}$ , avec  $\tau_n^{(x)} = \tau_{\sigma_n^{(x)}}$  si  $\sigma_n^{(x)} < \infty$ , et  $\tau_n^{(x)} = +\infty$  sinon. Alors  $\tau^{(x)}$  est un processus de renouvellement.

**Intersection de renouvellements.** Nous utilisons également la proposition suivante :

**Proposition A.3.1.** Soient  $\tau^{(1)}$  et  $\tau^{(2)}$  deux processus de renouvellement markoviens indépendants entre eux, de chaînes modulantes respectives  $J^{(1)}$  (à valeurs dans  $E_1$ ) et  $J^{(2)}$  (à valeurs dans  $E_2$ ), tels que  $\tau_0^{(1)} = \tau_0^{(2)} = 0$ , et dont les lois respectives sont notées  $P_1$  et  $P_2$ . Alors le processus  $\tau = \tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}$  est un processus de renouvellement markovien de chaîne modulante  $(J_n)_{n \geq 0} := (J_{i_1(n)}^{(1)}, J_{i_2(n)}^{(2)})_{n \geq 0}$ , les suites  $i_1$  et  $i_2$  étant définies par  $\tau_n = \tau_{i_1(n)}^{(1)} = \tau_{i_2(n)}^{(2)}$ .

*Démonstration.* Notons, pour tous  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  dans  $E_1 \times E_2$  et  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{E}_{(x_1, x_2)}^{(y_1, y_2)}(n; k, l) := \bigcap_{\substack{i < k \\ j < l}} \left\{ \tau_i^{(1)} \neq \tau_j^{(2)} \right\} \cap \left\{ \tau_k^{(1)} = \tau_l^{(2)} = n, J_k^{(1)} = y_1, J_l^{(2)} = y_2 \right\}$$

et

$$p_{(x_1, x_2)}^{(y_1, y_2)}(n) = \sum_{k, l \geq 1} P_1 \otimes P_2 \left( \mathcal{E}_{(x_1, x_2)}^{(y_1, y_2)}(n; k, l) \right).$$

Alors pour tous  $k \geq 1$ ,  $(x_{1,i}, x_{2,i})_{0 \leq i \leq k}$  dans  $E_1 \times E_2$  et  $n_1, \dots, n_k \geq 1$ , en notant

$$\mathcal{I}((x_{1,i}, x_{2,i})_{0 \leq i \leq k}, (n_i)_{1 \leq i \leq k}) := \bigcap_{1 \leq i \leq k} \left\{ \tau_i = n_1 + \dots + n_i, J_i = (x_{1,i}, x_{2,i}) \right\}$$



---

on peut montrer que

$$P_1 \otimes P_2(\mathcal{I}((x_{1,i}, x_{2,i})_{0 \leq i \leq k}, (n_i)_{1 \geq i \geq k})) = \prod_{i=1}^k p_{(x_{1,i-1}, x_{2,i-1})}^{(x_{1,i}, x_{2,i})}(n_i).$$

Remarquons que l'on peut avoir

$$P_1 \otimes P_2(\tau_1 = +\infty | J_0 = (x_0, y_0)) = 1 - \sum_{u,v,n} p_{(x_0, y_0)}^{(u,v)}(n) > 0$$

pour au moins une valeur de  $(x_0, y_0)$ , et alors le renouvellement  $\tau$  est transient, auquel cas la suite  $(J_n)$  n'est bien définie que pour  $0 \leq n \leq T$ , où  $T = |\tau^{(1)} \cap \tau^{(2)}|$ .  $\square$

## A.4 Théorème de Perron-Frobenius

Nous énonçons ici des résultats classiques sur les matrices positives, utilisés à plusieurs reprises dans le texte. Une référence sur les matrices positives et le lien avec la théorie des chaînes de Markov est [52].

Commençons par rappeler quelques définitions. Une matrice  $M$  est appelée matrice positive (resp. strictement positive), ce qui sera noté  $M \geq 0$  (resp.  $M > 0$ ), si toutes ses composantes sont positives (mêmes définitions pour les vecteurs). Elle sera dite irréductible si pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , il existe  $n \geq 1$  tel que  $M^n(i, j) > 0$ . Elle est fortement irréductible s'il existe  $n \geq 1$  tel que  $M^n > 0$ . On appelle matrice d'incidence de  $M$  la matrice dont la composante en  $(i, j)$  vaut 1 si  $M(i, j) > 0$ , 0 sinon.

