March 5, 2009

Contents

1	Introduction	3
1.1	Exemples et motivation	3
1.2	Outils graphiques	4
2	Théorie des valeurs extrêmes : approche asymptotique	9
2.1	Loi du maximum	10
2.2	Lois asymptotiques d'autres statistiques d'ordre	19

Chapter 1

Introduction

Références principales :

Beirlant, Goegebeur, Segers and Tengers (2004) : *Statistics of extremes*

Coles 2001: *An introduction to statistical Modelling of Extreme Values*

Embrechts, Klüppelberg, Mikosch: *Modelling extremal events for insurance and finance*

1.1 Exemples et motivation

Les applications de la modélisation et de l'analyse de modèles pour les phénomènes extrêmes sont très variées: modélisation de l'ampleur des vagues (construction de digues ou de plateformes maritimes), pannes de systèmes complexes, météorologies (force du vent, hydrologie,...), stratégies du management, études biomédicales, analyse de risque alimentaire, analyse de risque sismique, assurance, finance, etc...

Quelques exemples :

- Crues de rivières : Pour savoir la hauteur à laquelle il faut construire une digue, il faut être capable de prédire des hauteurs de grandes crues, plus grandes que celles qui ont été observées dans les 50 dernières années si on veut que la digue ait une durée de vie de plus de 50 ans.

- Vent : Prédire la probabilité que la vitesse du vent dépasse un certain seuil (Alerte météorologique, cf hiver 2008-2009, sud ouest de la France)
- Assurance : On s'est rendu compte que 20% des sinistres représentent 80% du montant des sinistres. Ces sinistres très coûteux correspondent à des phénomènes extrêmes qu'il faut pouvoir prédire.
- Chutes de neige sur l'aéroport de Caroline du Nord (US) enregistrées entre 1948 et 1998. Comment utiliser ces données pour prédire la probabilité d'observer des chutes de neiges bien plus importantes telles que celles observées en 2000.

Typiquement on cherche à estimer deux choses:

- Quantile. On veut estimer x tel que

$$P(X \geq x) = p$$

où p est très petite (typiquement plus petite ou du même ordre que $1/n$ (n étant le nombre de données que l'on a))

- Probabilité de dépassement : On veut estimer p

$$P(X \geq x) = p$$

x étant donné et très grand.

Si on utilisait la mesure empirique et si $x < 1/n$

$$\hat{p} = 1 - F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i \geq x} = 0$$

ce qui n'est pas satisfaisant.

1.2 Outils graphiques

QQ Plot

Cet outil sert souvent comme méthode de validation graphique d'un modèle.

Pour un grand nombre de familles de lois la fonction quantile $Q_\theta(p)$ est une fonction linéaire de $Q_{\theta_0}(p)$ où θ_0 est une valeur fixée du paramètre, ainsi il n'est pas besoin d'estimer le paramètre et graphiquement, si on a une estimation que $Q(p)$, $\hat{Q}(p)$ on trace le graphe $(\hat{Q}(p), Q_{\theta_0}(p))$. S'il forme à peu près une droite le modèle est considéré comme raisonnable.

Exemple. Cas Gaussien, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\Phi_{\mu, \sigma}^{-1}(p)$ est la fonction quantile associée à la loi $N(\mu, \sigma^2)$ et Φ^{-1} la fonction quantile associée à la loi normale centrée réduite. On a alors

$$\Phi_{\mu, \sigma}^{-1}(p) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p), \quad \forall p$$

Remarque : L'estimateur empirique de $Q(p)$ associé aux données $X_i, i = 1, \dots, n$ est défini par: Notons $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ l'échantillon ordonné, i.e.

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

alors

$$\hat{Q}_n(p) = X_{(i)}, \quad \text{où} \quad \frac{i-1}{n} < p \leq \frac{i}{n}$$

Ainsi on peut dessiner le QQ plot en considérant comme valeurs de p : $p_i = i/n$ ce qui fait que l'on trace

$$(Q_{\theta_0}(i/n), X_{(i)}), i = 1, \dots, n$$

qui doivent être alignés.

