M2 – Temps de mélange – Corrigé 2019

Problème 1 – Marche biaisée sur le cycle

1. Si S est un ensemble fini, $f\colon S \times \mathbb{R} \to S$ une fonction mesurable, $(\xi_t)_{t\geq 1}$ des variables réelles i.i.d., et X_0 une variable à valeurs dans S indépendante de $(\xi_t)_{t\geq 1}$, alors le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$X_t \quad := \quad f(X_{t-1}, \xi_t) \qquad (t \geq 1), \tag{1}$$

est une chaîne de Markov de paramètres (S, P, ν), avec $P(x,y) := \mathbb{P}\left(f(x,\xi_1) = y\right)$ et $\nu = \mathrm{Loi}(X_0)$. En prenant ici $X_0 = x$ et $f\colon (a,b) \mapsto a+b \mod n$, on obtient $\nu = \delta_x$ et

$$P(x,y) \quad := \quad \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = x \\ \frac{p}{2} & \text{si } y = x+1 \mod n \\ \frac{1-p}{2} & \text{si } y = x-1 \mod n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Il s'agit d'une marche aléatoire sur le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Pour une telle marche, la loi uniforme $\pi(x) := \frac{1}{|S|}$ est toujours stationnaire. Le noyau P est irréductible et paresseux, donc ergodique. Comme π est uniforme, la matrice $P^\star$ est la transposée de P, ce qui revient à remplacer p par $1-p$.

2. Le degré maximal de la chaîne est $\Delta = 3$. D'après le lemme 11, ceci implique $t_{\text{MIX}}^{(n)} \gtrsim \log_3(n)$. Le diamètre de la chaîne est $\lfloor n/2 \rfloor$ et le support de P est symétrique, donc le même lemme assure que $t_{\text{MIX}}^{(n)} \gtrsim \frac{n}{4}$, ce qui est nettement meilleur, mais encore loin du compte comme nous le verrons.

3. Soit $A \subseteq S$ avec $\pi(A) \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Alors $A \times A^c$ contient nécessairement une arête de la forme $(a, a+1)$, et une arête de la forme $(b, b-1)$, et donc

$$\vec{\pi}(A \times A^c) \quad \geq \quad \vec{\pi}(a, a+1) + \vec{\pi}(b, b-1) \;=\; \frac{p}{2n} + \frac{1-p}{2n} \;=\; \frac{1}{2n}$$

Comme $|A| \leq \lfloor n/2 \rfloor$, on obtient $\phi(A) \geq \frac{1}{2\lfloor n/2 \rfloor}$. De plus, il y a égalité pour $A = \{1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, donc

$$\Phi_\star \quad = \quad \frac{1}{2\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{3}$$

Le Corollaire 15 entraîne $t_{\text{MIX}}^{(n)} \gtrsim \frac{n}{4}$, ce que nous savions déjà. En revanche, l'inégalité de Cheeger assure que $\gamma(P) \geq \frac{1}{2n^2}$, et la marche étant paresseuse, le Théorème 12 garantit que

$$t_{\text{MIX}}^{(n)} \quad \lesssim \quad 2n^2 \log n. \tag{4}$$

4. Posons $Z_t := \xi_1 + \cdots + \xi_t$. Comme les variables $\xi_1, \ldots, \xi_t$ sont i.i.d., on a

$$\mathbb{E}\left[Z_t\right] = \mu t \quad \text{ et } \quad \mathrm{Var}(Z_t) = \sigma^2 t,$$

où $\mu = p - \frac{1}{2}$ et $\sigma^2 = \frac{1}{4} + p(1-p)$ sont l'espérance et la variance de la variable aléatoire ξ_1. D'après l'inégalité de Chebychev, on en déduit que pour tout $\kappa > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|Z_t - \mu t| \geq \kappa\sqrt{t}\right) \quad \leq \quad \frac{\sigma^2}{\kappa^2}.$$