**Théorème A.4.1** (de Perron-Frobenius). *Soit  $M$  une matrice de taille  $n \times n$ , irréductible.  $M$  possède une valeur propre réelle  $\lambda$ , appelée valeur propre de Perron-Frobenius, telle que*

- $\lambda > 0$ ;
- $\lambda \geq |\rho|$  pour toute valeur propre  $\rho$  de  $M$ ;
- $\lambda$  est racine simple du polynôme caractéristique de  $M$ .
- les composantes d'un vecteur propre non nul (à gauche ou à droite) associé à  $\lambda$  sont soit toutes strictement positives, soit toutes strictement négatives.

*Si de plus  $M$  est fortement irréductible, alors  $\lambda > |\rho|$  pour toute valeur propre  $\rho$  de  $M$*

La valeur propre de Perron-Frobenius admet l'expression suivante :

$$\lambda = \sup_{x \geq 0, x \neq 0} \min_{1 \leq j \leq n} \frac{(xM)_j}{x_j} \tag{A.4}$$

---

La proposition qui suit se révèle utile lorsque la valeur propre de Perron-Frobenius dépend d'un paramètre.

**Proposition A.4.1.** *Soit  $T > 0$ ,  $n \geq 2$  et  $(M_t)_{|t| \leq T}$  une famille de matrices  $n \times n$  positives et irréductibles. Notons  $\lambda(t)$  la valeur propre de Perron-Frobenius de  $M_t$  et supposons que pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ , la fonction  $t \mapsto M_t(i, j)$  soit dérivable en 0. Soient  $\eta$  et  $\nu$  des vecteurs propres de  $M_0$  relativement à  $\lambda(0)$  (respectivement à gauche et à droite), normalisés de telle sorte que  $\eta \cdot \nu = 1$ . Alors la fonction  $t \mapsto \lambda(t)$  est dérivable en 0 et*

$$\lambda'(0) = \eta \left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_{t=0} \cdot \nu. \quad (\text{A.5})$$

*Démonstration.* Si  $P$  est une matrice  $n \times n$  alors on note  $\text{Com}(P)$  la comatrice de  $P$  (matrice des cofacteurs), i.e.  $\text{Com}(P)(i, j) = (-1)^{i+j} \det P^{i,j}$  où  $P^{i,j}$  est la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $P$ . Dans la suite on note  $\lambda$  et  $M$  à la place de  $\lambda(0)$  et  $M(0)$ . Pour tout  $t$ , nous avons d'une part

$$\det(\lambda(t) \text{Id} - M(t)) = 0,$$

et d'autre part

$$\det(\lambda(t) \text{Id} - M(t)) = \text{Tr} \left[ {}^t \text{Com}(\lambda \text{Id} - M)(\lambda'(0) \text{Id} - \partial_t M(t=0)) \right] t(1+o(1)),$$

dont on déduit que

$$\text{Tr} \left( {}^t \text{Com}(\lambda \text{Id} - M) \right) = \text{Tr} \left( {}^t \text{Com}(\lambda \text{Id} - M) \partial_t M(t=0) \right).$$

D'après [52, 1.1. Corollaire 2], comme  $\text{Tr}(\nu\eta) = \eta \cdot \nu = 1$ , on obtient

$$\lambda'(0) = \text{Tr}(\nu\eta \partial_t M(t=0)) = (\eta \partial_t M(t=0)) \cdot \nu.$$

□

Nous pouvons aussi formuler (A.5) de la manière suivante : la différentielle de la valeur propre de Perron-Frobenius en  $M_0$  est donnée par l'application linéaire  $D\lambda_{M_0} : H \mapsto \text{Tr}(\nu\eta H)$ .

Dans cette thèse nous sommes amenés à traiter le cas particulier suivant :  $M_0$  est une matrice de transition irréductible et

$$M_t(i, j) = M_0(i, j) \exp(t \times f(i, j)).$$

Si l'on note  $\mu$  l'unique loi de probabilité invariante pour  $M_0$  (sous forme de vecteur ligne), alors (A.5) donne