Souvent on ne considère que des valeurs tronquées: les observations sont toutes supérieures à un certain seuil t donné. Ainsi les quantités que l'on considère ne sont pas $P(X \geq x)$ mais $P(X \geq x | X > t)$.

Exemple : On n'a relevé que les vents journaliers forts : supérieurs à 80 km/h et on s'intéresse à la probabilité d'observer un vent très fort.

Si le QQ plot est bon, on peut considérer un modèle paramétrique et alors on peut estimer $P(X > x) = P_\theta(X > x)$ par $\hat{P}_\theta(X > x)$. Mais il faut se méfier, car le modèle paramétrique peut être satisfaisant dans le centre de la distribution mais peu satisfaisant pour les queues de distribution, ce qui est en général mal renseigné par le QQ plot.

Excess Plot

Comme dit dans la partie précédente on s'intéresse souvent à modéliser des phénomènes sachant qu'il sont déjà grand (ex du vent violent), soit à des événements de la forme $X|X > t$ t fixé et grand. Un objet qui peut être utile est la fonction d'excès moyens.

Definition *Fonction d'excès moyens: Si $E(|X|) < +\infty$, $e(t)$ est définie par*

$$e(t) = E[X - t | X > t]$$

Estimateur empirique:

$$\hat{e}_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{X_i > t}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{X_i > t}} - t$$

On a

$$\lim_n \hat{e}_n(t) = e(t), \quad \forall t$$

On peut aussi faire dépendre t des données. Par exemple $t = X_{(n-k)}$: la k ème plus grande observation, i.e. on ne regarde que les k plus grandes observations. Alors

$$\hat{e}_n(t_k) = \frac{\sum_{j=1}^k X_{(n-j+1)}}{k} - X_{(n-k)}$$

Le comportement asymptotique: plus compliqué et sera étudié par la suite.

Re-écriture de $e(t)$: Soit F la fonction de répartition de la loi de X , alors

$$\frac{1 - F(t)}{1 - F(0)} = \frac{e(0)}{e(t)} \exp \left\{ - \int_0^t \frac{1}{e(u)} du \right\}$$

Démonstration : Soit $x^* = \sup\{x; F(x) < 1\}$ la borne sup du support de la loi de X , alors

$$e(t) = \frac{\int_t^{x^*} (1 - F(u)) du}{1 - F(t)}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{1}{e(u)} du &= \int_0^t \frac{1 - F(u)}{\int_u^{x^*} (1 - F(v)) dv} du \\ &= - \int_0^t \frac{d}{du} \left(\log \int_u^{x^*} (1 - F(v)) dv \right) du \\ &= \log(e(0)(1 - F(0))) - \log(e(t)(1 - F(t))) \end{aligned}$$

□

Cas particulier : $X \sim \text{Exp}(\theta)$

$$e(t) = 1/\theta : \quad \text{constante}$$

- Si $e(t)$ queue de distribution similaire a une exponentielle
- Si $e(t)$ croissante : queue plus lourde
- Si $e(t)$ décroissante : queue plus légère.

Ainsi pour avoir une idée sur la forme de la queue de distribution de X , on peut tracer le graphe d'un estimateur de $e(t)$ de la forme:

$$e_{k,n} = \hat{e}_n(X_{(n-k)}) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_{(n-j+1)} - X_{(n-k)}, k = 1 \dots n - 1, \quad (X_{(n-k)}, e_{k,n})$$

et regarder la monotonie sur les petites valeurs de k .

Chapter 2

Théorie des valeurs extrêmes : approche asymptotique

Cadre : $X_1, \dots, X_n$ indépendants et identiquement distribuées selon une loi F .

- Comportement centrale : limite en loi de

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - E(X)) \rightarrow Q$$

où Q est une loi "stable". En particulier si $E(X^2) < \infty$ Q appartient à la famille des lois normales.

