Université Paris-Dauphine
M1 MA

Année 2017-2018

Introduction aux séries temporelles

Examen

Durée : 2 heures.
Date : 19 janvier 2018.
Sans calculatrice.
Document autorisé : **polycopié de cours** (éventuellement annoté) **uniquement**.
Notes :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet.
- Si vous avez des commentaires à faire, faites-le sur votre copie.
- Le barème indiqué est provisoire.
- Sauf indication contraire, vous pouvez utiliser tout résultat du cours sans le redémontrer.

Exercice 1 (5 points)

Soit $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc très fort.

1. Soit ρ_Z sa fonction d'autocorrélation. Donner $\rho_Z(h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
2. On suppose que l'on observe $Z_1, ..., Z_n$.
   (a) Pour $h \in \{-n+1, ..., n-1\}$, donner un estimateur $\widehat{\rho}_{Z,n}(h)$ de $\rho_Z(h)$.
   (b) Montrer que, pour $h \geq 1$,

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\widehat{\rho}_{Z,n}(1)\\ \vdots \\ \widehat{\rho}_{Z,n}(h)\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_h),$$

   où I_h est la matrice identité de taille $h \times h$.
   (c) Soit

$$S_n = n\sum_{k=1}^{h}(\widehat{\rho}_{Z,n}(k))^2,$$

   montrer que S_n converge en loi quand $n \to \infty$ vers une loi limite que l'on précisera.

Exercice 2 (5 points)

1. Soit X un processus MA(1) solution de l'équation

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

   avec $Z \sim BB(0, \sigma^2)$. Donner la fonction d'autocovariance de X.

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma(h) = \alpha \mathbf{1}_{h=0} + \beta \mathbf{1}_{|h|=1}.$$

   (a) Montrer que si $\alpha < 0$, γ n'est pas une fonction d'autocovariance.

   (b) Montrer que, si $\alpha^2 - 4\beta^2 \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, γ est la fonction d'autocovariance d'un processus $MA(1)$ dont on précisera les paramètres θ et σ^2.

   (c) Montrer que, si $\alpha^2 - 4\beta^2 < 0$, γ n'est pas une fonction d'autocovariance.

Exercice 3 (5.5 points)

Soient $\varphi \in]-1, 1[$ et $\theta \in]-1/2, 1/2[$ tels que $\varphi \neq 0$ et $\varphi \neq 2\theta$. On considère l'équation ARMA(1,1) suivante

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t - 2\theta Z_{t-1},$$

avec $Z \sim BB(0, \sigma^2)$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution stationnaire et qu'il existe $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $X = F_\alpha Z$.
2. Calculer les coefficients $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
3. Vérifier que X est aussi solution de l'équation ARMA(∞,∞) suivante

$$\sum_{k\geq 0} (2\theta)^k B^k X = \sum_{j\geq 0} \varphi^j B^j Z.$$

Exercice 4 : processus ARX (5.5 points)

Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne μ_X et de fonction d'autocovariance γ_X et $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma^2)$. On suppose que Z est décorrelé avec X, c'est-à-dire que $\mathrm{Cov}(X_t, Z_s) = 0$ pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$. Soient $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_1 \in \mathbb{R}$ des paramètres fixés et, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$Y_t = a_0 X_t + a_1 X_{t-1} + Z_t.$$

1. Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et donner sa moyenne μ_Y et sa fonction d'autocovariance γ_Y.
2. Calculer, pour $p \geq 1$ et $t \in \mathbb{Z}$, la projection de $Y_t - \mu_Y$ sur

$$H_{t,p} = \mathrm{Vect}\{X_t - \mu_X, ..., X_{t-p+1} - \mu_X\}.$$

   Indication : observer que $Y_t - \mu_Y = a_0(X_t - \mu_X) + a_1(X_{t-1} - \mu_X) + Z_t$.
3. (Cas $p = 1$) Calculer, pour $t \in \mathbb{Z}$, la projection de Y_t sur $H_{t,1} = \mathrm{Vect}\{X_t - \mu_X\}$. On pourra remarquer que

$$\mathrm{proj}(Y_t, H_{t,1}) = \widehat{\alpha} X_t \text{ avec } \widehat{\alpha} \in \arg\min_{\alpha\in\mathbb{R}} \|Y_t - \alpha X_t\|_2^2.$$