$$\lambda'(0) = \mathbb{E}_\mu (f(X_0, X_1)). \quad (\text{A.6})$$

---

# Bibliographie

- [1] Aaronson, J., Denker, M. : Local limit theorems for partial sums of stationary sequences generated by Gibbs-Markov maps. *Stoch. Dyn.* **1**(2), 193–237 (2001)
- [2] Akian, M., Bapat, R., Gaubert, S. : Asymptotics of the Perron eigenvalue and eigenvector using max-algebra. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327**(11), 927–932 (1998)
- [3] Alexander, K.S. : The effect of disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* **279**(1), 117–146 (2008)
- [4] Alexander, K.S., Zygouras, N. : Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. *Commun. Math. Phys.* **291**(3), 659–689 (2009)
- [5] Alexander, K.S., Zygouras, N. : Equality of critical points for polymer depinning transitions with loop exponent one. *Ann. Appl. Probab.* **20**(1), 356–366 (2010)
- [6] Allahverdyan, A.E., Gevorgian, Z.S., Hu, C.K., Wu, M.C. : Unzipping of dna with correlated base sequence. *Phys. Rev. E* **69**(6), 061,908 (2004)
- [7] Asmussen, S. : Applied probability and queues, *Applications of Mathematics (New York)*, vol. 51, second edn. Springer-Verlag, New York (2003). *Stochastic Modelling and Applied Probability*
- [8] Berger, Q., Lacoïn, H. : Sharp critical behavior for pinning model in random correlated environment. *ArXiv e-prints* (2011)
- [9] Berger, Q., Toninelli, F. : Hierarchical pinning model in correlated random environment. *ArXiv e-prints* (2011)
- [10] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. : Regular variation, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 27. Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [11] Caravenna, F., Deuschel, J.D. : Pinning and wetting transition for  $(1 + 1)$ -dimensional fields with Laplacian interaction. *Ann. Probab.* **36**(6), 2388–2433 (2008)

- 
- [12] Caravenna, F., Deuschel, J.D. : Scaling limits of  $(1 + 1)$ -dimensional pinning models with Laplacian interaction. *Ann. Probab.* **37**(3), 903–945 (2009)
- [13] Caravenna, F., Giacomin, G., Toninelli, F.L. : Copolymers at selective interfaces : settled issues and open problems. *ArXiv e-prints* (2010)
- [14] Caravenna, F., Giacomin, G., Zambotti, L. : A renewal theory approach to periodic copolymers with adsorption. *Ann. Appl. Probab.* **17**(4), 1362–1398 (2007)
- [15] Caravenna, F., Giacomin, G., Zambotti, L. : Infinite volume limits of polymer chains with periodic charges. *Markov Process. Related Fields* **13**(4), 697–730 (2007)
- [16] Çinlar, E. : Markov renewal theory : a survey. *Management Sci.* **21**(7), 727–752 (1974/75)
- [17] Cheliotis, D., den Hollander, F. : Variational characterization of the critical curve for pinning of random polymers (2010)
- [18] Chen, X.Y., Bao, L.J., Mo, J.Y., Wang, Y. : Characterizing long-range correlation properties in nucleotide sequences. *Chinese Chemical Letters* Vol. 14 **14**(5), 503–504 (2003)
- [19] Cornfeld, I.P., Fomin, S.V., Sinaĭ, Y.G. : Ergodic theory, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*, vol. 245. Springer-Verlag, New York (1982)
- [20] den Hollander, F. : Random polymers. *École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XXXVII – 2007. Lecture Notes in Mathematics* 1974. Berlin : Springer. xiii, 258 p. EUR 43.95 (2009)
- [21] Derrida, B., Giacomin, G., Lacoïn, H., Toninelli, F.L. : Fractional moment bounds and disorder relevance for pinning models. *Commun. Math. Phys.* **287**(3), 867–887 (2009)
- [22] Deuschel, J., Stroock, D. : Large deviations. Academic Pr (1989)
- [23] Doney, R.A. : One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. *Probab. Theory Related Fields* **107**(4), 451–465 (1997)
- [24] Doob, J. : Stochastic processes. Wiley classics library edition. Wiley, New York, NY [u.a.] (1990)
- [25] Ellis, R.S. : Entropy, large deviations, and statistical mechanics. *Classics in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin (2006). Reprint of the 1985 original
- [26] Feller, W. : An introduction to probability theory and its applications. Vol. I. John Wiley and Sons, Inc., New York (1957). 2nd ed
-