- L'étude des valeurs extrême porte sur le comportement des quantiles extrêmes: $p = P(X \geq x)$. On s'intéresse typiquement à 2 types de problèmes:

- x grand mais fixé, on cherche à estimer p
- p petit et fixé, on cherche à estimer x .

Pour répondre à ces questions on étudie la loi asymptotique de *grands* quantiles empiriques ainsi que le comportement de probabilité de dépassement de grands seuils.

2.1 Loi du maximum

Caractérisation des limites possibles

Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables indépendantes et distribuées selon une même loi de fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et $X_{(n)} = \max\{X_i, i = 1, \dots, n\}$. Alors

$$P(X_{(n)} \leq x) = F(x)^n$$

Notons $x_* = \sup\{x; F(x) < 1\}$, alors $\forall x < x_*$

$$\lim_n P(X_{(n)} \leq x) = 0, \quad \Rightarrow X_{(n)} \rightarrow x_*, \quad \text{Proba}$$

Le but de ce paragraphe est de caractériser (G, a_n, b_n) tels que

$$\lim_n P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x) \tag{2.1}$$

avec G non dégénérée.

Theorem 1 *Si il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_n P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \rightarrow G(x), \quad G \text{ non dégénérée}$$

alors G est nécessairement d'un des trois types suivant:

- *Gumbel :*

$$G(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x$$

- *Fréchet $\alpha > 0$ et*

$$G(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

$$G(x) = \exp(-x^{-\alpha}) \quad \text{si } x \geq 0$$

- *Weibul $\alpha > 0$ et*

$$G(x) = 1 \quad \text{si } x > 0$$

$$G(x) = \exp(-|x|^\alpha) \quad \text{si } x \leq 0$$

Remarque 1: Signification de la notion " F est du type " : On dit que deux fonctions de répartition H_1, H_2 sont du même type s'il existe $A > 0$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que

$$H_1(x) = H_2(Ax + B), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Remarque 2: (a_n, b_n) ne sont pas définis de manière unique: soit (a'_n, b'_n) tels que $a'_n = aa_n$ et $b'_n = bb_n$ alors

$$P\left(\frac{X^{(n)} - b'_n}{a'_n} \leq x\right) = F^n(axa_n + bb_n) = F^n((ax+b)a_n + b_nb(1-a_n/b_n)) = F^n((ax+b)a_n + b_n)$$

ssi $b = (1 - a_n/b_n)^{-1}$.

Remarque 3 : On peut écrire la loi limite de manière unifiée: On dit que F appartient à la famille des lois GEV (generalized extreme value distribution) ssi il existe $(\gamma, \mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$F(x) = \exp\left\{-\left(1 + \gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/\gamma}\right\}; \quad 1 + \gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) > 0 \quad (2.2)$$

let cas $\gamma = 0$ correspond à

$$F(x) = \exp\left(-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right)$$

Definition 1 On dit que F appartient au domaine d'attraction de G_γ ($F \in MDA(G_\gamma)$) ssi il existe $a_n > 0$ et b_n tels que

$$F^n(a_nx + b_n) \rightarrow G_\gamma, \quad G_\gamma = GEV$$

Démonstration :

Soit Q la fonction quantile associée à F :

$$Q(u) = \inf\{x; F(x) \geq u\}, \quad u \in [0, 1]$$

et notons

$$U(y) = Q(1 - 1/y), \quad y \in [1, +\infty[$$

la fonction des quantiles de queues.

On utilise le lemme suivant:

¹²**Lemma 1** *Si il existe $a > 0$ tel que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(ax) - U(x)}{a(x)} = h(u)$$

pour une certaine fonction h non dégénérée alors il existe , $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$h(u) = h_\gamma(u) = \frac{u^\gamma - 1}{\gamma}$$

et $F \in MDA(G_\gamma)$

Démonstration du Lemme.