Il suffit donc de choisir $\kappa = 2\sigma = \sqrt{1+4p(1-p)}$. L'intervalle $\left]\mu t - \kappa\sqrt{t}; \mu t + \kappa\sqrt{t}\right[$ contient moins que $2\kappa\sqrt{t}$ entiers. En notant $A_t \subseteq S$ l'image de ces entiers par l'application $\mod n$, on a alors

$$\mathbb{P}_0\left(X_t \in A_t\right) \ \geq \ \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \pi(A_t) \ \leq \ \frac{2\kappa\sqrt{t}}{n}. \tag{5}$$

Ainsi, tant que $t < \frac{n^2}{16\kappa^2}$, on a $\mathbb{P}_0\left(X_t \in A_t\right) - \pi(A_t) > \frac{1}{4}$ et donc $\mathfrak{D}(t) > \frac{1}{4}$, ce qui montre que

$$t_{\text{MIX}}^{(n)} \ \geq \ \frac{n^2}{16\kappa^2}. \tag{6}$$

5. L'idée est la même que pour le cas $p = \frac{1}{2}$ étudié en cours : à chaque étape, on tire à pile ou face pour savoir laquelle des deux coordonnées se déplace, et on la déplace de $+1$ ou -1 avec probabilité p ou $1-p$ respectivement. Cela correspond au noyau de couplage suivant :

$$Q\left((x,y),(x',y')\right) \ := \ \begin{cases} \frac{p}{2} & \text{si } (x',y') \in \{(x+1,y),(x,y+1)\} \\ \frac{1-p}{2} & \text{si } (x',y') \in \{(x-1,y),(x,y-1)\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

Notons qu'avec ce couplage, le processus des différences $(X_t - Y_t)_{t\geq 0}$ est exactement une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et le temps de coalescence T est le temps d'atteinte de 0 par cette marche. De manière équivalente, T est le temps d'atteinte de $\{0,n\}$ par une marche simple sur $\mathbb{Z}$ issue d'un certain entier $k \in \{1,\ldots,n\}$. Un argument de martingale classique, disponible dans les notes de cours, montre que l'on a $\mathbb{E}[T] = k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$. En particulier, l'inégalité de Markov assure que

$$\mathbb{P}\left(T \geq n^2\right) \quad \leq \quad \frac{1}{4}, \tag{8}$$

ce qui entraîne que $t_{\text{MIX}}^{(n)} \leq n^2$.

6. Par définition, on a pour toute observable $f\colon S \to \mathbb{C}$ et tout $x \in S$,

$$Pf(x) \quad = \quad \frac{1}{2}f(x) + \frac{p}{2}f(x+1) + \frac{1-p}{2}f(x-1).$$

Avec $f = \phi_k$, on en déduit que ϕ_k est une fonction propre associée à la valeur propre complexe

$$\lambda_k \quad = \quad \frac{1}{2}\left(1 + pe^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}} + (1-p)e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\right).$$

Ce sont les seules valeurs propres de P, puisque les $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de $\ell^2_{\mathbb{C}}(S,\pi)$. Notons que l'on a $|\lambda_k|^2 = g\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$ avec

$$g(\theta) \quad = \quad \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{(2p-1)\sin\theta}{2}\right)^2 \quad = \quad \frac{1+\cos\theta}{2} - p(1-p)(\sin\theta)^2.$$

En dérivant, on voit que g est croissante sur $[-\pi, 0]$ et décroissante sur $[0,\pi]$. Ainsi, maximiser $|\lambda_k|$ parmi les valeurs propres non-triviales ($k \neq 0$) revient à prendre $k = \pm 1$, et donc

$$\lambda_\star \quad = \quad \sqrt{g\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Puisque $g(\theta) = 1 - \left(\frac{1+4p(1-p)}{4}\right)\theta^2 + o(\theta^2)$ lorsque $\theta \to 0$, on conclut aisément que

$$\frac{t_{\text{REL}}^{(n)}}{n^2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \frac{2}{\pi^2\left(1+4p(1-p)\right)}.$$

En particulier, $t_{\text{REL}}^{(n)}$ est du même ordre que $t_{\text{MIX}}^{(n)}$, et il ne peut donc y avoir cutoff.

