M2 – Temps de mélange – Examen 2020

Les notes de cours sont autorisées.

Les deux problèmes sont indépendants ; au sein de chacun d'eux, il est tout à fait possible d'admettre la réponse à une question pour l'utiliser dans les suivantes.

On note $t_{\text{MIX}}(P, \varepsilon)$ le temps de mélange associé au noyau P pour la précision ε.

Problème 1

Soit $n \geq 3$ un entier. Sur l'espace $S = \{1, \ldots, n\}$, on considère la matrice de transition suivante :

$$P \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe induit dans le cas particulier $n = 5$.
2. Justifier que P admet une unique loi stationnaire π et la calculer.
3. Déterminer le diamètre et le degré de la chaîne. Que peut-on en déduire pour $t_{\text{MIX}}(P, \varepsilon)$?
4. Calculer la conductance $\Phi_\star(P)$. Que peut-on en déduire pour $t_{\text{MIX}}(P, \varepsilon)$?
5. À l'aide d'un noyau de couplage bien choisi, montrer que
$$t_{\text{MIX}}(P, \varepsilon) \quad \leq \quad \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rceil.$$
6. Expliciter le noyau adjoint $P^\star$. Dessiner le graphe induit dans le cas particulier $n = 5$.
7. En utilisant la valeur de $\pi(1)$, montrer que $t_{\text{MIX}}(P^\star, \varepsilon) \geq n - 1$ dès que $\varepsilon < \frac{1}{2}$.
8. Plus généralement, montrer que pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$,
$$t_{\text{MIX}}(P^\star, \varepsilon) \quad \geq \quad n - 1 - \left\lfloor \log_2 \left(\frac{1}{1 - \varepsilon} \right) \right\rfloor.$$
9. Montrer que depuis l'état 1, une seule itération du noyau $P^\star$ suffit pour mélanger.
10. En déduire que $P^\star$ vérifie un cutoff au temps $n + o(n)$ lorsque $n \to \infty$.

Problème 2

Soit P un noyau ergodique, réversible, de loi invariante π sur un espace fini S. On note $\tau = 1/\log\frac{1}{\lambda_\star}$ le temps de relaxation de P. Pour $n \geq 1$, on définit le "noyau produit" P_n sur S^n par :

$$P_n(x,y) \quad := \quad P(x_1,y_1) \times \cdots \times P(x_n,y_n),$$

pour tous $x = (x_1,\ldots,x_n) \in S^n$ et $y = (y_1,\ldots,y_n) \in S^n$. Le but est de montrer que pour $\varepsilon \in (0,1)$,

$$t_{\text{MIX}}(P_n,\varepsilon) \quad = \quad \frac{1}{2}\tau\log n + o(\log(n)) \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{1}$$

1. Soit $(X(t))_{t\geq 0}$ une chaîne de noyau P_n issue de $x \in S^n$. Que dire de $(X_1(t))_{t\geq 0}, \ldots, (X_n(t))_{t\geq 0}$?
2. Montrer que P_n est ergodique et réversible, et exprimer sa loi invariante π_n en fonction de π.
3. Soit $f\colon S \to \mathbb{R}$ une fonction propre de P associée à une valeur propre $\lambda \notin \{0,1\}$, normalisée de façon à ce que $\|f\|_\infty = 1 = f(z)$ pour un certain $z \in S$. On définit $\phi\colon S^n \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(x) \quad := \quad f(x_1) + \cdots + f(x_n).$$

   (a) Soit $(X(t))_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov de noyau P_n issue de l'état $(z,\ldots,z)$. Montrer que $\mathbb{E}[\phi(X(t))] = n\lambda^t$ et $\mathrm{Var}[\phi(X(t))] \leq n$, puis en déduire que pour t pair,

$$\mathbb{P}\left(\phi(X(t)) \leq \frac{n\lambda^t}{2}\right) \quad \leq \quad \frac{4}{n\lambda^{2t}}.$$

   (b) Soit Y de loi π_n. Justifier que $\mathbb{E}[\phi(Y)] = 0$ et $\mathrm{Var}[\phi(Y)] \leq n$ et déduire que pour t pair,

$$\mathbb{P}\left(\phi(Y) \leq \frac{n\lambda^t}{2}\right) \quad \geq \quad 1 - \frac{4}{n\lambda^{2t}}.$$

   (c) À l'aide d'un choix judicieux de λ, conclure à la minoration $\geq$ dans (1).

4. On définit l'écart quadratique entre deux lois μ et π par la formule suivante :

$$\chi(\mu,\pi) \quad := \quad \left\|\frac{\mu(\cdot)}{\pi(\cdot)} - 1\right\|_{\ell^2(\pi)}^2 \quad = \quad \sum_x \pi(x)\left(\frac{\mu(x)}{\pi(x)} - 1\right)^2.$$

   (a) Fournir une majoration générale de $d_{\text{TV}}(\mu,\pi)$ à l'aide de $\chi(\mu,\pi)$.

   (b) Établir l'identité $1 + \chi(\mu,\pi) = \sum_x \frac{(\mu(x))^2}{\pi(x)}$ et en déduire que

$$1 + \chi\left(P_n^t(x,\cdot),\pi_n\right) \quad = \quad \prod_{i=1}^n \left(1 + \chi\left(P^t(x_i,\cdot),\pi\right)\right).$$

   (c) En déduire qu'avec la notation $\pi_\star := \min_{x\in S}\pi(x)$, on a pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\max_{x\in S^n} \chi\left(P_n^t(x,\cdot),\pi_n\right) \quad \leq \quad \left(1 + \frac{\lambda_\star^{2t}}{\pi_\star}\right)^n - 1.$$

   (d) Conclure à la majoration $\leq$ dans (1).