Soient $u, v > 0$

$$\frac{U(uvx) - U(x)}{a(x)} = \frac{U(uvx) - U(vx)}{a(vx)} \frac{a(vx)}{a(x)} + \frac{U(vx) - U(x)}{a(x)}$$

d'après les hypothèses

$$\frac{U(uvx) - U(x)}{a(x)} = h(uv) + o(1), \quad \frac{U(uvx) - U(vx)}{a(vx)} = h(u) + o(1), \quad \frac{U(vx) - U(x)}{a(x)} = h(u) + o(1)$$

par conséquent il existe $z(v)$ non dégénérée telle que

$$\frac{a(vx)}{a(x)} = z(v) + o(1)$$

Ainsi

$$\frac{a(vux)}{a(x)} = \frac{a(vx)}{a(x)} \frac{a(uvx)}{a(vx)} = z(v)z(u) + o(1) = z(uv) + o(1)$$

donc pour tout $u, v > 0$

$$z(uv) = z(u)z(v)$$

ce qui implique qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$

$$z(u) = z_\gamma(u) = u^\gamma.$$

Donc à la limite

$$h(uv) = h(u)v^\gamma + h(v) = h(v)u^\gamma + h(u), \quad \forall u, v > 0$$

donc

$$h(u) \propto u^\gamma - 1,$$

ce qui achève la preuve du lemme. $\square$

L'idée de la démonstration du théorème 1 est la suivante : En se basant sur le théorème de Helly-Bray, $Y_n = a_n^{-1}(X_{(n)} - b_n)$ converge en loi vers G ssi pour toute fonction g continue bornée

$$\lim_n E[g(Y_n)] = \int g(y) dG(y)$$

Or considérons le changement de variable suivant :

$$v = n(1 - F(x)) \in (0, n), \quad dv = n dF(x)$$

alors $U\left(\frac{n}{v}\right) = x$ et

$$E(g(Y_n)) = \int_0^n g\left(\frac{U(n/v) - b_n}{a_n}\right) \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n dv$$

et $\forall v$ fixé

$$\left(1 - \frac{v}{n}\right)^n \rightarrow e^{-v}$$

donc Y_n converge en loi vers G ssi $\frac{U(n/v) - b_n}{a_n}$ converge vers une fonction non dégénérée (pas de masses en l'infini), que l'on note $h(v)$. prenons $v = 1$ alors $\frac{U(n) - b_n}{a_n} \rightarrow h(1)$ On choisit $b_n = U(n)$ ce qui revient à considérer $h(1) = 0$. En utilisant le lemme 1 si $\frac{U(n/v) - U(n)}{a(n)}$ converge vers une fonction non dégénérée, cette fonction à la forme: $h_\gamma(1/v)$ pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$. Alors si $E(g(Y_n))$ converge pour tout g continue bornée, la limite à la forme

$$\int_0^\infty g\left(\frac{v^{-\gamma} - 1}{\gamma}\right) e^{-v} dv$$

en faisant le changement de variable $u = \frac{v^{-\gamma} - 1}{\gamma}$ $du = -v^{-\gamma-1} dv$ et $v = (1 + \gamma u)^{-1/\gamma}$ ce qui prouve le théorème. $\square$

Remarque 4 Toutes les lois sur $\mathbb{R}$ n'appartiennent pas à un domaine d'attraction. Par exemple la loi de Poisson est dans aucun $DMA(G_\gamma)$.

Nous étudions désormais les conditions pour que $F \in MDA(G_\gamma)$.

¹⁴ **Le domaine d'attraction de Fréchet** ($\gamma > 0$)

Considérons l'exemple de la loi de Pareto $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$: $F_\alpha(x) = 1 - x^{-\alpha}$ si $x > 1$. α est appelé indice de Pareto. On a alors :

$$F_\alpha^{-1}(p) = (1 - p)^{-1/\alpha}, \quad U(y) = y^{1/\alpha}$$

Donc

$$U(uy) - U(y) = y^{1/\alpha}(u^{1/\alpha} - 1), \quad \text{et si } a(y) = \alpha^{-1}y^{1/\alpha}$$

on obtient que $F_\alpha \in \text{MDA}(G_{1/\alpha})$, les lois de Pareto sont donc des lois appartenant au domaine de Fréchet. Nous montrons maintenant que les lois appartenant au domaine de Fréchet ressemble nécessairement aux lois de Pareto. Pour cela nous introduisons les fonctions à variations régulières.