Problème 2 – Marche simple sur l'arbre binaire

1. La marche aléatoire simple paresseuse sur un graphe connexe est toujours ergodique et réversible, avec pour loi invariante $\pi(x) = \deg(x)/(2m)$, où m est le nombre d'arêtes. Ici, on a $m = 2+4+8+\cdots+2^n = 2(2^n - 1)$, et $\deg(x) = 3$ pour tous les sommets, sauf la racine (degré 2) et les feuilles (degré 1). Le diamètre est $2n$ et le support de P est symétrique, donc le lemme 11 donne $t_{\text{MIX}}^{(n)} \geq n$.
2. Pour des sommets x, y quelconques, définissons $\gamma_{x,y}$ comme l'unique chemin simple qui va de x à y, et évaluons la congestion associée à ces chemins. Notons que $|\gamma_{x,y}| \leq 2n$. Une arête orientée $a = (u, v)$ de l'arbre sera traversée par le chemin $\gamma_{x,y}$ si et seulement si $x \in T_u$ et $y \in T_v$, où T_u et T_v désignent les sous-arbres obtenus en supprimant l'arête a. Par ailleurs, on a $\vec{\pi}(a) = \frac{1}{4m}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\kappa(a) &= 4m \sum_{x \in T_u} \sum_{y \in T_v} \pi(x)\pi(y)|\gamma_{x,y}| \\ &\leq 8mn\pi(T_u)\pi(T_v) \\ &\leq 2mn,\end{aligned}$$

   où la dernière inégalité utilise le fait que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $p \in [0,1]$. On en déduit que $\frac{1}{\gamma(P)} \leq 2mn$. Mais $m \leq 2^{n+1}$ et pour une chaîne réversible et paresseuse, on a $t_{\text{REL}} \leq \frac{1}{\gamma(P)}$. On conclut que

$$t_{\text{REL}}^{(n)} \leq n2^{n+2}, \quad \text{et} \quad t_{\text{MIX}}^{(n)} \lesssim n^2 2^{n+1} \log 2.$$

3. Soit $A \subseteq S$ l'ensemble des sommets qui commencent par 0. Alors $A \times A^c$ ne contient que l'arête $(0, \emptyset)$, donc $\vec{\pi}(A \times A^c) = \frac{1}{4m}$. Par ailleurs, par symétrie, on a $\pi(\emptyset) + 2\pi(A) = 1$ et donc $\pi(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$. Ainsi,

$$\phi(A) = \frac{1}{2m-2} \leq \frac{1}{2^n}.$$

   A fortiori, $\Phi_\star \leq \frac{1}{2^n}$. Le corollaire 15 entraîne $t_{\text{MIX}}^{(n)} \geq 2^{n-2}$. En fait, l'inégalité de Cheeger donne un peu mieux : comme la marche est réversible et paresseuse, on a $\lambda_\star = 1 - \gamma(P) \geq 1 - 2\Phi_\star$, si bien que

$$t_{\text{REL}}^{(n)} \geq 2^{n-1}, \quad \text{et} \quad t_{\text{MIX}}^{(n)} \gtrsim 2^{n-1} \log 2.$$

4. Pour coupler deux trajectoires $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$, on procède en deux temps :
   (i) Tant que $|X_t|$ et $|Y_t|$ sont différentes, on ne fait bouger qu'une des deux coordonnées en tirant à pile ou face pour savoir laquelle des deux va bouger vers un voisin choisi uniformément au hasard.
   (ii) Une fois que $|X_t|$ et $|Y_t|$ coïncident, on fait au contraire bouger les coordonnées en même temps et dans la même direction (i.e. vers le parent, ou vers l'enfant gauche, ou vers l'enfant droit).