- 
- [27] Fisher, M.E. : Walks, walls, wetting, and melting. *Journal of Statistical Physics* **34**, 667–729 (1984). 10.1007/BF01009436
- [28] Flory, P.J. : Nobel lecture (1974). URL Nobelprize.org
- [29] Garsia, A., Lamperti, J. : A discrete renewal theorem with infinite mean. *Comment. Math. Helv.* **37**, 221–234 (1962/1963)
- [30] Giacomin, G. : Random polymer models. Imperial College Press, London (2007)
- [31] Giacomin, G. : Renewal sequences, disordered potentials, and pinning phenomena. In : Spin glasses : statics and dynamics, *Progr. Probab.*, vol. 62, pp. 235–270. Birkhäuser Verlag, Basel (2009)
- [32] Giacomin, G., Lacoïn, H., Toninelli, F.L. : Disorder relevance at marginality and critical point shift. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **47**(1), 148–175 (2011)
- [33] Giacomin, G., Toninelli, F.L. : Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Comm. Math. Phys.* **266**(1), 1–16 (2006)
- [34] Giacomin, G., Toninelli, F.L. : On the irrelevant disorder regime of pinning models. *Ann. Probab.* **37**(5), 1841–1875 (2009)
- [35] Hammersley, J.M. : Generalization of the fundamental theorem on subadditive functions. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58**, 235–238 (1962)
- [36] Harris, A. : Effect of random defects on the critical behaviour of ising models. *Journal of Physics C : Solid State Physics* **7**, 1671 (1974)
- [37] Jeon, J.H., Park, P.J., Sung, W. : The effect of sequence correlation on bubble statistics in double-stranded dna. *The Journal of Chemical Physics* **125** (2006)
- [38] Kingman, J.F.C. : Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability* **1**, 883–909 (1973). With discussion by D. L. Burkholder, Daryl Daley, H. Kesten, P. Ney, Frank Spitzer and J. M. Hammersley, and a reply by the author
- [39] Lacoïn, H. : Disorder and localization phenomena. Ph.D. thesis, Université Paris Diderot - Paris 7 (2009)
- [40] Lacoïn, H. : The martingale approach to disorder irrelevance for pinning models. *Electron. Commun. Probab.* **15**, 418–427 (2010)
- [41] Madras, N., Slade, G. : The self-avoiding walk. *Probability and its Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA (1993)
- [42] Mauldin, R.D., Urbański, M. : Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet. *Israel J. Math.* **125**, 93–130 (2001)
-

- 
- [43] Peng, C.K., Buldyrev, S.V., Goldberger, A.L., Havlin, S., Sciortino, F., Simons, M., Stanley, H.E. : Long-range correlations in nucleotide sequences. *Nature* **356**, 168–170 (1992)
- [44] Pétrélis, N. : Localisation d’un polymère en interaction avec une interface. Ph.D. thesis, Université de Rouen (2006)
- [45] Poisat, J. : On quenched and annealed critical curves of random pinning model with finite range correlations. To appear in *Ann. Inst. Henri Poincaré (B)* (2011)
- [46] Poisat, J. : Random pinning model with finite range correlations : disorder relevant regime. *ArXiv e-prints* (2011)
- [47] Ruelle, D. : Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. *Comm. Math. Phys.* **9**, 267–278 (1968)
- [48] Sarig, O. : Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131**(6), 1751–1758 (electronic) (2003)
- [49] Sarig, O. : Continuous phase transitions for dynamical systems. *Comm. Math. Phys.* **267**(3), 631–667 (2006)
- [50] Sarig, O.M. : Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19**(6), 1565–1593 (1999)
- [51] Sarig, O.M. : Thermodynamic formalism for null recurrent potentials. *Israel J. Math.* **121**, 285–311 (2001)
- [52] Seneta, E. : Non-negative matrices and Markov chains. *Springer Series in Statistics*. Springer, New York (2006)
- [53] Shields, P. : The ergodic theory of discrete sample paths, volume 13 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence (1996)
- [54] Sohier, J. : Phénomènes d’accrochage et théorie des fluctuations. Ph.D. thesis, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie – Université Paris VII - Paris Diderot France (2010)
- [55] Sohier, J. : Scaling limits of a heavy tailed Markov renewal process. *ArXiv e-prints* (2011)
- [56] Spitzer, F. : Principles of random walks, second edn. Springer-Verlag, New York (1976). *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 34
- [57] Steele, J.M. : Kingman’s subadditive ergodic theorem. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25**(1), 93–98 (1989)
- [58] Toninelli, F.L. : A replica-coupling approach to disordered pinning models. *Commun. Math. Phys.* **280**(2), 389–401 (2008)

- 
- [59] Toninelli, F.L. : Disordered pinning models and copolymers : Beyond annealed bounds. *Ann. Appl. Probab.* **18**(4), 1569–1587 (2008)
- [60] Toninelli, F.L. : Localization transition in disordered pinning models. In : *Methods of Contemporary Mathematical Statistical Physics, Lecture Notes in Mathematics*, pp. 129–176 (2009)
- [61] Weinrib, A. : Long-range correlated percolation. *Phys. Rev. B* (3) **29**(1), 387–395 (1984)
- [62] Weinrib, A., Halperin, B.I. : Critical phenomena in systems with long-range-correlated quenched disorder. *Phys. Rev. B* **27** (1983)