Definition 2 Soit f une fonction définie et positive au voisinage de $+\infty$, alors f est à variations régulières ssi il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = \rho^t$$

On note alors $f \in RV_\rho$ et ρ est l'indice de variation régulière de f . Si $\rho = 0$ la fonction est dite à variations lentes.

Exemples de fonctions à variations lentes :

- $f(x) = \log x$
- si f tend vers une limite finie non nulle et positive alors f est à variations lentes
- $f(x) = \exp((\log x)^\beta)$ si $\beta < 1$.

Quelques propriétés :

1. $f \in RV_\rho$ ssi il existe $L \in RV_0$ telle que $f(x) = x^\rho L(x)$.
2. $f \in RV_0$ ssi il existe deux fonctions C, ϵ convergeant vers C et 0 respectivement telles que

$$f(x) = C(x) \exp \left\{ \int_a^x \frac{\epsilon(u)}{u} du \right\}$$

pour un certain a .

3. Si $f \in RV_0$

$$\lim_{\infty} \frac{\log f(x)}{\log x} = 0$$

4. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si $L \in RV_0$ $L^\alpha \in RV_0$

5. A partir d'un certain rang

$$Ax^{-\delta} \leq f(x) \leq Ax^\delta, \quad \forall \delta > 0$$

(le rang dépend de δ)

Il est une propriété portant sur les fonctions à variations lentes qui va être particulièrement utile dans la suite du cours : La conjuguée de Bruyn.

Proposition 1 Si $f \in RV_0$ il existe $f^* \in RV_0$ appelée la conjuguée de Bruyn de f telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)f^*(xf(x)) = 1$$

D'autre part, si $\tilde{f} \in RV_0$ vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\tilde{f}(xf(x)) = 1$$

alors

$$f \sim \tilde{f} \quad \text{et} \quad (f^*)^* \sim f$$

Nous ne démontrons pas cette proposition.

Nous avons alors la caractérisation suivante des distributions dans $MDA(G_\gamma)$, $\gamma > 0$.

Theorem 2 $F \in MDA(G_\gamma)$ avec $\gamma > 0$ ssi $\bar{F} \in RV_{-1/\gamma}$ soit ssi $\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma}L(x)$ avec $L \in RV_0$, où $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

Démonstration du théorème 2.

16 Remarquons que par définition, F est non constante égale à 1 au voisinage de l'infini et donc le support de F contient un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et pour tout t

$$1 - F(U(t)) \leq 1/t, \quad \forall z < U(t), \quad \bar{F}(z) > 1/t$$

ainsi $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = +\infty$. Par ailleurs si F est continue $1 - F(U(t)) = 1/t$ et si U est continue $U(1/(1 - F(x))) = x$ et U est continue à gauche. Supposons que $\bar{F}(x) = x^{-1/\gamma}L(x)$, $\gamma > 0$, alors

$$\lim_{+\infty} \bar{F}(U(y))y = 1 \quad U(1/\bar{F}(x)) \sim x$$

Soit $y = 1/\bar{F}(x)$ alors $y = x^{1/\gamma}1/L(x) = (xL_1(x))^{1/\gamma}$ avec $L_1 \in RV_0$ d'après la propriété (4) des fonctions à variations lentes. Soit L^* la conjuguée de Bruyn de L_1 alors $xL_1(x)L^*(xL_1(x)) \sim x$ et $y^\gamma L^*(y^\gamma) \sim x$. Comme $U(y) \sim x$ on a

$$U(y) \sim y^\gamma L_1^*(y^\gamma)$$

et donc

$$\lim_{\infty} \frac{U(ty) - U(y)}{\gamma y^\gamma} = h_\gamma(t), \quad \forall t > 0$$

donc $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$.