   En notant $\widehat{x}$ le parent du sommet x et $x0, x1$ ses enfants, on a la formule explicite suivante :

$$Q\left((x,y),(x',y')\right) := \begin{cases} \frac{1}{2\deg(x)} & \text{si } |x| \neq |y| \text{ et } x' \text{ voisin de } x \text{ et } y' = y. \\ \frac{1}{2\deg(y)} & \text{si } |x| \neq |y| \text{ et } x' = x \text{ et } y' \text{ voisin de } y. \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = |y| \text{ et } (x',y') = (x,y). \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = |y| = n \text{ et } (x',y') = (\widehat{x},\widehat{y}). \\ \frac{1}{4} & \text{si } |x| = |y| = 0 \text{ et } (x',y') \in \{(x0,y0),(x1,y1)\}. \\ \frac{1}{6} & \text{si } |x| = |y| \notin \{0,n\} \text{ et } (x',y') \in \{(\widehat{x},\widehat{y}),(x0,y0),(x1,y1)\}. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{9}$$

Considérons l'évolution de la différence de hauteur $\Delta_t := |X_t| - |Y_t|$. Pendant la phase (i), une seule des deux trajectoires bouge à chaque fois, donc le processus $(\Delta_t)_{t\geq 0}$ évolue de ± 1 à chaque étape jusqu'à atteindre 0 : il ne peut donc changer de signe. Pendant la phase (ii), les deux marches évoluent toujours dans la même direction, donc l'égalité $\Delta_t = 0$ est conservée.

5. Si la hauteur initiale k est nulle, alors la marche est déjà à la racine et l'on a $t_0 = 0$. Si $0 < k < n$, la marche doit faire au moins un pas pour atteindre la racine, et se retrouve alors à hauteur $k, k-1$ ou $k+1$ avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, et $\frac{1}{3}$. D'après la propriété de Markov,
$$t_k \quad = \quad 1 + \frac{1}{2} t_k + \frac{1}{6} t_{k-1} + \frac{1}{3} t_{k+1}. \tag{10}$$
Enfin, si $k = n$, la hauteur au temps 1 est n ou $n-1$ avec probabilités respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ donc
$$t_n \quad = \quad 1 + \frac{1}{2} t_n + \frac{1}{2} t_{n-1}. \tag{11}$$
Il n'est pas difficile de résoudre ce système d'équations, par exemple avec le changement de variable $u_k := t_k - t_{k-1} + 6$: les équations (10) et (11) se réduisent à $u_k = 2u_{k+1}$ et $u_n = 8$ respectivement, de sorte que $u_k = 2^{n-k+3}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Comme $t_0 = 0$, on conclut que pout tout $0 \leq k \leq n$,
$$t_k \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} (u_i - 6) \;\; = \;\; 2^{n+3}\left(1 - 2^{-k}\right) - 6k.$$

6. Soient x, y deux états, avec disons $|x| \leq |y|$. Soient $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ les marches issues de ces états et couplées à l'aide du noyau de la question 4. Alors $|X_t| \leq |Y_t|$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, lorsque X_t atteint la racine, les deux trajectoires se rencontrent forcément. Ainsi, le temps de coalescence est majoré par le temps d'atteinte de la racine par $(X_t)_{t\geq 0}$. D'après la question 5, l'espérance de ce temps d'atteinte est $t_{|x|} \leq 2^{n+3}$. Comme cette majoration est valable pour tout x, y, on conclut que
$$\mathfrak{D}(t) \quad \leq \quad \frac{2^{n+3}}{t}.$$
En particulier, $t_{\text{MIX}}^{(n)} \leq 2^{n+5}$. En combinant cela avec les résultats de la question 3, on a $t_{\text{REL}}^{(n)}, t_{\text{MIX}}^{(n)} = \Theta(2^n)$. La condition produit n'étant pas vérifiée, il ne peut pas y avoir cutoff.