Temps de mélange – Examen 2021

Les notes de cours sont autorisés, et les deux problèmes sont indépendants.

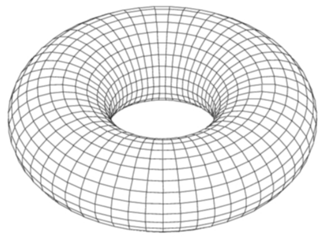

Figure 1 – Illustration du tore.

Problème 1

On considère la marche paresseuse sur le tore illustré figure 1. Il s'agit d'une marche sur le groupe $S = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ muni de l'addition modulo n coordonnée par coordonnée, avec loi d'incréments

$$\mu((z_1, z_2)) \quad := \quad \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (z_1, z_2) = (0,0) \\ \frac{1}{8} & \text{si } (z_1, z_2) \in \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le diamètre de la chaîne, et en déduire un encadrement aussi fin que possible de t_{MIX}.
2. Appliquer la méthode de congestion, et en déduire que $t_{\text{REL}} = \mathcal{O}\left(n^2\right)$.
3. On définit $f\colon S \to \mathbb{C}$ par $f((z_1, z_2)) := e^{\frac{2i\pi z_1}{n}}$. Calculer Pf et en déduire que $t_{\text{REL}} = \Theta\left(n^2\right)$.
4. Construire un couplage trajectoriel dont le temps de coalescence vérifie $\mathbb{E}[T] = O(n^2)$.
5. En déduire l'ordre de grandeur de t_{MIX}. Y a-t-il cutoff ?

Problème 2

Soit $p \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. La marche paresseuse de biais p sur $\mathbb{Z}$ est le processus $\mathbf{Z} = (Z_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$Z_t \quad := \quad \xi_1 + \cdots + \xi_t,$$

où les incréments $(\xi_t)_{t\geq 1}$ sont i.i.d., à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, et de loi

$$\mathbb{P}(\xi_t = 0) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(\xi_t = 1) = \frac{p}{2}, \qquad \mathbb{P}(\xi_t = -1) = \frac{1-p}{2}.$$

Nous considérons ici sa restriction à l'espace d'états $S = \{1, \ldots, n\}$, obtenue en ignorant les sauts qui sortent de S. Plus précisément, on choisit un état initial $x \in S$ et on définit un processus $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$ par récurrence en posant $X_0 = x$ puis pour tout $t \geq 1$,

$$X_t \quad := \quad \begin{cases} X_{t-1} + \xi_t & \text{si } X_{t-1} + \xi_t \in \{1, \ldots, n\} \\ n & \text{si } X_{t-1} + \xi_t = n + 1 \\ 1 & \text{si } X_{t-1} + \xi_t = 0. \end{cases}$$

1. *Préliminaires.*
   (a) Justifier que le processus $\mathbf{Z}$ s'échappe vers $-\infty$ presque-sûrement, et préciser sa vitesse.
   (b) Montrer que $\mathbf{X}$ est une chaîne de Markov ergodique sur S dont on précisera le noyau P, et vérifier que, pour une constante $c > 0$ que l'on précisera, la formule
   $$\pi(x) \quad := \quad \frac{1}{c} \left(\frac{p}{1-p} \right)^x.$$
   définit une loi réversible pour P.
   (c) Soit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq S$. Montrer que si $\pi(A) \leq \frac{1}{2}$, on a $\Phi(A) \geq \Phi(A^c)$. Montrer par ailleurs que si $1 \notin A$, alors $\pi(A) \leq \pi(x) \frac{1-p}{1-2p}$, où $x \geq 2$ est le plus petit élément de A. En déduire que
   $$\Phi_\star \quad \geq \quad \frac{1-2p}{2}.$$
   (d) En combinant divers résultats que l'on énoncera, conclure que $t_{\text{MIX}} = \Theta(n)$.
2. *Majoration fine.*
   (a) On pose $T := \min\{t \geq 0 \colon X_t = 1\}$. Justifier que $X_{t \wedge T} \leq x + Z_{t \wedge T}$, et en déduire que
   $$\max_{x \in S} \mathbb{P}_x (T > t) \quad \leq \quad \mathbb{P}(Z_t > -n).$$
   (b) Définir un noyau de couplage Q pour P qui ait la propriété suivante : lorsque chacune des deux trajectoires a touché 1, la coalescence a forcément eu lieu.
   (c) Conclure que pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, on a lorsque $n \to \infty$,
   $$t_{\text{MIX}}(\varepsilon) \quad \leq \quad \frac{2n}{1-2p} + o(n).$$
3. *Minoration fine.* Soit $a \in S$ et $A := \{1, \ldots, a\}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in S$ et tout $t \geq 0$, on a
   $$\mathfrak{D}(t) \geq 1 - \left(\frac{p}{1-p} \right)^a - \mathbb{P}_x(X_t \in A).$$
   (b) En distinguant suivant que $x + \mathbf{Z}$ visite n ou non, montrer que
   $$\mathbb{P}_x(X_t \in A) \quad \leq \quad \mathbb{P}(Z_t \leq a - x) + \mathbb{P}\left(\max_{s \geq 0} Z_s \geq n - x \right).$$
   (c) En choisissant $x = n - a$ avec $1 \ll a \ll n$, conclure qu'il y a cutoff.