Réciproquement supposons que $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$, i.e.

$$\lim_{\infty} \frac{U(ty) - U(y)}{\gamma y^\gamma L_a(y)} = h_\gamma(t), \quad \forall t > 0$$

avec $L_a \in RV_0$ alors on peut montrer que $U \in RV_\gamma$ donc $x\bar{F}(U(x)) = x\bar{F}(x^\gamma L(x))$ avec $L \in RV_0$ et comme $x\bar{F}(U(x)) \rightarrow 1$ on a $\bar{F}(x^\gamma L(x)) \sim 1/x$ donc il existe $L' \in RV_0$ telle que $\bar{F}((xL'(x))^\gamma) \sim 1/x$. Posons $y = (xL'(x))^\gamma$ alors en utilisant le même raisonnement que précédemment

$$x = y^{1/\gamma}L_2(y), \quad L_2 \in RV_0$$

et $\bar{F}(y) = y^{-1/\gamma}L_2'(y)$ avec $L_2' \in RV_0$, ce qui achève la preuve du théorème 2. $\square$

Remarquons que dans le cas de Fréchet on peut choisir $b_n = U(n)$ et $a_n = a(n) = n^\gamma L_a(n)$ où $L_a \in RV_0$.

Domaine d'attraction de Weibul ($\gamma < 0$)

Considérons le cas particulier suivant. Soit $x_* \in \mathbb{R}^+$ et supposons que la loi a comme support $[0, x_*]$ et fonction de survie

$$\bar{F}(x) = \left(1 - \frac{x}{x_*}\right)^\beta, \quad x \in [0, x_*]$$

alors

$$U(y) = x_*(1 - y^{-1/\beta}), \quad y \in [1, +\infty)$$

ainsi

$$U(ty) - U(y) = x_*y^{-1/\beta}(1 - t^{-1/\beta})$$

ainsi en choisissant $a(y) = x_y^{-1/\beta}/\beta = (x_* - U(y))/\beta$ on montre que $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$. Nous montrons dans cette partie que l'on peut généraliser ce résultat à

$$\bar{F}(x) = (x_* - x)^{-1/\gamma}L(1/(x_* - x))$$

Theorem 3 $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$, $\gamma < 0$ ssi il existe $x_* < +\infty$ et $L \in \text{RV}_0$ tels que

$$\bar{F}(x) = (x_* - x)^{-1/\gamma}L(1/(x_* - x))$$

on peut alors choisir $a(x) = (x_* - U(y))/|\gamma|$.

Démonstration du théorème 3 Tout d'abord si $\bar{F}(x) = (x_* - x)^{-1/\gamma}L(1/(x_* - x))$, en utilisant les mêmes calculs que précédemment on obtient

$$U(y) = x_* - y^\gamma L_u(y), \quad L_u \in \text{RV}_0 = (L^*(y^{-\gamma}))^{-1}$$

ainsi

$$\frac{U(ty) - U(y)}{y^\gamma L_u(y)} = -t^\gamma + 1 + o(1)$$

et on obtient ainsi que $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$ en posant $a(y) = y^\gamma L_u(y)|\gamma| = |\gamma|[x_* - U(y)]$.

Réciproquement, on avait vu que si $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$ alors il existe $L_a \in \text{RV}_0$ telle que

$$\frac{U(ty) - U(y)}{y^\gamma L_a(y)} = h_\gamma(u) + o(1)$$

$$U(y) = y^\gamma L_u(y), L_u \in RV_0$$

ce qui achève la démonstration.

Le cas de Gumbel est plus compliqué.

Domaine d'attraction de Gumbel

Nous ne démontrons pas le théorème.

Theorem 4 $F \in MDA(G_0)$ ssi il existe une fonction $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall v > 0$

$$\frac{\bar{F}(y + vb(y))}{\bar{F}(y)} \rightarrow e^{-v}, \quad \text{quand } y \rightarrow x_*, \quad \text{alors } \frac{b(y + vb(y))}{b(y)} \rightarrow 1$$

Dans le cas exponentiel $b(y) = 1/\lambda$

- Cas Gaussien : $b(y) = 1/y$

Nous pouvons regrouper les trois cas dans la formulation suivante :

Theorem 5 $F \in MDA(G_\gamma), \gamma \in \mathbb{R}$ ssi il existe $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et tel que pour tout $1 + \gamma v > 0$

on a

$$\frac{\bar{F}(y + b(y)v)}{\bar{F}(y)} \rightarrow (1 + \gamma v)^{-1/\gamma}, \quad \frac{b(y + vb(y))}{b(y)} \rightarrow 1 + \gamma v$$

Par ailleurs

- si $\gamma > 0$ $a(x)/U(x) \rightarrow \gamma$
- si $\gamma < 0$ $a(x)/(x_* - U(x)) \rightarrow -\gamma$
- si $\gamma = 0$ $a(x)/U(x) \rightarrow 0$ et si $x_* < +\infty$ $a(x)/(x_* - U(x)) \rightarrow 0$.

Il suffit de considérer $b(y) = y$ dans le cas $\gamma > 0$

Liens avec la loi des excès

Remarquons que

$$\frac{\bar{F}(y + h)}{\bar{F}(y)} = P(X > y + h | X > y)$$

ainsi si on considère les excès moyen de $\log X$

$$\begin{aligned} e_{\log X}[\log x] &= E[\log(X/x)|X > x] \\ &= \int_x^\infty \frac{\log(u/x)dF(u)}{\bar{F}(x)} \\ &= \int_1^x \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

D'après les résultats précédents dans le cas où $\gamma > 0$

$$\frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-1/\gamma}(1 + o(1))$$

donc on peut s'attendre à ce que

$$e_{\log X}[\log x] \sim \gamma, \quad x \rightarrow \infty$$

ainsi une des méthodes possibles pour estimer γ sera de déterminer un estimateur de $e_{\log X}[\log x]$ pour x grand, ce qui est à la base de l'estimateur de Hill.

2.2 Lois asymptotiques d'autres statistiques d'ordre

$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Rappelons que la loi de $X_{(n-k)}$ est donnée par

$$P(X_{(n-k+1)} \leq x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \int_{-\infty}^x F^{n-k}(u)(1-F(u))^{k-1}dF(u)$$

Détermination de la loi limite lorsque n tend vers $+\infty$

k est fixé

Dans le cas où k est fixé étudions la convergence en loi de $(X_{(n-k+1)} - U(n))/a_n$. Comme pour le max on étudie le comportement limite de

$$\begin{aligned} E(g(Y_{n,k})), \quad Y_{n,k} &= (X_{(n-k+1)} - U(n))/a_n \\ E(g(Y_{n,k})) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \int g((y - U(n))/a_n) F^{n-k}(y)(1-F(y))^{k-1}dF(y) \end{aligned}$$

Posons encore $v = n(1 - F(y))$ alors $dv = ndF$ et

$$E(g(Y_{n,k})) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int g((U(n/y) - U(n))/a_n) e^{-v} v^{k-1} dF(y) + o(1)$$

donc comme précédemment il y a convergence pour tout g ssi $F \in \text{MDA}(G_\gamma)$ et alors la limite est égale à :

$$\frac{1}{\Gamma(k)} \int g(h_\gamma(1/v)) e^{-v} v^{k-1} dF(y) = E(h_\gamma((\sum_{j=1}^k E_j)^{-1}))$$

où $E_j \sim \Gamma(1, 1)$ ind. Donc

$$Y_{n,k} \stackrel{d}{=} h_\gamma((\sum_{j=1}^k E_j)^{-1}) + o(1)$$

Le cas où k tend vers $+\infty$ est plus compliqué.

Cas où k est variable

Dans ce paragraphe on suppose que $k \rightarrow +\infty$ et $n - k \rightarrow +\infty$.